

УДК 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГО-ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ, С ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ

© Владимир Иванович Ерофеев^{1,2}, Даниил Александрович Колесов¹,
Елена Евгеньевна Лисенкова^{1,3}

¹Институт проблем машиностроения Российской академии наук

²Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

³Нижегородский институт управления – Филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Нижний Новгород,

Россия

erf04@sinn.ru

Аннотация. Рассматривается распространение поперечных волн в струне, лежащей на упруго-инерционном основании. Проанализировано влияние параметров основания на дисперсионные характеристики волн (в частности, на зависимости фазовой и групповой скоростей от волнового числа). Исследованы закономерности генерации волн источником, движущимся по струне.

1. Постановка задачи

Многие элементы машиностроительных конструкций, в частности, несущих движущиеся нагрузки (путевая структура, контактный провод) рассматриваются в виде одномерной системы (струна, балка), взаимодействующей с деформируемым основанием. Для расчета конструкций, лежащих на грунте, в основном, используются три модели основания: 1) винклера модель; 2) модель упругого полупространства; 3) комбинированная модель упругого основания.

В [1] отмечается, что наиболее приемлемой для практических целей моделью является винклерово основание, поскольку результаты расчета конструкций с использованием этой модели близко соответствуют опытным данным.

При исследовании движения нагрузок вдоль одномерных упругих систем основание задается линейно-упругим (основание Винклера) или вязкоупругим, что позволяет учитывать возможность его сопротивления силовому воздействию. При этом основание как динамическая система, как правило, не рассматривается.

А.И. Весницкий [2] предложил математическую модель, обобщающую модель Винклера путем учета инерционности упругого основания, с которым взаимодействует струна, совершающая малые поперечные колебания.

Задача Весницкого рассматривается в следующей постановке: одномерная гибкая нерастяжимая струна (ее объемная плотность ρ_0 ; площадь поперечного сечения S) находится на упруго-инерционном основании, жесткость которого γ , а погонная масса ρ_g .

Через u_1 и u_2 обозначены поперечные отклонения струны и средней линии «постели» от равновесного положения (рис. 1).

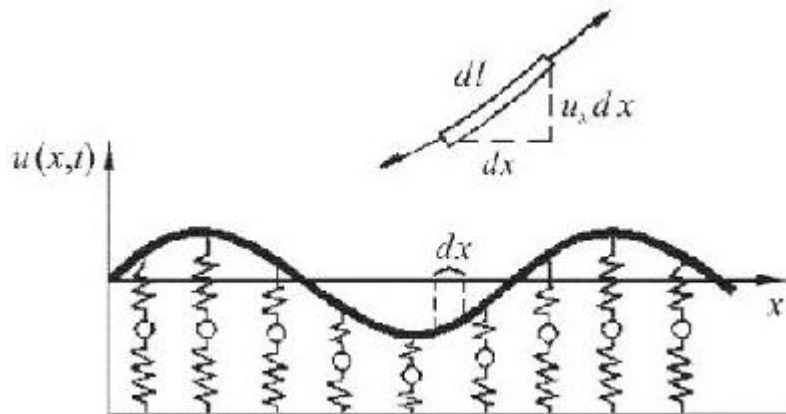


Рис. 1

В начальный момент времени струна была натянута с силой N и ее положение совпадает с осью x .

При отклонении струны от положения равновесия ее бесконечно малый элемент dx растягивается и переходит в элемент dl . При этом предполагается, что при малых амплитудах колебаний струны ($\frac{\partial u_1}{\partial x} \ll 1$) ее натяжение остается неизменным и равным N .

Плотности потенциальной и кинетической энергий системы «струна – упругое основание» будут соответственно равны:

$$W = \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma [u_2^2 + (u_1 - u_2)^2]; \quad T = \frac{1}{2} \rho_0 S \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_g \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2,$$

и лагранжиан системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 S \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \rho_g \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 - N \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 - \gamma [u_2^2 + (u_1 - u_2)^2] \right\}.$$

Исследование волновых процессов в одномерных системах, лежащих на упругом основании, выявило наличие, так называемых, зон непропускания [2, 3], где действительным частотам не соответствуют действительные волновые числа. Если частота колебаний нагрузки меньше, так называемой, частоты отсечки, то при малых скоростях движения нагрузки вдоль таких систем волны не излучаются. При движении нагрузки со скоростью, превышающей критическую, происходит процесс волнообразования. Ниже показано, что учет инерционности в основании струны приводит к возникновению двух частот отсечки, а движущаяся вдоль такой системы нагрузка вызывает в ней упругие колебания, представляющие собой бегущие волны при любых скоростях движения и частотах источника.

Рассмотрим движение нагрузки вдоль струны, лежащей на упруго-инерционном основании. Пусть движущаяся по неизвестному закону $x = \ell(t)$ нагрузка представляет собой массу m , на которую действует поперечная гармоническая сила частоты Ω . (рис. 2).

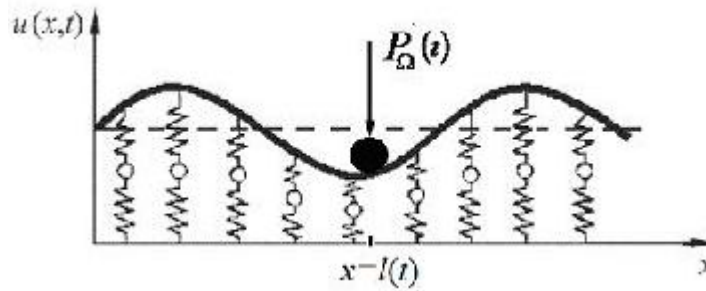


Рис. 2.

Тогда функция Лагранжа движущейся нагрузки будет иметь вид $L = m(\dot{u}_0^2 + \dot{l}^2)/2$, где $u_0(t)$ – поперечное смещение массы m .

Будем полагать, что динамическое поведение одномерной упругой системы и движущейся по ней нагрузки взаимообусловлены, а именно: характер колебаний струны зависит от закона движения нагрузки, а движение последней происходит как под действием внешних сил, так и сил реакции со стороны одномерной системы, включая силы давления волн. Следуя методике постановок краевых задач, разработанной в [2, 3] на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, получим уравнения согласованного динамического поведения направляющей и движущейся нагрузки:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\rho_0 S} (u_1 - u_2) = 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{\rho_g} u_2 = \frac{\gamma}{\rho_g} u_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$u_1(l - 0, t) = u_1(l + 0, t) = u_0(t) \quad (2)$$

$$m\ddot{u}_0 = \rho_0 S (c^2 - \dot{l}^2) [u_{1x}] + P_\Omega(t) \quad (3)$$

$$[u_{2t}] = 0 \quad (4)$$

$$m\ddot{l} = -[T - \dot{l}p] + R \quad (5)$$

Здесь

$$c = \sqrt{N/(\rho_0 S)}, \quad T = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 S \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \rho_g \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + N \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 - \gamma [u_2^2 + (u_1 - u_2)^2] \right\}$$

$$p = -\rho_0 S \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \rho_g \frac{\partial u_2}{\partial t} \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

p – плотность волнового импульса, T – плотность его потока.

Первое из уравнений системы (1) описывает волны, распространяющиеся вдоль струны, а второе – вибрации массива осцилляторов, взаимодействующих с колебаниями струны.

Выражение (2) является условием непрерывности распределенной системы, а (3)–(5) выражают баланс обобщенных сил при $x = \ell(t)$.

2. Расчет дисперсионных характеристик струны, лежащей на упруго-инерционном основании

Проведем расчет дисперсионных характеристик одномерной упругой системы. Вначале рассмотрим струну, лежащую на упругом (безинерционном) основании, уравнение, описывающее колебания которой, можно получить как частный случай из системы (1). Для этого необходимо устремить $\rho_g \rightarrow 0$. Тогда из второго уравнения системы (1) следует, что $u_1 = 2u_2$, а из первого – получаем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2\rho_0 S} u_1 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется уравнением Клейна-Гордона. Оно описывает, в частности, распространение волн

$$u(x, t) = \left(A e^{i(\omega t - kx)} + A^* e^{-i(\omega t - kx)} \right) / 2, \quad (7)$$

где $A = a e^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда волны; a – действительная амплитуда; $\omega t - kx + \varphi$ – полная фаза волны; φ – фазовый сдвиг; $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$ – частота волны; T_0 –

период волны; $k = \frac{2\pi}{\Lambda}$ – волновое число; Λ – длина волны.

Согласно (6), частота и волновое число поперечной волны, распространяющейся в струне, лежащей на линейно-упругом (безинерционном) основании, связаны соотношением

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_*^2 = 0, \quad \omega_* = \sqrt{\gamma / (2\rho_0 S)} \quad (8)$$

Разрешая уравнение (9) относительно частоты ω , получим $\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_*^2}$.

Наличие упругого основания приводит к существованию критической частоты ω_* (частота отсечки), при превышении которой колебания струны носят волновой характер.

При наличии инерционности в основании струны её колебания описываются решением системы двух уравнений (1). Эта система может быть сведена к одному уравнению относительно поперечного перемещения частиц струны u_1 :

$$\frac{\rho_0 S}{\gamma} \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} - \frac{c^2 \rho_0 S}{\gamma} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial t^2} + \left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{2c^2 \rho_0 S}{\rho_g} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\rho_g} u_1 = 0 \quad (9)$$

Отыскивая его решения в виде (7), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновое число поперечной волны, распространяющейся в струне, лежащей на упруго-инерционном основании

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{\gamma}{\rho_0 S} + \frac{2\gamma}{\rho_g} + c^2 k^2 \right) + \frac{2\gamma c^2}{\rho_g} k^2 + \frac{\gamma^2}{\rho_g \rho_0 S} = 0 \quad (10)$$

Разрешая это уравнение относительно частоты в безразмерных переменных:

$$\tilde{k} = ck\sqrt{\rho_0 S/\gamma}, \quad \tilde{\omega} = \omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}, \quad \alpha = \sqrt{\rho_g/\rho_0 S}$$

получим

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2 \pm \sqrt{(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2k^2 + 1)}} \quad (11)$$

Здесь и ниже для краткости записи опущен знак «тильда» над безразмерными переменными.

Из (11) следует, что учет инерционности основания приводит к наличию двух критических частот

$$\omega_{1,2}^* = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 + 2 \pm \sqrt{\alpha^4 + 4}} \quad (12)$$

Сравнивая эти частоты с критической частотой $\tilde{\omega}_* = \omega_*\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$, характерной для безинерционного основания, определим, что их значения связаны между собой двойным неравенством $\omega_2^* < \omega_* < \omega_1^*$. В плоскости ω, k при этом имеется уже не одна, а две дисперсионных ветви (рис. 3), одна из

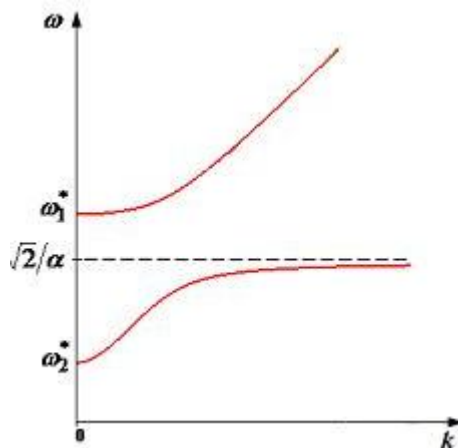


Рис. 3

которых исходит из точки $(0, \omega_1^*)$, а другая – из точки $(0, \omega_2^*)$. Знак «+» в (11) соответствует верхней, а «-» – нижней ветвям дисперсионной кривой. При больших волновых числах кривые (11) стремятся к асимптотам $\omega = k$ и $\omega = \sqrt{2}/\alpha$, соответственно.

Точка перегиба нижней ветви дисперсионной кривой определяется из уравнения

$$6\alpha^8 k^8 + 2\alpha^6 k^6 (7\alpha^2 + 2) + 9\alpha^4 k^4 (\alpha^4 + 4) - (\alpha^4 + 4)^2 = 0 \quad (13)$$

На рис. 4,5 приведены дисперсионные кривые при различных соотношениях погонной массы струны и основания

На рис. 4-а показана верхняя дисперсионная ветвь при $\alpha = 1$ (линия 1), $\alpha = 0.5$ (линия 2) и $\alpha = 5$ (линия 3).

На рис. 4-б при тех же соотношениях масс показана нижняя дисперсионная ветвь.

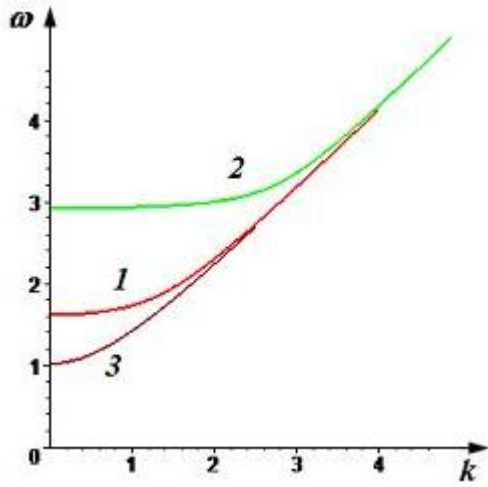


Рис. 4-а

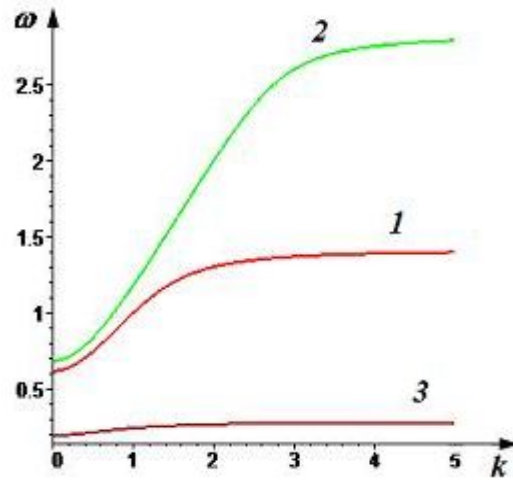


Рис. 4-б

На рис. 5 приведены обе дисперсионных ветви для случаев $\alpha = 1$ (а); $\alpha = 0.5$ (б); $\alpha = 5$ (в).

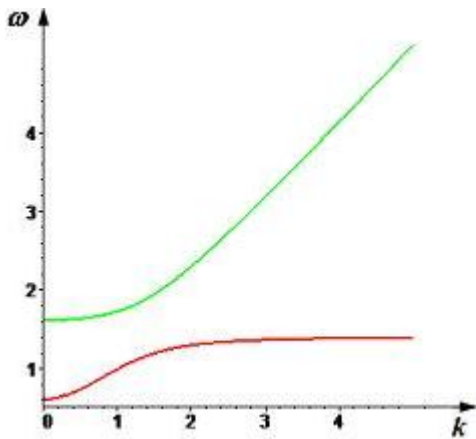


Рис. 5-а

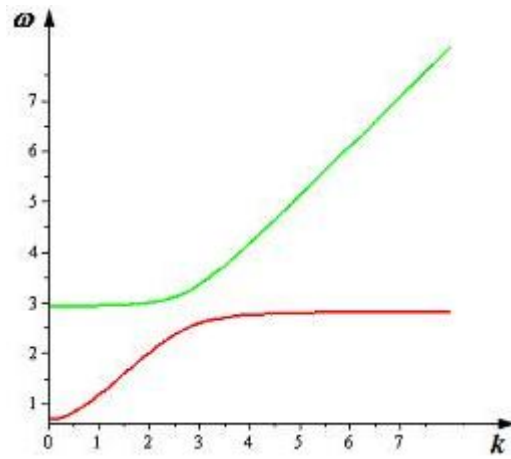


Рис. 5-б

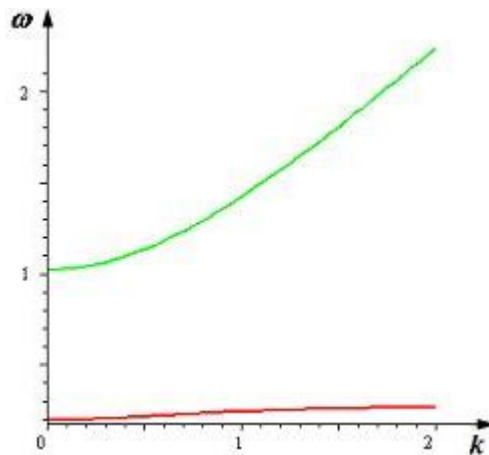


Рис. 5-в

Фазовые скорости ($v_{ph} = \omega/k = c \tilde{\omega}/\tilde{k}$) поперечных волн, распространяющихся в струне, лежащей на упруго-инерционном основании, определяются выражениями

$$\frac{v_{ph}}{c} = \frac{1}{\alpha k \sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2 \pm \sqrt{(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2k^2 + 1)}} \quad (14)$$

На рис. 6 показаны качественный вид фазовых скоростей в зависимости от волнового числа, соответствующих верхней (линия 1) и нижней (линия 2) дисперсионным ветвям.

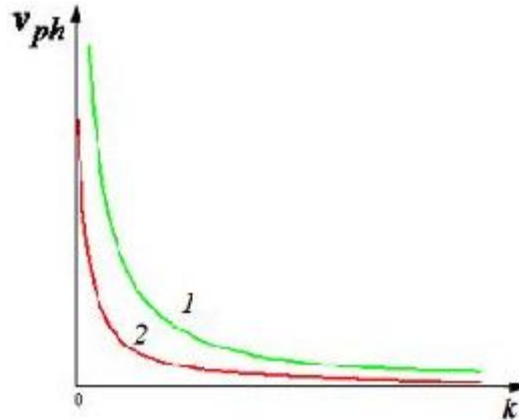


Рис. 6

Групповые скорости волн ($v_{gr} = d\omega/dk = c d\tilde{\omega}/d\tilde{k}$) описываются выражениями

$$\frac{v_{gr}}{c} = \frac{\alpha k}{\sqrt{2}\beta} \frac{\beta \pm (\alpha^2 k^2 + \alpha^2 - 2)}{\sqrt{\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2 \pm \beta}}, \quad \beta = \sqrt{(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2k^2 + 1)} \quad (15)$$

Их зависимости от волнового числа представлены на рис. 7. Кривая 1 соответствует верхней дисперсионной ветви; кривая 2 – нижней. Значение длины волны, при котором кривая 2 достигает своего максимума, определяется на основе решения уравнения (13).

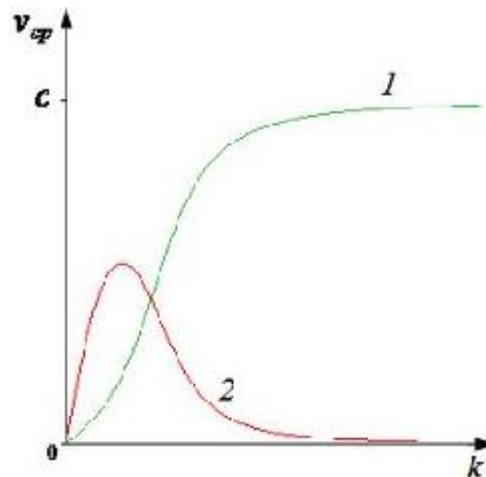


Рис. 7

На рис. 8 сравниваются значения фазовых скоростей с групповыми скоростями при изменении волнового числа от нуля до бесконечности: для верхней (а) и нижней (б) дисперсионных ветвей.

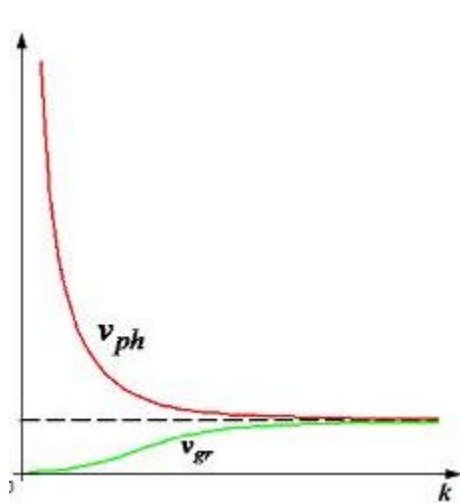


Рис. 8-а

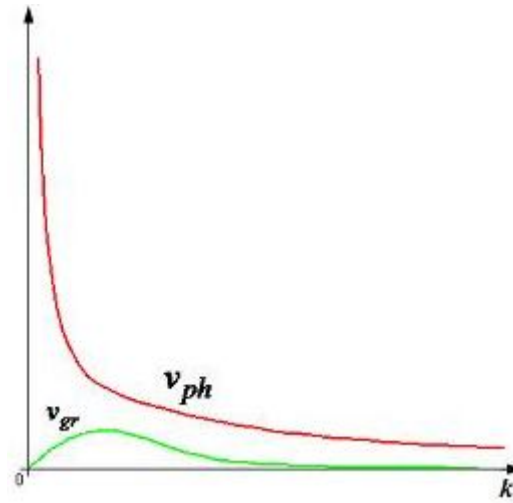


Рис. 8-б

Видно, что во всем диапазоне волновых чисел, значения фазовых скоростей волн превосходят значения их групповых скоростей, следовательно дисперсия является нормальной. При $k \rightarrow \infty$ для верхней дисперсионной ветки $v_{ph} \rightarrow c$ и $v_{gr} \rightarrow c$; для нижней дисперсионной ветки $v_{ph} \rightarrow 0$ и $v_{gr} \rightarrow 0$.

Заметим, что система (1) совпадает с системой уравнений, введенной в [4] для описания длинноволновых динамических процессов в метаматериале, моделируемом как решетка «масса-в-массе».

3. Кинематика волновых процессов в струне, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой

В рамках линейной постановки задачи контактного взаимодействия для случая равномерного закона движения $x = Vt$ ($V = const$) нагрузки проведем анализ волновых явлений и качественно-различных случаев их возбуждения. Под этой задачей понимается определение частот, волновых чисел, скоростей и направлений распространения возбуждаемых волн.

Считая процесс возбуждения колебаний струны установившимся [2, 3], решение задачи (2)-(5), (9) слева и справа от нагрузки будем искать в виде (7): Тогда частоты и волновые числа искомых волн в безразмерных переменных

$$\tilde{k} = ck\sqrt{\rho_0 S/\gamma}, \quad \tilde{\omega} = \omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}, \quad \alpha = \sqrt{\rho_g/\rho_0 S}, \quad \tilde{V} = V/c, \quad \tilde{\Omega} = \Omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$$

определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 \omega^4 - \omega^2(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2) + 2k^2 + 1 = 0 \\ \omega - kV = \Omega \end{cases} \quad (16)$$

Здесь и ниже, как было уже сказано, для краткости записи опущен знак «тильда» над безразмерными переменными

Первое из уравнений системы (16) является дисперсионным уравнением, а второе, называемое кинематическим инвариантом, определяет зависимость частот возбуждаемых волн от частоты источника Ω и скорости V его движения. Если движущаяся нагрузка представляет собой постоянную силу, то $\Omega = 0$ и кинематический инвариант запишется в виде $\omega - kV = 0$. На плоскости (k, ω) кинематический инвариант представляет собой прямую, проходящую через точку $(0, \Omega)$, с угловым коэффициентом, равным скорости движения нагрузки. Точки пересечения этой прямой и дисперсионной кривой соответствуют действительным частотам и волновым числам возбуждаемых волн.

Физически реализуемыми будут лишь те волны, которые удовлетворяют условию ограниченности прогибов струны на бесконечности и условию излучения Мандельштама [5] (волны должны отводить энергию от движущейся нагрузки). Система (16) совместно с последними двумя условиями позволяет единым образом находить значения частот, волновых чисел возбуждаемых движущейся нагрузкой волн, анализировать их поведение от скорости движения и тем самым определять возможные кинематические эффекты: эффект Вавилова-Черенкова, тормозного излучения, эффект Доплера и др., обусловленные движением границ.

Критические скорости V_j^* ($j=1-3$), при переходе через которые меняется число возбуждаемых в струне волн, определяются из условия вырождения корней системы уравнений (16):

$$\begin{aligned}
 & (16 + 8\alpha^4 + \alpha^8)v^{10} \\
 & + (6\alpha^8\Omega^2 - 80 + 32\Omega^2 - \alpha^8 - 24\alpha^4 - 8\alpha^6\Omega^2 - 32\alpha^2\Omega^2 + 32\alpha^4\Omega^2)v^8 + \\
 & - 32\alpha^6\Omega^4 - 128\Omega^2 + 56\alpha^4\Omega^4 + 24\alpha^4 + 30\alpha^6\Omega^2 - 20\alpha^4\Omega^2 - 5\alpha^8\Omega^2 \\
 & + 14\alpha^8\Omega^4 + 56\alpha^2\Omega^2 - 64\alpha^2\Omega^4 + 160)v^6 + (-160 - 9\alpha^8\Omega^4 + 64\alpha^2\Omega^4 \\
 & - 22\alpha^6\Omega^2 + 24\alpha^2\Omega^2 + 16\alpha^8\Omega^6 + 192\Omega^2 + 48\alpha^4\Omega^6 - 40\alpha^6\Omega^6 - 8\alpha^4 \\
 & + 80\alpha^6\Omega^4 + 60\alpha^4\Omega^4 - 56\alpha^4\Omega^2)v^4 + (32\alpha^4\Omega^6 - 35\alpha^6\Omega^4 - 128\Omega^2 + 80 \\
 & - 16\alpha^6\Omega^8 + 44\alpha^4\Omega^2 - 80\alpha^4\Omega^4 + 34\alpha^6\Omega^6 + 9\alpha^8\Omega^8 - 7\alpha^8\Omega^6 - 88\alpha^2\Omega^2 \\
 & + 64\alpha^2\Omega^4)v^2 - 16 + 2\alpha^8\Omega^{10} + 32\Omega^2 + 40\alpha^2\Omega^2 - 36\alpha^4\Omega^4 - 64\alpha^2\Omega^4 \\
 & + 14\alpha^6\Omega^6 + 48\alpha^4\Omega^6 - 16\alpha^6\Omega^8 - 2\alpha^8\Omega^8 = 0
 \end{aligned}$$

Это уравнение на плоскости параметров (Ω, V) задает области с различным числом возбуждаемых волн (рис. 9).

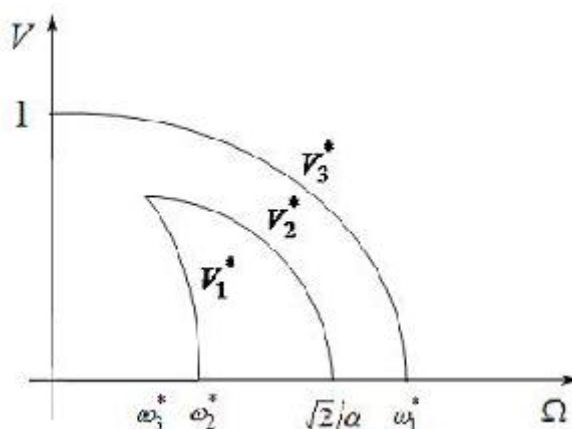


Рис. 9

Если на струну, лежащую на упруго-инерционном основании, действует равномерно движущаяся нагрузка, величина которой постоянна, то, определяя из системы уравнений (16) при $\Omega = 0$, частоты и волновые числа и отбирая только физически реализуемые решения, получим, что в зависимости от скорости движения нагрузки возможны два качественно различных режима волнообразования. Критическая скорость, разделяющая эти случаи равна C , т.е. совпадает со скоростью распространения волн в струне без учета упруго-инерционного основания.

У неподвижной нагрузки поле поперечных смещений локализовано около источника, т.е. спадает по мере удаления от него, а $k_{1,2}$ имеют вид $k_{1,2} = \pm i/\sqrt{2}$. При движении нагрузки со скоростью $0 < V < 1$ слева от нее ($x < Vt$)

$$k_1 = i \left(\alpha^2 V^2 - 2(1 - V^2) + \sqrt{\alpha^4 V^4 + 4(1 - V^2)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 V^2 (1 - V^2))^{-1/2}$$

$$k_{3,4} = \pm \left(2(1 - V^2) - \alpha^2 V^2 + \sqrt{\alpha^4 V^4 + 4(1 - V^2)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 V^2 (1 - V^2))^{-1/2},$$

а справа при $x > Vt$

$$k_2 = -i \left(\alpha^2 V^2 - 2(1 - V^2) + \sqrt{\alpha^4 V^4 + 4(1 - V^2)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 V^2 (1 - V^2))^{-1/2}$$

$$\omega_{1-4} = k_{1-4} V.$$

Отсюда следует, что движение источника нулевой частоты приводит к возникновению, наряду с собственным полем, двух бегущих вслед волн.

Источник нулевой частоты, движущийся со скоростью $V > 1$, собственного поля не создает, но зато излучает четыре волны, бегущие ему вослед, волновые числа и частоты которых определяются формулами

$$k_{1-4} = \pm \left(\alpha^2 V^2 + 2(V^2 - 1) \pm \sqrt{\alpha^4 V^4 + 4(V^2 - 1)^2} \right)^{1/2} (2\alpha^2 V^2 (V^2 - 1))^{-1/2}$$

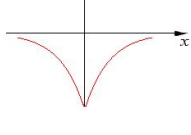
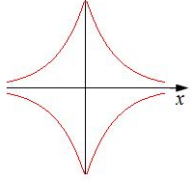
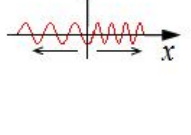
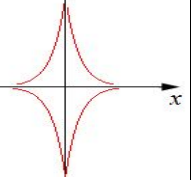
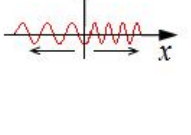
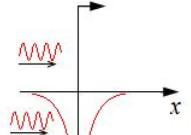
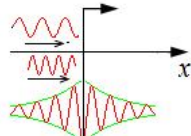
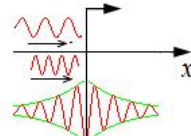
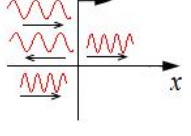
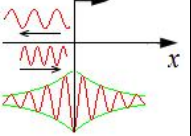
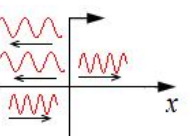
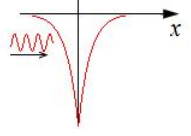
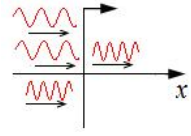

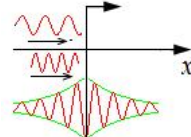
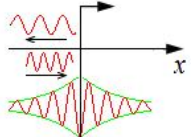
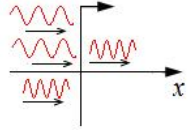
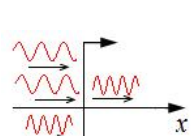
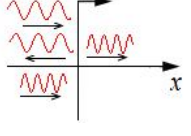
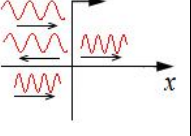

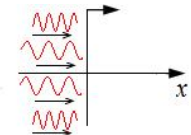
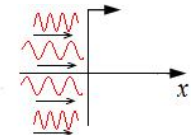
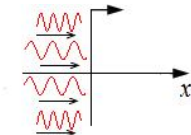
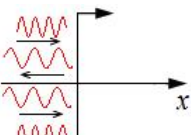
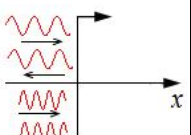
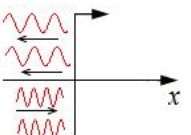
$$\omega_{1-4} = k_{1-4} V.$$

Справа от нагрузки при $x > Vt$ направляющая остается невозмущенной.

Таким образом, наличие инерционности в основании струны приводит к тому, что даже при «докритических» скоростях движения нагрузки ($0 < V < 1$) возникают бегущие волны. Однако, для очень малых ($\Lambda \rightarrow 0$) длин волн $v_{gr} \rightarrow 0$.

Все возможные качественно-различные случаи волнообразования при движении нагрузки вдоль струны, лежащей на упруго-инерционном основании, представлены в таблице (стрелками помечены направления распространения волн)

Таблица

	$\Omega = 0$	$0 < \Omega < \omega_3^*$	$\omega_3^* < \Omega < \omega_2^*$	$\omega_2^* < \Omega < \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$	$\frac{\sqrt{2}}{\alpha} < \Omega < \omega_1^*$	$\Omega > \omega_1^*$
$V = 0$						
$0 < V < V_1^*$						
$V_1^* < V < V_2^*$						
$V_2^* < V < V_3^*$						
$V_3^* < V < 1$						
$V > 1$						

Как видно из последовательности построения решения всей задачи о вынужденных колебаниях, для кинематики волн не важен вид движущейся нагрузки. Важными характеристиками являются лишь частота и скорость ее движения. Это выгодно разделяет задачу кинематики - определение частот и волновых чисел и задачу динамики - определение амплитуд колебаний и сил в движущемся контакте.

Следует отметить, что решение задачи кинематики определяет лишь необходимые условия излучения волн, но не достаточные. Так, может оказаться, что амплитуды прогнозируемых волн будут равны нулю.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Гранты № 12-08-00888, № 12-08-90032-Бел, № 13-08-97103-р_поволжье).

Список литературы

1. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. – Киев.: Изд.: «Будивэльник». 1967. – 185 с.
2. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. - М.:Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Весницкий А. И. Избранные труды по механике. – Н.Новгород: ИД «Наш дом», 2010 – 248 с.
4. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // International Journal of Engineering Science. 2009. Vol. 47. P. 610-617
5. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. Сб. трудов, т.2. АН СССР, М.: Наука. 1947