УДК 621.01

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ШЕСТИЗВЕННЫХ ПЕРЕМЕЩАЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ ИСХОДНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

© Серикбай Байтикович Косболов, Ерулан Турсунович Бекенов

Казахский национальный технический университет имени К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан,

kosbolov@mail.ru

Аннотация. *Представлено решение задачи синтеза пространственной исходной кинематической цепи со сферическим и вращательными кинематическими парами и показано ее использование в качестве структурного модуля при структурно-кинематическом синтезе пространственных шестизвенных перемещающих рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев.*

Ключевые слова: *механизм, звено, кинематические пары, кинематические цепи, синтез.*

KINEMATIC SYNTHESIS OF THREE-DIMENSIONAL SIX-LINK MOTION-GENERATING MECHANISMS ON THE BASIS OF INITNAL KINEMATIC CHAINS

© Serikbay Kosbolov, Yerulan Bekenov

Kazakh national technical university named after K.I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan

Abstract. *A solution to the problem of synthesizing an initial three-dimensional kinematic chain with spherical and rotary kinematic pairs is presented. It is shown that this chain can be used as a structural module for structural-kinematic synthesis of three-dimensional six-link motion-generating lever mechanisms by the preset positions of the in-and output links.*

Key words: *mechanism, link, kinematic pairs, kinematic chains, synthes.*

В работах [1,2] было показано, что в качестве структурного модуля при структурно-кинематическом синтезе плоских рычажных механизмов можно использовать четырехзвенные исходные кинематические цепи (ИКЦ). Такой подход к синтезу плоских механизмов позволяет свести задачу их структурно-кинематического синтеза к решению задачи синтеза ИКЦ, что очень удобно для автоматизации проектирования механизмов. В данной работе показано, что указанный подход можно распространить на задачу структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов.

Представлено решение задачи синтеза пространственной ИКЦ типа *ВСС* (*В* – вращательная, *С* – сферическая кинематические пары) и показано ее использование в качестве структурного модуля при структурно-кинематическом синтезе пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Метод решения задачи синтеза ИКЦ типа *ВСС* основан на введении двух подвижных тел, неизменно связанных с входным и выходным звеньями [3].

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел Q_1 и Q_2: $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1)$, $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2)$ $\left(i=\overrightarrow{1,N}\right)$ где $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ – эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат *OXYZ*.

Требуется найти в неподвижной системе координат такие точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ тела Q_1 и $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2, чтобы расстояние между точками *B* и *C* во всех положениях тел Q_1 и Q_2 мало отличалось от некоторой постоянной величины R (рис. 1) [4].

Решение задачи: Введем взвешенную разность для i-го положения тел в виде:

$$\Delta_{q_1} = \left|\overrightarrow{B_iC_i}\right|^2 - R^2 = (X_{C_i} - X_{B_i})^2 + (Y_{C_i} - Y_{B_i})^2 + (Z_{C_i} - Z_{B_i})^2 - R^2 \qquad (1)$$

где $i = \overrightarrow{1, N}$

Она является функцией десяти параметров: X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C. Группируя эти параметры по четыре с общим параметром R, взвешенную разность представим в трех различных формах:

$$\Delta_{q_i}^{(1)} = (\widetilde{X}_{A_i} - X_A)^2 + (\widetilde{Y}_{A_i} - Y_A)^2 + (\widetilde{Z}_{A_i} - Z_A)^2 - R^2, \qquad (2)$$

$$\Delta_{q_i}^{(2)} = (\widetilde{x}_{B_i} - x_B)^2 + (\widetilde{y}_{B_i} - y_B)^2 + (\widetilde{z}_{B_i} - Z_B)^2 - R^2, \qquad (3)$$

$$\Delta_{q_i}^{(3)} = (\widetilde{x}_{C_i} - x_C)^2 + (\widetilde{y}_{C_i} - y_C)^2 + (\widetilde{z}_{C_i} - Z_C)^2 - R^2, \qquad (4)$$

где

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}_{Ai} \\ \widetilde{Y}_{Ai} \\ \widetilde{Z}_{Ai} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & [T_{10}^i] & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & X_{D_i} \\ & [T_{20}^i] & & Y_{D_i} \\ & & & Z_{D_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{x}_{B_i} \\ \widetilde{y}_{B_i} \\ \widetilde{z}_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & [T_{01}^i] & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{D_i} - X_A \\ Y_{D_i} - Y_A \\ Z_{D_i} - Z_A \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & [T_{21}^i] & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{x}_{C_i} \\ \widetilde{y}_{C_i} \\ \widetilde{z}_{C_i} \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & [T_{02}^i] & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_{D_i} \\ Y_A - Y_{D_i} \\ Z_A - Z_{D_i} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & [T_{12}^i] & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

где $\left[T_{kj}^i\right]$ – матрица перехода от k-той системы координат к j-той системе, определяемые как в (6).

$$T_{01}^i = \left[T_{10}^i\right]^T; \quad T_{02}^i = \left[T_{20}^i\right]^T; \quad T_{21}^i = T_{01}^i \times T_{20}^i; \quad T_{12}^i = T_{02}^i \times T_{10}^i, \ldots$$

Для звеньев i и j вращательной пары ось O_jz_j направим по оси этой пары, кратчайшее расстояние l_i между осями O_jz_j и O_iz_i совместим с осью O_ix_i , а начало координат O_j поместим на расстояние l_{ji} от оси O_ix_i . Тогда угол нутации $\theta_{ji} = const$, угол прецессии $\psi_{ji} = 0$, и с учетом принятых обозначений получаем из (6) матрицу вращательной пары:

$$T_{kj}^{i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 & X_A \\ \cos\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & -\sin\theta_{ji} & Y_A \\ \sin\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

где $X_A = l_i$

$Y_A = -l_{ji}\sin\theta_{ji}$

$Z_A = l_{ji}\cos\theta_{ji}$

Необходимые условия минимума суммы квадратов взвешенной разности:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^2 \qquad (9)$$

можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial s}{\partial X_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Y_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial Z_A} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_B} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \qquad (11)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z_C} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial R} = 0; \qquad (12)$$

Из (10) с учетом (5) и (9) получим:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot \left(\widetilde{X}_{A_i} - X_A\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot \left(\widetilde{Y}_{A_i} - Y_A\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot \left(\widetilde{Z}_{A_i} - Z_A\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \cdot R = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Допустим, что $R \neq 0$. Тогда из последнего равенства системы (13) следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} = 0 \qquad (14)$$

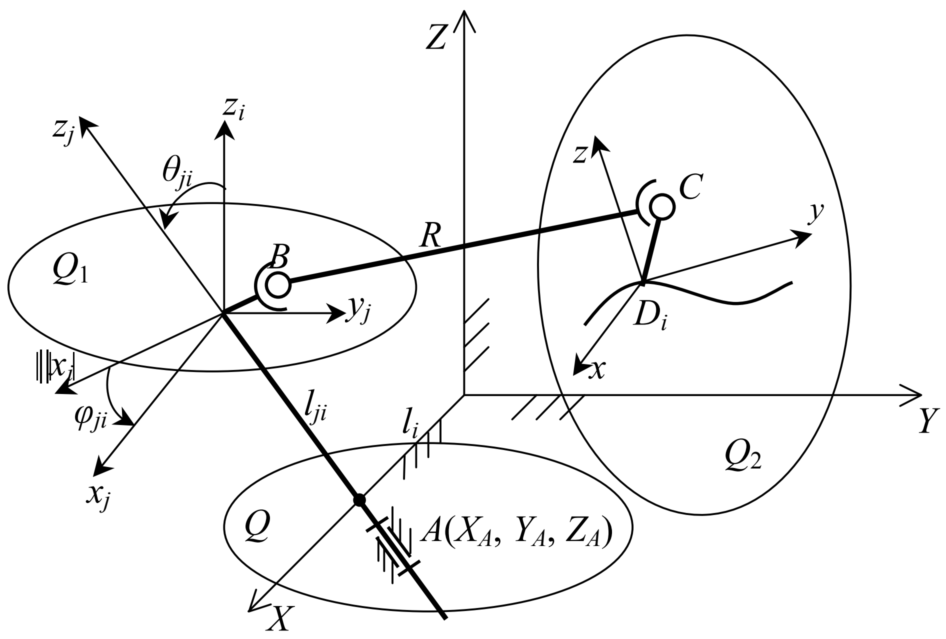


Рис. 1. Исходная кинематическая цепь типа *BCC*

С учетом (14) система уравнений (13) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta_{q_i}^{(1)}\widetilde{X}_{Ai}=0;\ \sum_{i=1}^{N}\Delta_{q_i}^{(1)}\widetilde{Y}_{Ai}=0;\ \sum_{i=1}^{N}\Delta_{q_i}^{(1)}\widetilde{Z}_{Ai}=0;\ \sum_{i=1}^{N}\Delta_{q_i}^{(1)}=0; \tag{15}$$

Подставляя выражения для $\Delta_{q_i}^{(1)}$ из (5) в систему (15), получим:

$$\left.\begin{array}{c}
\sum\limits_{i=1}^{N}\left[\widetilde{X}_{Ai}^2X_A+\widetilde{X}_{Ai}\widetilde{Y}_{Ai}Y_A+\widetilde{Z}_{Ai}\widetilde{X}_{Ai}Z_A+\frac{1}{2}(R^2-X_A^2-Y_A^2-Z_A^2)\widetilde{X}_{Ai}\right]= \\
=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}(\widetilde{X}_{Ai}^2+\widetilde{Y}_{Ai}^2+\widetilde{Z}_{Ai}^2)\widetilde{X}_{Ai} \\
\sum\limits_{i=1}^{N}\left[\widetilde{X}_{Ai}\widetilde{Y}_{Ai}X_A+\widetilde{Y}_{Ai}^2Y_A+\widetilde{Z}_{Ai}\widetilde{Y}_{Ai}Z_A+\frac{1}{2}(R^2-X_A^2-Y_A^2-Z_A^2)\widetilde{Y}_{Ai}\right]= \\
=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}(\widetilde{X}_{Ai}^2+Y_{Ai}^2+Z_{Ai}^2)\widetilde{Y}_{Ai} \\
\sum\limits_{i=1}^{N}\left[\widetilde{Z}_{Ai}\widetilde{X}_{Ai}X_A+\widetilde{Y}_{Ai}\widetilde{Z}_{Ai}Y_A+\widetilde{Z}_{Ai}^2Z_A+\frac{1}{2}(R^2-X_A^2-Y_A^2-Z_A^2)\widetilde{Z}_{Ai}\right]= \\
=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}(\widetilde{X}_{Ai}^2+\widetilde{Y}_{Ai}^2+\widetilde{Z}_{Ai}^2)\widetilde{Z}_{Ai} \\
\sum\limits_{i=1}^{N}\left[\widetilde{X}_{Ai}X_A+\widetilde{Y}_{Ai}Y_A+\widetilde{Z}_{Ai}Z_A+\frac{1}{2}(R^2-X_A^2-Y_A^2-Z_A^2)\right]= \\
=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}(\widetilde{X}_{Ai}^2+\widetilde{Y}_{Ai}^2+\widetilde{Z}_{Ai}^2)
\end{array}\right\} \tag{16}$$

Система (16) линейна относительно переменных X_A, Y_A, Z_A и $H_1 = \frac{1}{2}(R^2 - X_A^2 - Y_A^2 - Z_A^2)$, поэтому ее можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{X}_{Ai}^2 & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{X}_{Ai}\widetilde{Y}_{Ai} & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{X}_{Ai}\widetilde{Z}_{Ai} & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{X}_{Ai} \\ \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{X}_{Ai}\widetilde{Y}_{Ai} & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{Y}_{Ai}^2 & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{Y}_{Ai}\widetilde{Z}_{Ai} & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{Y}_{Ai} \\ \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{X}_{Ai}\widetilde{Z}_{Ai} & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{Y}_{Ai}\widetilde{Z}_{Ai} & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{Z}_{Ai}^2 & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{Z}_{Ai} \\ \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{X}_{Ai} & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{Y}_{Ai} & \sum\limits_{i=1}^{N}\widetilde{Z}_{Ai} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{A_i}^2 \widetilde{X}_{A_i} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} R_{A_i}^2 \widetilde{Y}_{A_i} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} R_{A_i}^2 \widetilde{Z}_{A_i} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} R_{A_i}^2 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

где $R_{Ai}^2 = \widetilde{X}_{Ai}^2 + \widetilde{Y}_{Ai}^2 + \widetilde{Z}_{Ai}^2$.

Решение этой системы по правилу Крамера имеет вид:

$$(X_A, Y_A, Z_A, H_1) = \frac{1}{D_1}(D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{Z_A}, D_{H_1}) \quad (\text{при } D_1 \neq 0) \qquad (18)$$

Аналогично из (11) с учетом (6) и (9) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_B, y_B, z_B, H_2:

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Bi}^2 & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Bi}\widetilde{y}_{Bi} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Bi}\widetilde{z}_{Bi} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Bi} \\ \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Bi}\widetilde{y}_{Bi} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Bi}^2 & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Bi}\widetilde{z}_{Bi} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Bi} \\ \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Bi}\widetilde{z}_{Bi} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Bi}\widetilde{z}_{Bi} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{z}_{Bi}^2 & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{z}_{Bi} \\ \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Bi} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Bi} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{z}_{Bi} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{Bi}^2 \widetilde{x}_{Bi} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} R_{Bi}^2 \widetilde{y}_{Bi} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} R_{Bi}^2 \widetilde{z}_{Bi} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} R_{Bi}^2 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим:

$$(x_B, y_B, z_B, H_2) = \frac{1}{D_2}(D_{xB}, D_{yB}, D_{zB}, D_{H_2}) \quad (\text{при } D_2 \neq 0) \qquad (20)$$

Из (12) с учетом (7) и (12) получим систему линейных уравнений относительно неизвестных x_C, y_C, z_C, H_3:

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Ci}^2 & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Ci}\widetilde{y}_{Ci} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Ci}\widetilde{z}_{Ci} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Ci} \\ \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Ci}\widetilde{y}_{Ci} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Ci}^2 & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Ci}\widetilde{z}_{Ci} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Ci} \\ \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Ci}\widetilde{z}_{Ci} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Ci}\widetilde{z}_{Ci} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{z}_{Ci}^2 & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{z}_{Ci} \\ \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{x}_{Ci} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{y}_{Ci} & \sum\limits_{i-1}^{N}\widetilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{Ci}^2 \widetilde{x}_{Ci} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} R_{Ci}^2 \widetilde{y}_{Ci} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} R_{Ci}^2 \widetilde{z}_{Ci} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} R_{Ci}^2 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

Отсюда находим x_C, y_C, z_C, H_3:

$$(x_C, y_C, z_C, H_3) = \frac{1}{D_3}(D_{xC}, D_{yC}, D_{zC}, D_{H3}) \quad (\text{при } D_3 \neq 0) \tag{22}$$

Исключая первые четыре неизвестных X_A, Y_A, Z_A, R на основе формулы (15), можно свести систему (10) – (12) к системе из шести уравнений с шестью неизвестными $x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$, которую удобно представить в виде:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial x_B} = 0 \qquad && \sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{i}^{(3)}}{\partial x_C} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial y_B} = 0 \qquad && \sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{i}^{(3)}}{\partial y_C} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{q_i}^{(2)}}{\partial z_B} = 0 \qquad && \sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^{(1)} \frac{\partial \Delta_{i}^{(3)}}{\partial z_C} = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

Решение системы (23) представляет трудоемкую задачу, поэтому гораздо эффективнее применять излагаемый ниже алгоритм поиска минимума функции S:

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему линейных уравнений (17) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q$, $C^{(0)} \in Q_2$.
4. Решаем систему уравнений (19) и определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}, R_2^{(1)}$.
5. Задаемся точками $A^{(1)} \in Q$, $B^{(1)} \in Q_1$.
6. Решаем систему уравнений (21) и определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}, R_3^{(1)}$.
7. Далее циклически повторяем шаги (1 – 6), заменяя начальные точки $B^{(0)}$ и $C^{(0)}$ на найденные $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$.

Применяя алгоритм, получим убывающую последовательность значений целевой функции $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, \ldots$, имеющую предел равный значению функции S в точке локального минимума. В результате решения задачи определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, $B^{(0)} \in Q_1$, $C^{(0)} \in Q_2$, такие, что, совмещая с ними звено BC, получаем искомую ИКЦ в виде разомкнутой цепи $ABCD$.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_{A_i}, Y_{A\,i}, Z_{Ai})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{D_i}, Y_{Di}, Z_{Di})$ и эйлеровы углы $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_2, то получим трехзвенную открытую цепь $ABCD$ (таблица 1, рисунок 2-2).

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимают вид:

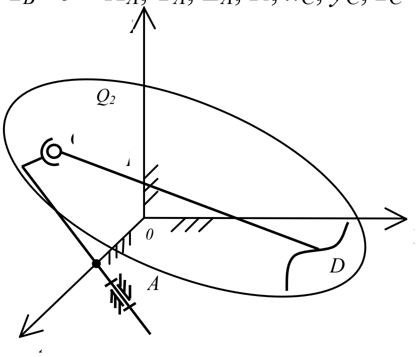
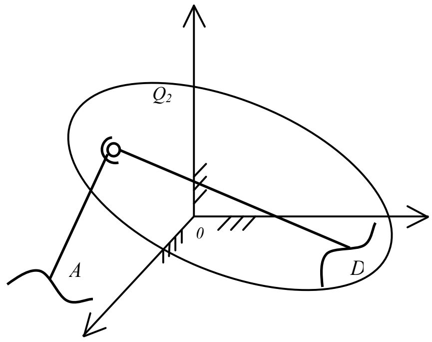
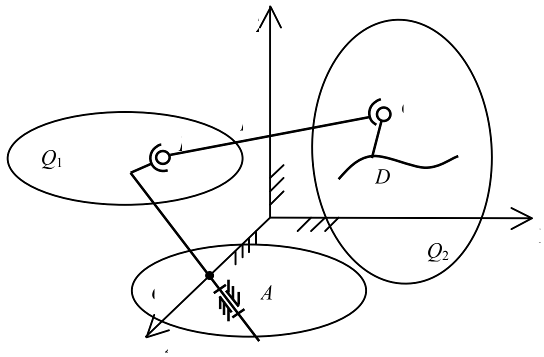
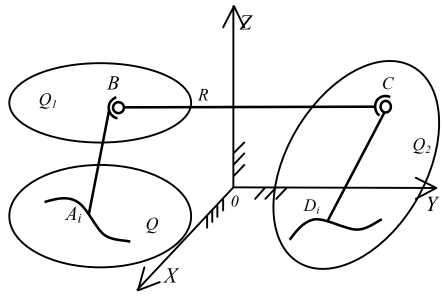
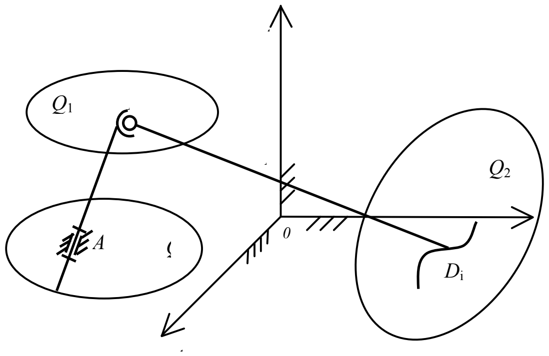
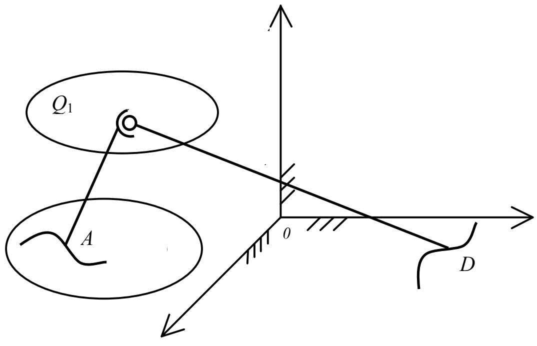
$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \; (j = x_b,\ y_b,\ z_b,\ R,\ x_c,\ y_c,\ z_c)$$

и для нахождения минимума S можно использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

Если точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и $D(X_D, Y_D, Z_D)$ фиксированы, то в результате синтеза ИКЦ получим пространственный четырехзвенник $ABCD$.

2. Пусть заданы координаты $x_C = y_C = z_C = 0$ точки $C \in Q_2$ координаты X_{D_i}, Y_{Di}, Z_{Di} точки D тела Q_2 и углы Эйлера $\theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1$ тела Q_1 а искомыми параметрами являются $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B$ (таблица 1, рисунок 3-1).

Таблица 1

	1	2
1	$x_B=y_B=z_B=0$ $X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C$  	$x_B=y_B= z_B=0, X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai}$ x_C, y_C, z_C R 
2	$X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$  	X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai} $x_B, y_B, z_B, R, x_C, y_C, z_C$ 
3	$x_C=y_C=z_C=0$ $X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B$ z_B,  	$x_C=y_C=z_C=0, X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai}$ x_B, y_B, z_B, R 

Необходимые условия минимума сумма S принимают вид:

$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \qquad (j = X_A, Y_A, Z_A, R, x_B, y_B, z_B)$$

Для нахождения минимума функции S можно опять использовать алгоритм, приведенный выше, учитывая, что $x_C = y_C = z_C = 0$.

3.Пусть заданы координаты $x_B, y_B, z_B=0$ точки B тела Q_1 и эйлеровы углы тела Q_2 $\theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2$. Исходная задача сводится к определению сферы наименее удаленной от N положений фиксированной точки C тела Q_2 (таблица 1, рисунок 1-1).

Необходимые условия минимума суммы S

$$\frac{\partial S}{\partial j}=0\,;\ (j=X_A, Y_A, Z_A, R, x_C, y_C, z_C)$$

Используя приведенный алгоритм синтеза можно получить различные модификации ИКЦ с вращательными парами показанные в таблице 1.

Таким образом, как мы видим, решена задача синтеза ИКЦ с вращательными кинематическими парами и их модификации, которые могут быть использованы как модули структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев.

Рассмотрим синтез перемещающих шестизвенных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Пусть заданы законы движения входного звена $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1=const, \psi_i^1=0, \varphi_i^1)$ и выходного звена $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2)$.

Число степеней подвижности ИКЦ $ABCD$ относительно стойки равно сумме подвижности входного и выходного звена механизма W=5. Чтобы получить механизм с одной степенью подвижности на ИКЦ $ABCD$ необходимо наложить геометрические связи с отрицательной степенью подвижности W= - 4. Для этого дважды используем модификацию ИКЦ ACD имеющая степень свободы W= - 2 (Рис. 2). В начале для синтеза данного механизма используем ИКЦ $ABCD$ составляя целевую функцию в виде:

$$S_1=\sum_{i=1}^{N}\left[\Delta_{qi}^{(1)}\left(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C\right)\right]^2$$

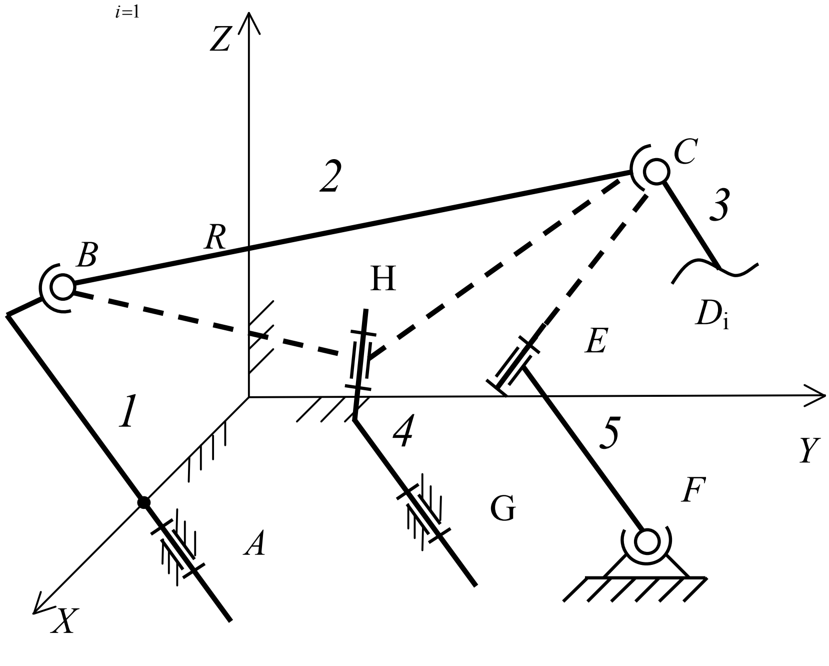


Рис. 2. Пространственный механизм II-класса

Синтез ИКЦ $ABCD$ осуществляется по выше приведенному алгоритму. Далее на основе выражения (1) и (9) определяются координаты x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi} точки B и направляющие косинусы звена BC. Синтезируем звено LG типа BC на основе модификации ACD. Целевая функция имеет вид:

$$S_2=\sum_{i=1}^{N}\left[\Delta_{qi}^{(2)}\left(X_L, Y_L, Z_L, R, x_G, y_G, z_G, a, b, c\right)\right]^2$$

Аналогично синтезируем звено *EF*, используя ИКЦ *ACD*

$$S_3 = \sum_{i=1}^{N} \left[\Delta_{qi}^{(3)} \left(X_F, Y_F, Z_F, R, x_E, y_E, z_E, a, b, c \right) \right]^2 .$$

В итоге получим шестизвенный механизм II класса (Рис. 2).

Используя аналогично выражение (1) можно синтезировать шестизвенные механизмы III и IV класса.

Таким образом, использование одной и той же целевой функции, составленной для синтеза ИКЦ и ее модификации, позволяет автоматизировать процесс синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма.

Список литературы

1. Воробьев Е.И., Егоров О.Д., Попов С.А. Механика промышленных роботов. Том 2. Расчет и проектирование механизмов. М.: Высшая школа, 1988г. 366 с.
2. Джолдасбеков У.А., Дракунов Ю.М., Косболов С.Б., Молдабеков М.М. Синтез исходных кинематических цепей механизмов высоких классов // Изв. АН КазССР, серия физ.–мат. 1987. № 3. С. 65-70.
3. Косболов С.Б., Молдабеков М.М. Синтез исходных кинематических цепей со сферическими парами для пространственных механизмов // Вестник КазНТУ. 1(29)/2002. С. 39-44.
4. Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов. М.: Наука, 1982. 303 с.
5. Kosbolov S., Moldabekov M., Bekenov E. Kinematic synthesis of spatial lever motion – generating mechanisms by use of initial kinematic chain. The NINTH IFToMM international symposium on teori of machines and mechanisms. -Bucharest, Romania, September 1-4, 2005. SYROM 2005. -P. 245-250.
6. McCarthy J.M. The synthesis of planar RR and spatial CC chains and the equation of a triangle. Trans. ASME. J. Mech. Des. 1995, Suppl. “50th anniv. des. eng. div.” – p. 101-106.
7. Golynski Z. Optimal synthesis problems solved by means of nonlinear programming and random methods. Journal of mechanisms. – Vol. 5. - №3. 1970. – p. 287-309.
8. Innocenti C. Direct kinematics in analytical form of the 6-4 fully – parallel mechanisms. Trans. ASME. J. Mech. Des. – 1995, 117.- №1.- p. 85-95.