

УДК 621.01: 534.1

ТРАНСФОРМАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ С КВАЗИПОСТОЯННОЙ АМПЛИТУДОЙ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Санкт - Петербургский государственный университет технологии и дизайна

Санкт-Петербург, Россия

vujo@rambler.ru

***Аннотация.** В статье получили дальнейшее развитие работы, посвященные анализу и синтезу колебательных систем, для которых при соответствующем выборе параметров удастся осуществить существенную качественную трансформацию традиционной амплитудно-частотной характеристики. Выявленная при этом аномалия этой характеристики может быть использована для создания вибраторов с квазипостоянной амплитудой колебаний исполнительных органов, практически не зависящей от частоты возбуждения. Кроме того, при резонансном соотношении частот и воздействии линейной силы сопротивления наблюдается парадоксальный эффект, при котором амплитуда на резонирующей частоте стремится к нулю. Теоретическое исследование иллюстрируется результатами компьютерного моделирования.*

***Ключевые слова:** колебания, амплитудно-частотная характеристика, диссипация, компьютерное моделирование.*

1. Вводные замечания

В работах [1 – 3] был предложен и исследован ряд модификаций механических систем, состоящих из платформы на упругом основании, на которой установлен цикловой механизм с пружинным замыканием. На первый взгляд, речь идёт о тривиальной задаче кинематического возбуждения системы на подвижном основании. Однако оказывается, что при определённом выборе параметров эта система приобретает аномальные свойства. В частности, при некоторых условиях амплитуда вынужденных колебаний на всём частотном диапазоне оказывается постоянной, что представляет интерес при создании вибраторов для исследования зависимости свойств материалов от частоты колебаний при неизменной амплитуде. В данной статье приводятся новые результаты параметрического синтеза и анализируются некоторые эффекты, сопутствующие трансформации динамических характеристик этого класса систем.

2. Типовая динамическая модель

Особенности колебательных систем данного класса проиллюстрируем на примере динамической модели, приведенной на рис.1 для цикловых механизмов (звенья 1,2,3) установленных на подвижной платформе 0 с упругим подвесом. Между выходным звеном 3 и корпусом установлена пружина, осуществляющая силовое замыкание кинематической цепи. В дальнейшем при динамическом анализе мы будем рассматривать лишь один механизм с приведенными инерционными и упругодиссипативными характеристиками, поскольку дублирование механизмов связано только с уравниванием горизонтальных составляющих динамических реакций и не играет принципиальной роли с позиций рассматриваемой задачи.

Примем следующие условные обозначения: m_i – массы; c_i – коэффициенты жёсткости; ψ_i – коэффициенты рассеяния; φ, ω – угол поворота и угловая скорость звена 1; y_1, y_2 – координаты звеньев 0 и 3.

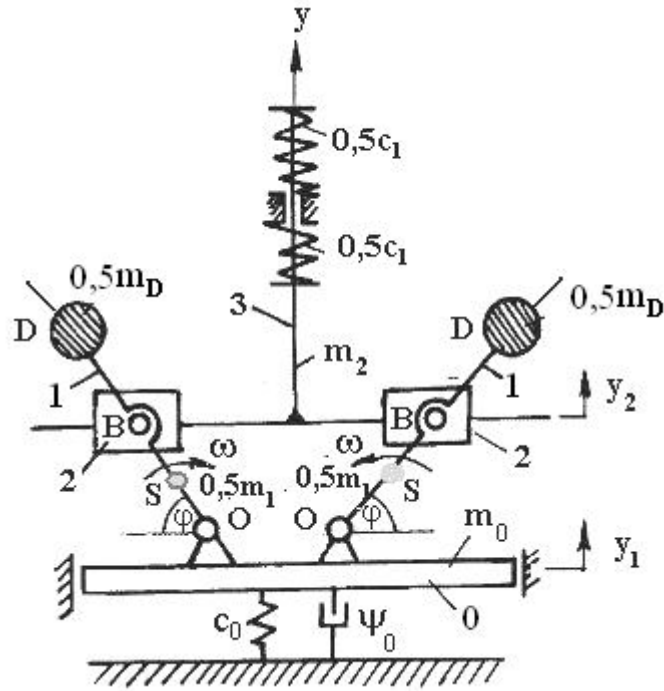


Рис.1

На кривошипе 1 в общем случае может быть дополнительно установлен груз массой m_D . Пусть при отсутствии этой массы кривошип уравновешен, т.е. его центр масс S совпадает с точкой O . Тогда при установке дополнительного груза центр масс этого звена переместится в точку D .

В качестве обобщённой координаты примем $q = y_1$, причём за нуль отсчёта примем положение равновесия системы при $\varphi = 0$. При этом кинетическая и потенциальная энергия описываются следующим образом:

$$T = 0,5[(m_0 + m_1)\dot{q}^2 + m_D(\dot{q} + R\omega \cos \omega t)^2 + m_2(\dot{q} + r\omega \cos \omega t)^2]; \quad (1)$$

$$V = 0,5[c_0 q^2 + c_1(q + r \sin \omega t)^2].$$

Здесь m_2 – сумма масс звеньев 2 и 3; $R = OD$; $r = OB$.

После подстановки (1) в уравнение Лагранжа второго рода при учёте эквивалентной силы линейного сопротивления получаем

$$m_\Sigma \ddot{q} + \beta \dot{q} + (c_0 + c_1)q = -[c_1 r - \omega^2(m_D R + m_2 r)] \sin \omega t, \quad (2)$$

где $m_\Sigma = m_0 + m_1 + m_2 + m_D$; $\beta = (c_0 + c_1)\psi_*/(2\pi\omega)$ – приведенный коэффициент линейного сопротивления; ψ_* – приведенный коэффициент рассеяния.

3. Условия возбуждения вынужденных колебаний с квазипостоянной амплитудно-частотной характеристикой

Если принять

$$c_1 r = \omega_*^2(m_D R + m_2 r), \quad (3)$$

то имеет место динамическая разгрузка системы, при которой на определённой частоте $\omega = \omega_*$ кинематическое возбуждение полностью компенсируется восстанавливающей силой

в упругом элементе c_1 [4]. Однако в данном случае перед нами стоит другая задача – осуществить колебания платформы с амплитудой, не зависящей (или слабо зависящей) от изменения ω .

Согласно (2) амплитуда вынужденных колебаний определяется как

$$A = \frac{|c_1 r - \omega^2 (m_D R + m_2 r)|}{(c_0 + c_1) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}}, \quad (4)$$

где $z = \omega / p$ – коэффициент частотной расстройки; $p = \sqrt{(c_0 + c_1) / m_\Sigma - \delta^2} \approx \sqrt{(c_0 + c_1) / m_\Sigma}$ – собственная частота; $\delta = \psi_* / (4\pi)$ – диссипативный коэффициент.

Для более ясного физического представления об исследуемой задаче сначала рассмотрим частный случай, при котором отсутствуют неуравновешенный груз ($m_D = 0$) и диссипативные силы ($\delta = 0$). Тогда формула (4) принимает вид

$$A = r \frac{|1 - \omega^2 / k^2|}{(1 + \zeta) |1 - \omega^2 / p^2|}, \quad (5)$$

где $k = \sqrt{c_1 / m_2}$; $\zeta = c_1 / c_0$.

Требование $\frac{dA}{d\omega} = 0$ приводит к очевидному условию $k = p$; при этом $c_1 / c_0 = m_2 / (m_1 + m_0)$ и согласно (5)

$$A = r / (1 + \zeta) = \text{const}. \quad (6)$$

Полученный результат свидетельствует о нетривиальной ситуации, когда «амплитудно-частотная характеристика» не зависит от частоты возмущения. Легко убедиться в том, что собственная частота системы p при этом равна собственным частотам двух подсистем, полученных при разрыве кинематической связи в шарнирах B (см. рис.1). Это означает, что при «жестком» соединении обеих подсистем собственная частота остаётся неизменной.

Далее вернёмся к рассмотрению общего случая, соответствующего исходной модели. Тогда

$$A = \frac{|c_1 r - \omega^2 (m_2 r + m_D R)|}{(c_0 + c_1) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}} = \frac{rk^2 |1 - \omega^2 (1 + \rho \mu_D) / k^2|}{p^2 (1 + \zeta) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}}, \quad (7)$$

где $\rho = R / r$, $\mu_D = m_D / m_2$.

При выполнении условия $k^2 / (1 + \rho \mu_D) = p^2$ на основании (7) получаем

$$A = \frac{r |1 - z^2|}{(1 + \zeta) \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\delta^2 z^4}}, \quad (8)$$

Принимая во внимание, что с другой стороны $p^2 = k^2 (1 + \zeta) / \mu_\Sigma$, где $\mu_\Sigma = 1 + \mu_0 + \mu_1 + \mu_D$, $\mu_i = m_i / m_2$, имеем дополнительное уравнение связи между безразмерными параметрами:

$$\zeta = \mu_\Sigma / (1 + \rho \mu_D) - 1 > 0 \quad (9)$$

Отметим, что при заданном дополнительном условии безразмерная собственная частота $\tilde{p} = p/k$ зависит только от произведения $\rho\mu_D$ (рис.2)

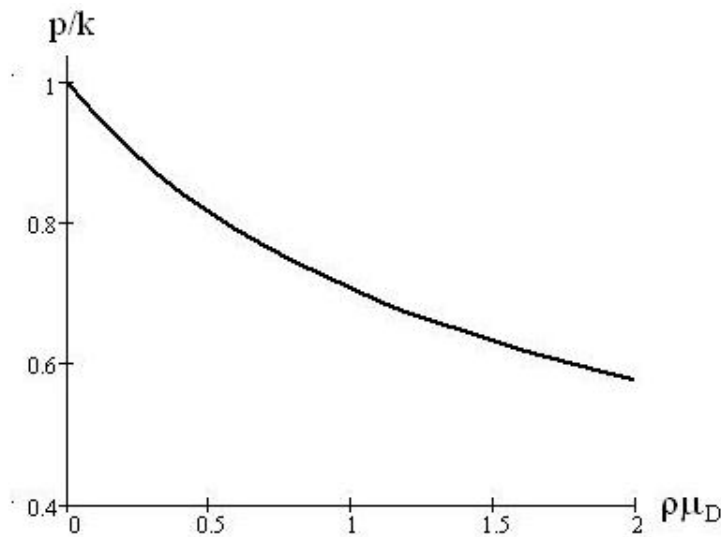


Рис. 2. График безразмерной собственной частоты

В безразмерной форме окончательная зависимость, описывающая амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), имеет вид

$$a = a_* \kappa(z, \delta). \quad (10)$$

Здесь $a = A/r$, $a_* = (1 + \zeta)^{-1} = (1 + \rho\mu_D)/\mu_\Sigma$ – амплитуды вынужденных колебаний платформы и статической амплитуды; $\kappa(z, \delta)$ – коэффициент динамичности, определяемый как

$$\kappa = 1 / \sqrt{1 + 4\delta^2 z^4 / (1 - z^2)^2}. \quad (11)$$

(здесь и ниже термин «безразмерный» опускается).

Далее определим колебания выходного звена 3.

$$y_2 / r = \sin \omega t - a \sin(\omega t - \gamma), \quad (12)$$

где $\gamma = \arctg[2\delta z / (1 - z^2)]$.

Используя (11), можно показать, что

$$b = \max(y_2 / r) = \sqrt{(1 - a \cos \gamma)^2 + a^2 \sin^2 \gamma}, \quad (13)$$

где b – амплитуда звена 2

4. Анализ и параметрический синтез амплитудно-частотных характеристик

На рис.3 приведено полученное на основании (9) – (12) семейство квазипостоянных амплитудно частотных характеристик $a(z)$ для платформы 1 и $b(z)$ для ведомого звена 2. При построении графиков приняты следующие исходные данные: $\mu_0 = 2$; $\mu_D = 0,5$; $\delta = 0,03$. Двойная индексация кривых соответствует $a-\rho$, $b-\rho$ (цифры отвечают численному значению параметра $\rho = R/r$).

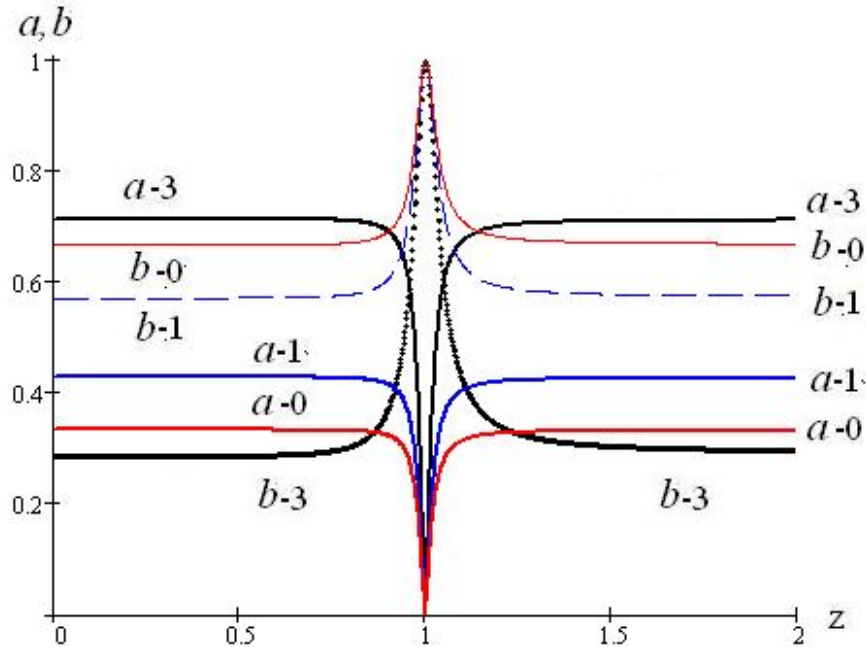


Рис.3. Семейство АЧХ

Анализ графиков выявляет следующие особенности АЧХ:

- За исключением узкого частотного диапазона в окрестности резонансной зоны $z = 1$ амплитуды вынужденных колебаний платформы и ведомого звена практически сохраняют постоянное значение.
- При резонансе ($z = 1$) амплитуда платформы обращается в нуль (антирезонанс), а для ведомого звена принимает значение $b = 1$ ($A_2 = \max(y_2) = r$), что соответствует резонансу.

При $\rho = 0, \rho = 1$ имеем $a < b$, а при $\rho = 3$ амплитуда платформы превышает амплитуду звена 3. Представляет интерес граничный случай $a = b$. Принимая при отсутствии диссипации в (13) $b = a$, ($\gamma = 0, \pi$), получаем $a = b = 0,5$. Поскольку при этом $a = a_*$, граничное значение $\rho = \rho_*$ определяется как

$$\rho^* = 0,5(\mu_0 + \mu_D - 1) / \mu_D . \quad (14)$$

Таким образом, если $\rho < \rho^*$ имеем $a < b$ и $a > b$ при $\rho > \rho^*$. На рис. 4 показаны графики $\rho^*(\mu_0, \mu_D)$. В частности, при принятых выше исходных параметрах $\rho^* = 1,5$.

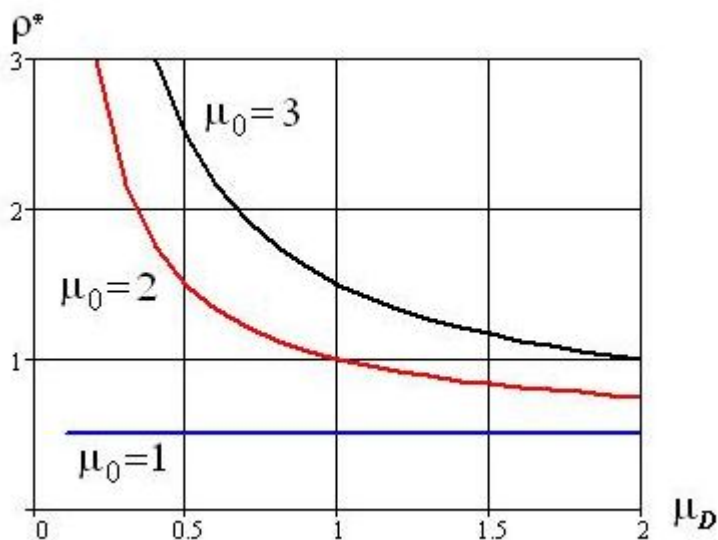


Рис 4. Графики $\rho^*(\mu_D)$

Для более подробного изучения поведения системы непосредственно в резонансной зоне на рис. 5 выделён соответствующий частотный диапазон. Помимо режимов, отображённых на рис.3, приведены АЧХ для режима $\rho^* = 1,5$. Анализ графиков показывает, что при $\rho < \rho^*$ фаза колебаний платформы и выходного звена при входе в резонансную зону сохраняется неизменной (кривые $a-0, b-0$), и наоборот, при $\rho > \rho^*$ меняются на противоположную (кривые $a-3, b-3$). При $\rho = \rho^*$ и некотором удалении от резонансной зоны, как и следовало ожидать, $a \approx b \approx a_*$. Этот режим проиллюстрирован на рис.5,б (a – кривая 1; b – кривая 2). Заметим, что аналогичная ситуация возникает при динамическом гашении, когда на определённой частоте реакция со стороны гасителя на объект виброзащиты «уравновешивает» внешнее возмущение.

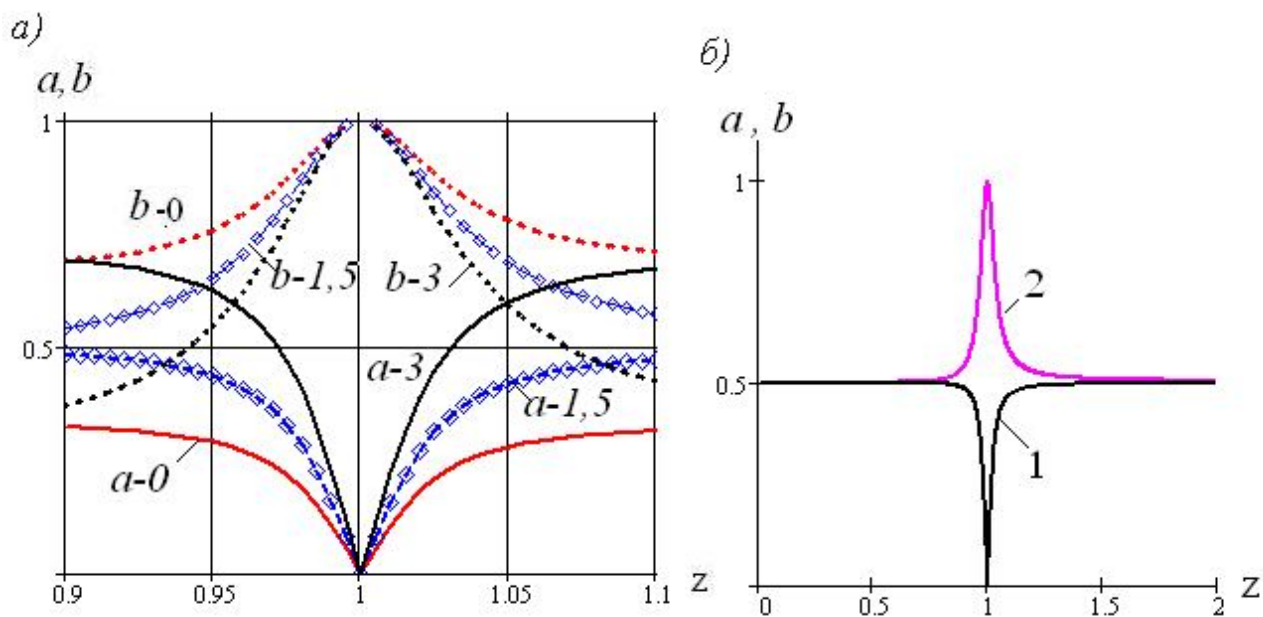


Рис.5. АЧХ в резонансной зоне

В нашем случае, однако, есть существенные отличия. Во-первых, динамический гаситель вместе с защищаемым объектом образует колебательную систему с числом степеней свободы, не меньше двух, в то время как рассматриваемая система имеет одну степень свободы. С этой точки зрения данный эффект ближе к так называемой динамической разгрузке [4]. Во-вторых, при динамическом гашении учёт диссипации приводит к некоторому конечному значению амплитуды колебаний, отличному от нуля и зависящему от уровня диссипации; в данной системе при $z = 1$ амплитуды $a = 0$, $b = 1$ не зависят от уровня диссипации.

На рис.6 приведены графики $y_1(t)$, $y_2(t)$, полученные компьютерным моделированием при $\rho = \rho^* = 1,5$ (остальные данные см. выше). В нерезонансной зоне ($z = 0,7$; рис.6, а) амплитуды колебаний соответствуют полученным выше значениям (см. рис. 5, б), а фазы колебаний звеньев 0 и 3 смещены на π . В резонансной зоне ($z = 0,997$; рис. 6, б) амплитуда платформы стремится к нулю, а амплитуда ведомого звена – к единице. Принятое значение

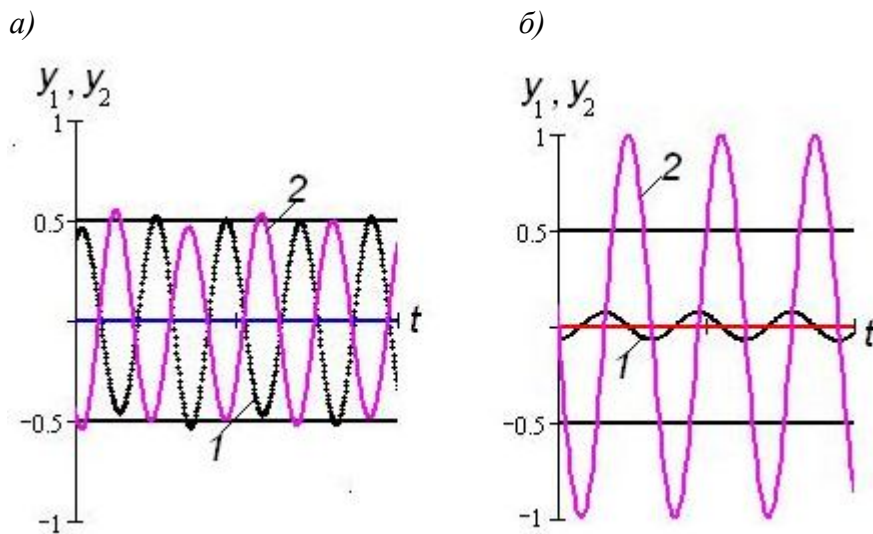


Рис.6. Колебания в нерезонансной и резонансной зоне: 1 – $y_1(t)$; 2 – $y_2(t)$.

z несколько отличающегося от единицы. Это связано лишь со стремлением проиллюстрировать фазовый сдвиг, который, как и следовало ожидать, равен $\pi/2$.

Следует отметить, что при пересечении резонансной зоны система обычно не успевает выйти на установившийся режим. Тем не менее уменьшение амплитуды колебаний платформы в резонансной зоне проявляется достаточно чётко (рис.7).

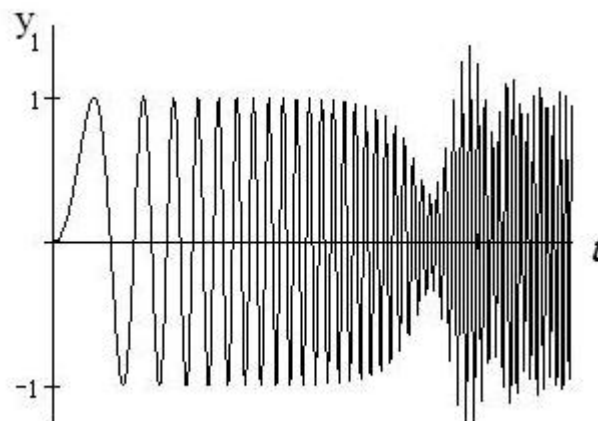


Рис.7. Переход через резонансную зону

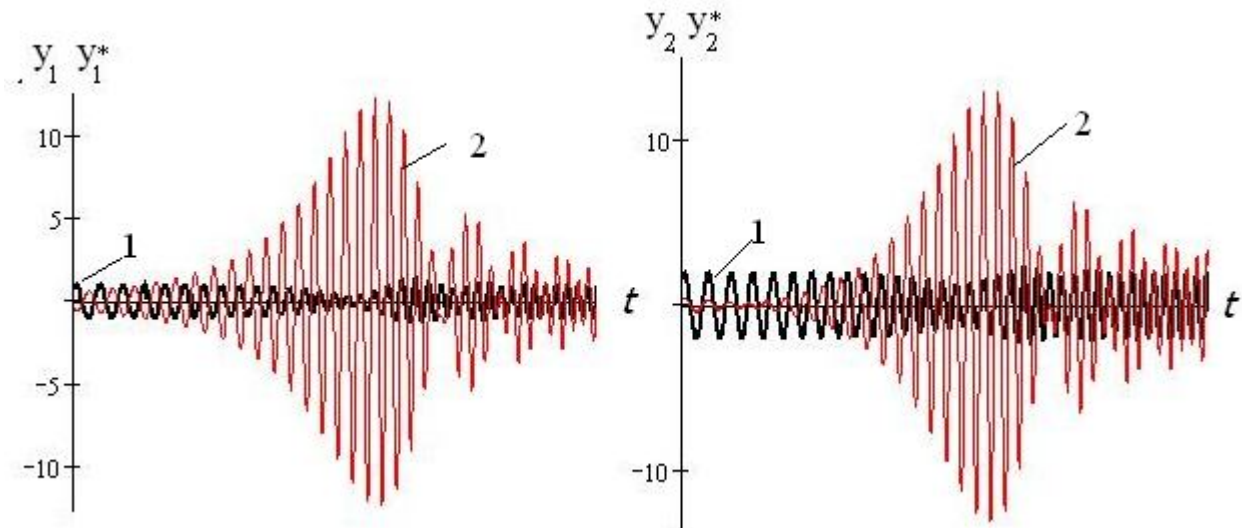


Рис 8 . Сопоставление колебательных режимов:

На рис.8 показаны колебания $y_1(t)$, $y_2(t)$ при изменении коэффициента частотной расстройки $z = \omega / p$ в диапазоне $0 < z < 2$ для двух случаев: при выполнении условий квазипостоянной АЧХ (кривые 1; см. формулу (8)) и при традиционном кинематическом возбуждении (y_1^* , y_2^* , кривые 2). На графиках чётко проявляется существенное отличие обоих режимов и эффективность предложенной методики динамического синтеза вибратора при решении поставленной задачи.

Применительно к данной задаче представляют интерес энергетические затраты, распределение энергетических потоков, а также взаимодействие вибратора с электродвигателем ограниченной мощности. Анализ этих вопросов требует отдельного рассмотрения.

Список литературы

1. Вульфсон И. И. Исследование динамики механизмов с частотно- независимой амплитудой вынужденных колебаний. // Проблемы машиностроения и надёжности машин. №1, 2001.– С.42–47.
2. Вульфсон И. И. Об одной нелинейной динамической модели с аномальными характеристиками. // Проблемы машиностроения и надёжности машин. №4, 2001.– С.12 – 18.
3. Vulfson J. Mechanisms with anomalous amplitude-frequency characteristic. // Proceedings of VIII IFToMM International Symposium on Theory of Machines and Mechanisms. 2001, Vol. III. Bucharest. Pp. 369–374.
4. Механика машин: Учеб.пособие для вузов / И. И. Вульфсон, М.Л. Ерихов, М.З. Коловский и др; Под ред. Г.А.Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996 – 511 с.