

УДК 534.1

## К РАСЧЕТУ ВИБРОПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ УДАРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук  
[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

**Аннотация.** Продолжено изучение сильно нелинейной сплошной среды сложной структуры с распределенным ударным элементом. Эта модель позволяет дать описание процесса формирования и распространения вибрационных полей в механических конструкциях с большим числом ударных пар. Даны необходимые определяющие соотношения. Приведены примеры одномерных вариантов модели - оснащенных стержней со сложными структурами.

**Ключевые слова:** сильно нелинейные сплошные среды сложной структуры, виброполя, несущие части сред, присоединенное оборудование, интегро-операторные уравнения, распределенный ударный элемент, струнная решетчатая конструкция.

## CALCULATION VIBROPOLEY IN SYSTEMS WITH LARGE NUMBER OF IMPACT ELEMENTS

Vitaly.L. Krupenin

Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia

**Abstract.** The study of the strongly nonlinear continuum complex structure with distributed impactor. This model allows us to give a description of the formation and propagation of vibration in the fields of mechanical structures with a large number of pairs of shock. The necessary constitutive relations. Are examples of one-dimensional versions of the model - equipped with rods with complex structures.

**Keywords:** strongly nonlinear continuous media complex structure, vibrational fields, carrying parts environments connected equipment, integral-operator equations, distributed impactor, string grid design.

1. В работах [1-3] введены модели сплошных сред сложной структуры, содержащих "несущие" и "присоединенные" части. Точка такой среды характеризуется, вообще говоря, вектором перемещения сколь угодно высокой размерности.

В работах [2 - 5] (см. также [9]) на частных примерах рассмотрены сильно нелинейные аналоги таких сред с присоединенными частями, содержащими распределенные ударные элементы; их реологические модели содержат ударные пары. Рассмотрим одно обобщение упомянутой теории.

Постулируем существование некоторой упругой несущей среды, описываемой вектором перемещений  $u(x, t)$  ( $x \in R^3$ ,  $t \in R$ ), подчиняющейся классическому уравнению Ламе (ср.[1])

$$\rho u_{tt} = (\lambda + \mu) \text{grad div} u + \mu \Delta u + F, \quad (1)$$

где  $\rho$  - плотность несущей среды,  $\lambda$ ,  $\mu$  - параметры Ламе, характеризующие ее упругость. Пусть интенсивность объемных сил имеет следующую структуру:  $F = F_1 + F_0$ , где  $F_1$ , - заданный вектор, а

$$F_0(x, t) = -c_1(u - y_n^{(1)}) - c_2(u - y_n^{(2)}), \quad (2)$$

где предполагается, что с каждой точкой среды связана ударная пара, состоящая из двух взаимодействующих линейных стационарных подсистем  $\mathbf{A}^{(I)}(x)$  и  $\mathbf{A}^{(II)}(x)$ , определяемых системами операторов динамической податливости

$$L^{(I)}_{qj}(p) = O(p^{-2}), L^{(II)}_{lk}(p) = O(p^{-2}),$$

где  $p = d \square dt$ , а индексы  $q, j, l, k$  изменяются на некоторых множествах, определяемых размерностями взаимодействующих подсистем, параметры которых могут, вообще говоря, зависеть от  $x$ . Для замыкания системы (1), (2) добавим соотношения

$$y_n^{(I, II)} = L_{nn}^{(I, II)}(p)c_{1,2}u \pm L_{kn}^{(I, II)}(p)\Phi_1(y^0, y_t^0) + f_n^{(I, II)}, \quad (3)$$

$$y_k^{(I, II)} = L_{kk}^{(I, II)}(p)c_{1,2}u \pm L_{kk}^{(I, II)}(p)\Phi_1(y^0, y_t^0) + f_k^{(I, II)}, \quad (4)$$

где  $y_n^{(I, II)}(x, t)$  и  $y_k^{(I, II)}(x, t)$  - перемещения точек подвеса и взаимодействия,  $y^0 = y_k^{(II)} - y_k^{(I)}$  - относительное сближение ударников взаимодействующих подсистем, к которым приведены плотности  $m_{II}(x)$  и  $m_I(x)$ ;  $\Phi_1(y^0, y_t^0)$  - плотность силы удара (для системы  $A^{(I)}$  в (3) и (4) выбираем знак "плюс", для  $A^{(II)}$  - "минус"); в эти же уравнения могут быть внесены какие-либо функции  $f^{(I, II)}_{k,n}$ , описывающие дополнительные внешние воздействия. Граничные условия ставятся точно так же, как и в классическом случае - для уравнения (1), моделирующего несущую конструкцию (ее физические и геометрические качества). Частотные свойства амортизированного оборудования, генерирующего виброударные процессы, дает модель присоединенной части среды, содержащей распределенный ударный элемент.

Механизм связи несущей и присоединенной частей определяет структуру глобального вибрационного поля. Данный подход, возможно, жертвует информацией об особенностях каких-либо конкретных элементов системы, а также об эффектах, проявление которых возможно только при учете дискретности модели [8].

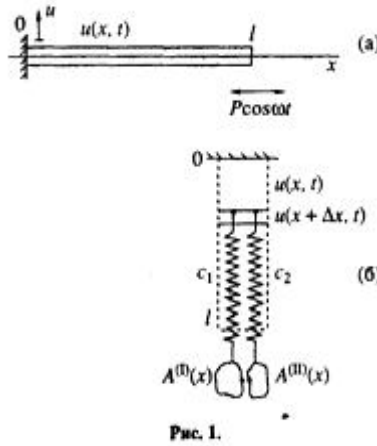
2. Для практических расчетов важно рассмотреть одномерные случаи [2-4, 7] - модели протяженных конструкций с разнообразным амортизированным оборудованием - так называемые оснащенные стержни (рис. 1). Предполагаем, что распределенный ударный элемент подчиняется гипотезе, являющейся континуальным аналогом классической гипотезы о прямом центральном ударе. Тогда вместо (1), (2) имеем скалярное уравнение несущей части среды вида

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} + c_1(u - y_n^{(I)}) + c_2(u - y_n^{(II)}) - F_1 = 0, \quad (5)$$

где площадь сечения стержня единична; смысл обозначений тот же, что и ранее; структура ставших скалярными соотношений (3), (4) сохраняется. Плотность силы удара (для определенности берется несимметричный ударный элемент [4- 6]) задается соотношениями

$$y^0[x, \varphi(x)] = \Delta(x), \quad (6)$$

$$J(x) = M(X) [1 + R(x)] y^0_t [x, \varphi(x - 0)] \geq 0,$$



где  $\Delta(x)$  - распределение зазоров (натягов);  $J(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $R(x)$  - плотность ударного импульса, распределения моментов удара и коэффициента восстановления. Считаем, что к взаимодействующим точкам приведены плотности  $m_{II}(x)$  и  $m_I(x)$ . Это предположение корректно, так как, в свою очередь, следует из предположения, что асимптотика операторов динамической податливости  $\sim p^{-2}$ . Приведенная линейная плотность

$$M(x) = m_I(x)m_{II}(x) [m_I(x) + m_{II}(x)]^{-1}.$$

В дальнейшем, для определенности, изучая T- периодические режимы с одним ударом за период движения, в несимметричном случае считаем

$$\Phi_1(y^0, y_t^0) = J(x)\delta^T[t - \varphi(x)],$$

где

$$\delta^T(t) = \exp(ik2\pi T^{-1}t), \quad k = 0, \pm 1, \dots;$$

$\delta^T$  - T-периодическая последовательность  $\delta$ -функций Дирака. При этом  $y^0 \leq \Delta$ . Постановка задачи завершается добавлением граничных условий

$$u(0, t) = 0; \quad Eu_x(l, t) = P \cos \omega t \quad [\text{или } u(l, t) = \mu \cos \omega t],$$

Будем рассматривать основные режимы считая, что  $\omega = 2\pi T^{-1}$ ; случаи субгармонических ( $\omega = 2\pi(lT)^{-1}$ ;  $l=1, 2, \dots$ ) или (при надлежащем возбуждении) комбинационных режимов (со  $\omega = 2\pi q(lT)^{-1}$ ;  $q, l=1, 2, \dots$ ) рассматриваются аналогично [5, 6].

3. Для отыскания периодических режимов, отвечающих заданной вибрации, перейдем к интегральным уравнениям T-периодических колебаний, предположив для простоты выкладки, что  $L_{qj}^{(I,II)}(p) = \text{const}(x)$ . Это предположение для общей качественной теории несущественно, но вносит вычислительные упрощения. В уравнениях (4) и (3) прежде всего надо определить поля перемещений  $u(x, t)$ ;  $y_k^{(I,II)}(x, t)$  и  $y^0 = y_k^{(II)} - y_k^{(I)}$ . После их нахождения определение функций, описывающих движение, в том числе и перемещений подвеса не составит труда. Используя периодические функции Грина (ПФГ) - установившиеся реакции линейных подсистем на периодические последовательности  $\delta$ -функций Дирака - с помощью общих методик [3-6, 8,9] имеем три интегральные уравнения, которые запишем в виде:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + \int_0^l \int_0^T [U_1(x, z, t-s) - U_2(x, z, t-s)] \Phi_1(y^0, y_t^0) dz ds, \quad (7)$$

$$y_k^{(II)}(x, t) = y_{k0}^{(II)}(x, t) + \int_0^l \int_0^T [Y_{kI}^{(II)}(x, z, t-s) - Y_{kII}^{(II)}(x, z, t-s)] \times \\ \times \Phi_1(y^0, y_t^0) dz ds - \int_0^T \chi^{(II)}(t-s) \Phi_1(y^0, y_t^0) ds, \quad (8)$$

$$y_k^{(1)}(x, t) = y_{k0}^I(x, t) + \int_0^l \int_0^T [Y_{kI}^{(1)}(x, z, t-s) - Y_{kII}^I(x, z, t-s)] \times \\ \times \Phi_1(y^\circ, y_t^\circ) dz ds + \int_0^T \chi^{(1)}(t-s) \Phi_1(y^\circ, y_t^\circ) ds. \quad (9)$$

В этих уравнениях ядра зависят от структуры операторов  $L_{qj}^{(I,II)}(p)$  и функции Грина линейной краевой задачи. Они определяются стандартными громоздкими выражениями и здесь не приводятся (ср. [9]).

Физический смысл уравнений (7)-(9) оказывается таким: «полевые функции» складываются в результате проявления различных силовых факторов, каждый из которых воздействует на определенный структурный элемент среды.

Например, поле перемещений  $u(x, t)$  складывается, во-первых, из решение задачи как результат кинематического или силового возбуждения конца с последнем случае

$$u(x, t) = P(E\omega_0)^{-1} \sin\omega_0 x (\cos\omega_0 l)^{-1} \cos\omega t, \quad (10)$$

где значение величины  $\omega_0$  зависит от параметров операторов  $L_{qj}^{(I,II)}(p)$ . После ряда стандартных вычислений находим

$$\omega_0^2 = \omega^2 E^{-1} \{ \rho + c_1 \omega^2 [c_1 L_{nn}^{(I)}(i\omega) - 1] + c_2 \omega^2 [c_2 L_{nn}^{(II)}(i\omega) - 1] \}. \quad (11)$$

Составляющие, описываемые при посредстве интегральных операторов с ядрами  $U_{1,2}$  соответственно, - суть вклады, определяемые перемещениями, возникающими вследствие соударений в каждой из двух составляющих ударного элемента (I и II).

Соотношения (8) и (9) вполне аналогичны. Рассмотрим для определенности (9). Здесь полевая функция  $y_k^{(1)}(x, t)$  содержит четыре составляющих. Во-первых - решение линейной задачи:  $y_k^{(1)}(x, t) = L_{kn}^{(I)}(i\omega) c_1 u_1$ . Во-вторых - вклады, определяемые, интегральными операторами с ядрами  $Y_{kI}^I$  и  $Y_{kI}^{II}$  - перемещения «точки соударения», в данном случае системы I, приобретаемые из-за ударов, но возбуждаемые благодаря возникновению перемещений соответственно в первой и второй системах, образующих ударный элемент. И, наконец, составляющая, определяемая интегральным оператором с ядром  $\chi^{(1)}$  - есть результат непосредственного воздействия на удар в данной точке.

Интенсивность влияния того или иного силового фактора определяется видом операторов динамической податливости, но ясно, однако, что, благодаря обычно выраженным фильтрующим свойствам линейных динамических систем в (7) доминирует первый член, а в (8) и (9) - вначале четвертый, затем первый.

Сделаем весьма принципиальное замечание. Свойства выражения (10) и других с ним связанных выражений определяются величиной  $\omega_0$  (11). Если частота воздействия близка к одной из собственных частот присоединенных систем

$$(|L_{nn}^{(I,II)}(i\omega)| \rightarrow \infty, \text{Im}\{L_{nn}^{(I,II)}(i\omega)\} = 0), \quad (12)$$

то величина может стать комплексной. В этом случае присоединенное оборудование оказывает на несущую часть влияние, сходное с влиянием системы линейных динамических гасителей колебаний (ср. [1]). Интенсивные резонансные виброударные процессы развиваются при удалении от собственных частот линейной системы. При их развитии присоединенное оборудование может вести себя подобно системе ударных гасителей колебаний (ср. [2, 3]).

4. Получим представление, определяющее в общем виде искомый виброударный процесс и отвечающие ему поля перемещений.

Вычтем (9) из (8) и обозначим  $Y^*(x, z, t-s)$  ядро интегрального оператора, осуществляющего двойное интегрирование. Тогда

$$y^\circ(x, t) = y_{k0}^\circ(x, t) - \int_0^l \int_0^T Y_*(x, z, t-s) \Phi_1(y^\circ, y_t^\circ) dz ds - \int_0^T \chi(t-s) \Phi_1(y^\circ, y_t^\circ) ds. \quad (13)$$

Здесь  $y_k^\circ = y_{k0}^{(m)} - y_{k0}^{(0)}$ ;  $\chi = \chi^{(l)} + \chi^{(m)}$ . Так как  $\Phi_1$  представима через  $\delta$ -функции, проведем интегрирование по  $s$ , а затем воспользуемся гипотезой (6) и, обозначая,  $U_0 = U_1 - U_2$  формулой (8). Имеем

$$y^\circ(x, t) = y_{k0}^\circ(x, t) - J(x) \chi[t - \varphi(x)] - \int_0^l Y_*[x, z, t - \varphi(z)] J(z) dz; \quad (14)$$

$$\Delta - y_{k0}^\circ[x, \varphi(x)] = -J(x) \chi(0) - \int_0^l Y_*[x, z, \varphi(x) - \varphi(z)] J(z) dz; \quad (15)$$

$$J(x) = M(1 + R) \{y_{t, k0}^\circ[x, \varphi(x)] - \int_0^l Y_*[x, z, \varphi(x) - \varphi(z) - 0] J(z) dz - J(x) \chi(-0)\}; \quad (16)$$

$$u(x, t) = u_1(x, t) + \int_0^l U_0[x, z, t - \varphi(x)] J(z) dz. \quad (17)$$

Представление (17) (двухфункциональное представление [8]) определяет распределение вибрации по несущему стержню. Операторные уравнения (15), (16) определяют неизвестные функции  $J(x)$  и  $\varphi(x)$ . Они достаточно сложны и их исследование и построение решений представляет самостоятельную проблему. Важные частные случаи были рассмотрены в [3,4].

При анализе комбинационных режимов  $p:q$  (в частности субгармонических режимов  $1:q$ ) вид соотношений (14)—(17) и др. принципиально не меняется: соответствующие ПФГ строятся на периоде  $p^{-1}qT$  [7].

5. Рассмотрим систему, состоящую из большого ; числа однотипных механизмов, расположенных на вибрирующих основаниях (рис. 2). Этой модели можно естественным образом сопоставить среду с распределенным ударным элементом:

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} - a_1(x) y_{1t}^2 - a_2(x) y_{2t}^2 = 0; \quad (18)$$

$$m_1(x) y_{1tt} + c_1(x) y_1 + a_1(x) u_{tt} y_{1t} + \Phi_1(y^\circ, y_t^\circ) = 0; \quad (19)$$

$$m_2(x) y_{2tt} + c_2(x) y_2 + a_2(x) u_{tt} y_{2t} - \Phi_1(y^\circ, y_t^\circ) = 0; \quad (20)$$

$$y^\circ(x, t) = y_2(x, t) - y_1(x, t); \quad u(0, t) = 0, \quad E u_x(l, t) = \epsilon P_1 \cos \omega t, \quad (21)$$

где, предполагаемые малыми коэффициенты связи  $a_{1,2}(x)$  имеют размерность [кг/м]. "Индивидуальная" динамика таких систем подробно описана в [5, гл. 7], Избегая громоздких выражений, которые могут быть достаточно легко воспроизведены при помощи соотношений, имеющих в [2-4,7,9], наметим схему решения задачи. Предположим для определенности, что все механизмы установлены с натягом  $\Delta(x) < 0$  (на рис. 2 показаны механизмы с зазорами, чтобы подчеркнуть, что сделанное допущение не принципиально), а "собственные частоты" оборудования  $\Omega_{12}(x) = [c_{1,2}(x)/m_{1,2}(x)]$  много меньше частот несущего

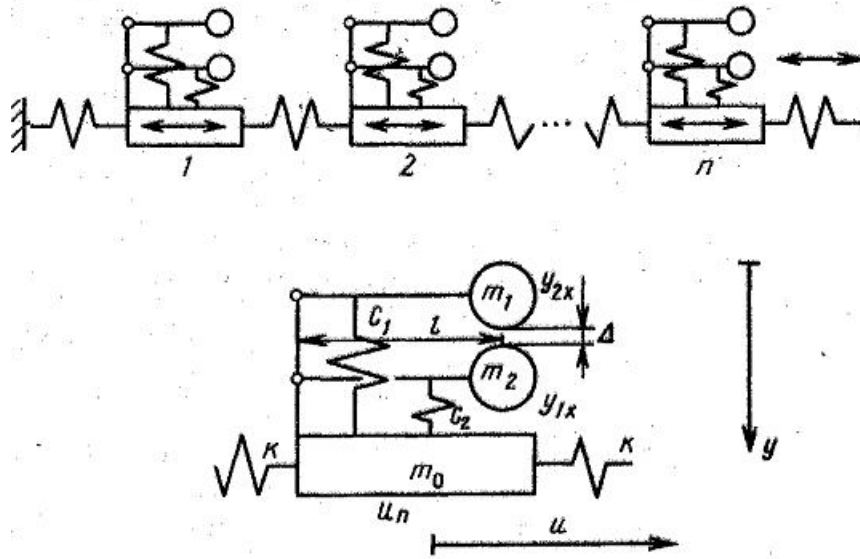


Рис.2

стержня. Тогда в нулевом приближении резонансные одночастотные режимы присоединенных механизмов даются формулами

$$y_1(x,t) = -J(x)\chi_1(x,t), \quad y_2(x,t) = J(x)\chi_2(x,t); \quad (22)$$

$$\chi_{1,2}(x,t) = T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_{k,1,2}(x) \exp(ik\omega t), \quad L_{k,1,2}^{-1}(x) = [c_{1,2}(x) - ik\omega m_{1,2}(x)]; \quad (23)$$

$$J(x) = -\Delta(x)[\chi_1(x,0) + \chi_2(x,0)]^{-1}. \quad (24)$$

Фазу процесса получим из нулевого приближения ( $a_{1,2} = 0$  - случай "замороженной" системы, когда взаимодействия между элементами присоединенных систем при разных  $x$  нет). Выбирая ее значение из условия существования режимов с большими импульсами [5, 6], отнесем ее ко "входному воздействию":

$$u_{it}(x,t+\varphi) = -\varepsilon P_1 \omega^2 (E\omega_0^2)^{-1} \sin \omega_0 x \cos(\omega t + \varphi) [\cos \omega_0 l]^{-1}. \quad (25)$$

Здесь величина  $\omega_0$  строится при помощи (11) и выражений для динамических податливостей  $L_{1,2}(i\omega)$ . Используя (18)—(20) и (22) - (25), после преобразований приходим к первому приближению вибрационного поля несущего стержня, которое имеет вид интегрального представления:

$$u(x,t) = \varepsilon P_1 (E\omega_0^2)^{-1} \sin \omega_0 x \cos(\omega t + \varphi) [\cos \omega_0 l]^{-1} + \int_0^l \int_0^T \chi(x,z,t-s) [J^2(z)\chi_1^2(z,s) + J^2(z)\chi_2^2(z,s)] dz ds,$$

где  $\chi(x,z,t) [\omega_0 \neq \pi(2k+1)(2l)^{-1}, k \in Z]$  - ПФГ стержня [5,8].



Взятие входящей сюда квадратуры приводит к весьма громоздким, но достаточно просто интерпретируемым формулам, по своему физическому содержанию близким к полученным ранее в [3, 9].

6. В заключение сделаем несколько принципиальных замечаний.

(i) Необходимость обращения к подобным задачам диктуется, прежде всего, тем обстоятельством, что в реальных машинных конструкциях именно множественные систематические соударения элементов амортизированных подсистем весьма часто оказываются "ответственными" за формирование глобального виброполя и за виброактивность конструкций в целом,

(ii) Предложенные модели позволяют также исследовать и стохастизацию вибрационных полей, хотя наиболее опасными для вибростойкости конструкций оказываются резонансные виброударные процессы, исследуемые с помощью изложенных методик.

(iii) Круг рассмотренных систем может быть расширен за счет более общих моделей. Например, в качестве несущей конструкции могут быть взяты двумерные струнные решетки [10] (рис.3, а), а в качестве амортизированного оборудования – жестко связанная с узлами решетки система механизмов с силовым замыканием (рис. 3, б) [5, 6]. Смысл обозначений на рис. 3 – очевиден. Рассмотрение этого класса задач будет проведено в последующих работах.

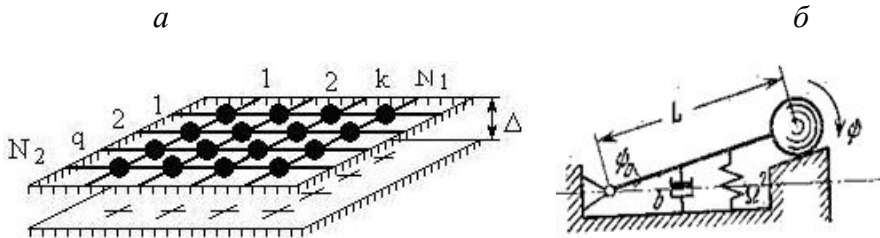


Рис.3.

Статья выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № № 13-08-01235 и 13-08-90419).

### Список литературы

1. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.
2. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных виброударов // Машиноведение. 1987. № 1. С.25-32.
3. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний // Крупенин В.Л., Веприк А.М. и др. Л.: Машиностроение, 1987. 76 с.
4. Крупенин В.Л. Вибрационные поля в системах сложной структуры со множественными разрывами // ДАН. 1995. Т. 343. № 6. С. 1-85.
5. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985.320 с. .
6. . Babitsky V.I., Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
7. Крупенин В.Л. К анализу виброударных процессов в системах с большим числом ударных пар // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 2. С. 97-105. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных
8. системах и сильно нелинейных средах// Проблемы машиностроения и надежности машин.1998, № 5, с. 13-30
9. . Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1 и 2) // Интернет-журнал «ВНТР», №№6, 7.- 2011.-С.26-33; с.3-16.
10. Крупенин В.Л. К анализу динамики колеблющейся двумерной решетки // Интернет-журнал «ВНТР», №2, 2007.-С.8-17.