

УДК 539.3

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В МАТЕРИАЛАХ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

© Владимир Иванович Ерофеев<sup>1</sup>, Игорь Александрович Миклашевич<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия  
[erf04@sinn.ru](mailto:erf04@sinn.ru)<sup>2</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь[dsmsm@bntu.by](mailto:dsmsm@bntu.by)

**Аннотация.** Изучается влияние точечных дефектов (вакансии, межузлия) в материале на дисперсионные, диссипативные и нелинейные свойства продольных акустических волн.

**Ключевые слова:** точечные дефекты, деформация, акустическая волна, дисперсионные зависимости, диссипация, нелинейность.

При воздействии на материал лазерного излучения или потока частиц (например при ионной имплантации) в нем создаются точечные дефекты (вакансии, межузлия) [1]. Прохождение интенсивной продольной акустической волны способствует изменению в областях растяжения и сжатия энергии активации образования точечных дефектов, приводя к их пространственному перераспределению. Дефекты, мигрирующие по материалу, рекомбинируют на различного рода центрах. Роль таких центров могут играть дислокации, примеси внедрения и др.

В [2] показано, что задачу о распространении акустической волны в материале с дефектами следует рассматривать как самосогласованную, включающую в себя, наряду с динамическим уравнением теории упругости, кинетическое уравнение для плотности дефектов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_\ell^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\beta_N}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{(\lambda + 2/3\mu)\Omega_j}{\rho} \frac{\partial n_j}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_0 + q_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + D_j \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \beta_j n_j. \quad (2)$$

Здесь  $u(x, t)$  – продольное перемещение частиц материала (волна считается плоской);  $n_j(x, t)$  – объемная концентрация точечных дефектов ( $j = v$  – для вакансий,  $j = i$  – для межузлий);  $c_\ell = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  – скорость, с которой распространялась бы продольная волна в материале, если бы в нем отсутствовали дефекты;  $\lambda, \mu$  – константы Ламе;  $\rho$  – плотность материала;  $\beta_N$  – коэффициент нелинейности:  $\beta_N = 3\lambda + 6\mu + 2A + 6B + 2C$ ;  $A, B, C$  – модули Ландау третьего порядка;  $\Omega_j$  – дилатационный параметр, характеризующий изменение объема материала при образовании в нем одного точечного дефекта. Для вакансий  $\Omega_j < 0$ , для межузлий  $\Omega_j > 0$ .

Уравнение (2) записано в предположении, что основными процессами, определяющими поведение дефектов, являются процессы генерации, рекомбинации и диффузии. Через  $q_0$  обозначен темп генерации точечных дефектов в отсутствие деформации; второе слагаемое в правой части (2) представляет собой деформационную поправку в

генерацию дефектов;  $D_j$  – коэффициент диффузии дефекта типа  $j$ ;  $\beta_j$  – скорость рекомбинации на стоках. Объемная взаимная рекомбинация разноименных дефектов не учитывается.

Система (1), (2) сводится к одному нелинейному уравнению относительно перемещения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left( c_l^2 - \frac{q(\lambda + 2/3\mu)\Omega_j}{\rho\beta_j} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{D_j}{\beta_j} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) + \frac{1}{\beta_j} \left( \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - c_l^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right) = \\ = \frac{\beta_N}{2\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \frac{D_j}{\beta_j} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\beta_j} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем безразмерные перемещение, координату и время:

$$\tilde{U} = \frac{U}{U_0}, \quad \tilde{x} = x \sqrt{\frac{\beta_j}{D_j}}, \quad \tilde{t} = t \sqrt{\frac{\beta_j [c_l^2 - q_\varepsilon(\lambda + 2/3\mu)\Omega_j]}{D_j}}, \quad (4)$$

преобразуя уравнение (3) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^4 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{t}^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^4 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^4} + b \sqrt{a} \left( \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^3} - \frac{1}{a} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{t}} \right) = \\ = \frac{\beta_N}{2\rho} \left\{ \frac{\sqrt{\beta_j} U_0}{\sqrt{D_j} c_l^2 a} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 - \frac{\partial^3}{\partial \tilde{x}^3} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \right)^3 \right] + \frac{U_0}{D_j c_l \sqrt{a}} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены обозначения:

$$a = 1 - \frac{q_\varepsilon(\lambda + 2/3\mu)\Omega_j}{\beta_j \rho c_l^2}, \quad b = \frac{c_l}{\sqrt{\beta_j D_j}}.$$

В линейном приближении  $\beta_N = 0$  уравнение (5) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^4 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{t}^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^4 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^4} + b \sqrt{a} \left( \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^3} - \frac{1}{a} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{t}} \right) = 0. \quad (6)$$

Отыскивая решение уравнения (4.6) в виде бегущей гармонической волны

$$U = A_0 e^{i(\omega t - kx)} + A_0^* e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (7)$$

где  $\omega$  – круговая частота;  $k = 2\pi/\Lambda$  – волновое число ( $\Lambda$  – длина волны);  $A_0$  – комплексная амплитуда ( $A_0^*$  – ее комплексно-сопряженная величина), придем к дисперсионному уравнению:

$$k^4 - k^2(a - a\omega^2 + ib\sqrt{a}\omega) + a(\omega^2 + ib\sqrt{a}\omega^3) = 0. \quad (8)$$

Заметим, что в уравнении (8), пространственные и временные масштабы продольной волны, содержит комплексные коэффициенты, откуда следует, что волна будет не только распространяться в среде, но и затухать по мере распространения.

Сначала рассмотрим частный случай, когда  $b = 0$ , это возможно, если коэффициент диффузии устремить в бесконечность ( $D_j \rightarrow \infty$ ). Тогда коэффициенты дисперсионного уравнения (8) будут действительными и оно примет вид:

$$k^4 - k^2(a - a\omega^2) + a\omega^2 = 0. \quad (9)$$

Частота и волновое число в этом случае связаны соотношением:

$$\omega = \pm k \sqrt{\frac{1 - (1/a)k^2}{1 + k^2}}, \quad (10)$$

т.е. наличие точечных дефектов приводит к дисперсии продольной упругой волны.

График зависимости (10) определяет дисперсионную кривую на плоскости  $(\omega, k)$ . Эта кривая при малых волновых числах имеет асимптоту  $\omega = k$ , а при больших – асимптотически приближается к прямой  $\omega = k/\sqrt{a}$ .

Фазовая скорость волны определяется по формуле:

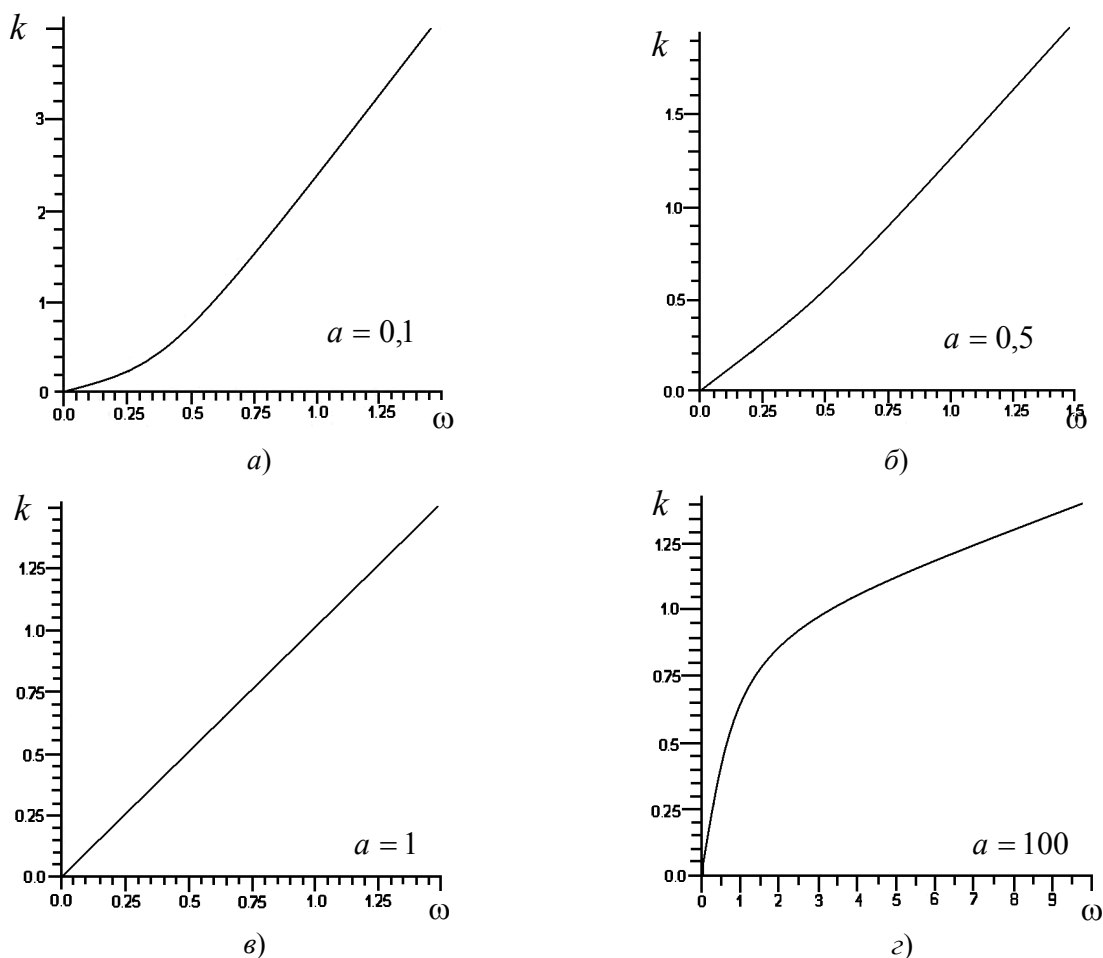
$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{\frac{1 - (1/a)k^2}{1 + k^2}}, \quad (11)$$

а групповая скорость связана с ней соотношением (формула Рэлея):

$$V_{gp} = V_{\phi} + k \frac{dV_{\phi}}{dk}. \quad (12)$$

При  $k \rightarrow 0$  фазовая скорость  $V_{\phi} \rightarrow 1$ , при  $k \rightarrow \infty$   $V_{\phi} \rightarrow 1/\sqrt{a}$ . Если точечными дефектами являются вакансии ( $j = v$ ), то  $\Omega_j < 0$ , следовательно,  $1/\sqrt{a} < 1$  и дисперсия в этом случае является нормальной ( $V_{\phi} > V_{gp}$ ). если же в качестве точечных дефектов выступают межузлия ( $j = v$ ), то  $\Omega_j > 0$ , следовательно,  $1/\sqrt{a} > 1$  и дисперсия становится аномальной ( $V_{\phi} < V_{gp}$ ).

На рис. 1 показаны дисперсионные зависимости для продольной волны, распространяющейся в среде с вакансиями ( $a, \bar{b}$ ), в среде с межузлиями ( $\bar{z}$ ) и в идеально-упругой среде (отсутствие дефектов,  $\bar{v}$ ). Заметим, что при  $b = 0$  затухание волны при ее распространении отсутствует.



**Рис. 1.** Дисперсионные зависимости для продольной волны, распространяющейся в среде с вакансиями ( $a, \bar{b}$ ), в среде с межузлиями ( $\bar{z}$ ) и в идеально-упругой среде (отсутствие дефектов,  $\bar{v}$ )

При  $b \neq 0$ , т.е. при конечных значениях коэффициента диффузии ( $D_j$ ) волновое число при исследовании дисперсионного уравнения (8) представим  $k = k' + ik''$ , где  $k'$  – характеризует постоянную распространения,  $(V_\phi = \omega/k')$  – фазовая скорость волны, а  $k'' = \alpha(\omega)$  характеризует затухание волны.

Частотные зависимости действительной и мнимой частей волнового числа при различных значениях коэффициентов  $a$  и  $b$  приведены на рис. 2.

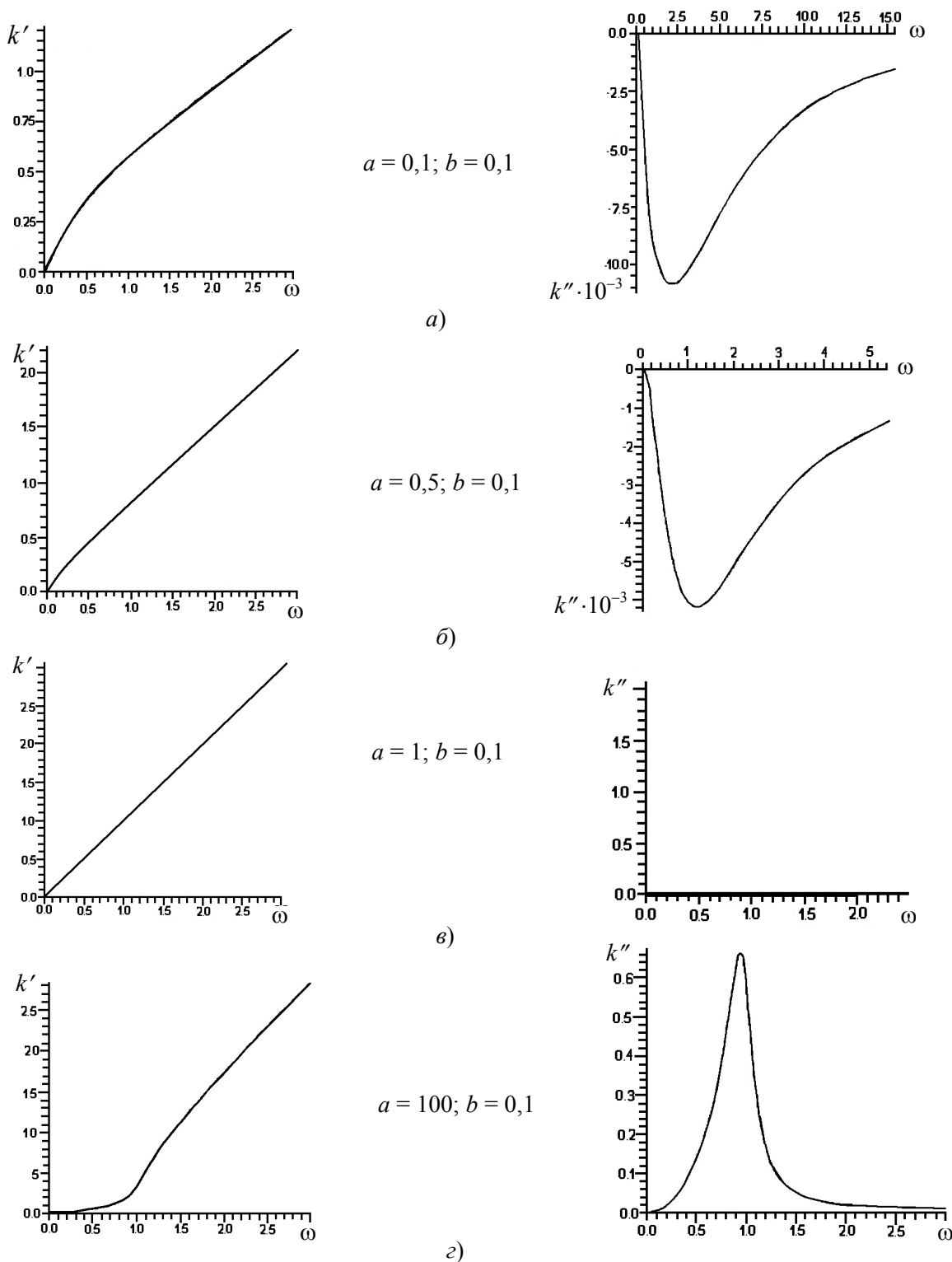


Рис. 2. Частотные зависимости действительной и мнимой частей волнового числа при различных значениях коэффициентов  $a$  и  $b$

Продольная волна в среде с точечными дефектами является диспергирующей и затухающей по мере ее распространения. Затухание имеет, как правило, экстремальный характер.

Вернемся к рассмотрению нелинейного уравнения (5). Будем предполагать, что дисперсия и затухание волны, обусловленные наличием точечных дефектов, и нелинейность материала являются величинами одного порядка малости. Решение уравнения (5) ищем в виде асимптотического разложения перемещения по малому параметру:

$$\tilde{U} = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots \quad (13)$$

Введем при этом новые переменные:

$$\xi = \tilde{x} - c\tilde{t}, \quad \eta = \varepsilon\tilde{x}. \quad (14)$$

Такой выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью  $c$  вдоль оси  $\tilde{x}$ , медленно эволюционирует в пространстве из-за нелинейности, дисперсии и диссипации.

После подстановки (13) и (14) в (5) в нулевом приближении по  $\varepsilon$  получается выражение для скорости  $c = 1$ , что соответствует скорости  $c_l$  в размерных переменных.

Первое приближение по  $\varepsilon$  приводит к эволюционному уравнению относительно осевой деформации  $W = \partial U_0 / \partial \xi$ :

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{(a-1)}{2a} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{b(a-1)}{2\sqrt{a}} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + qW \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad (15)$$

где  $q = \beta_N \sqrt{\beta_j} U_0 / 2\rho \sqrt{D_j} c_l^2 a$ .

Уравнение (15) называется уравнением Кортевега–де Вриза–Бюргерса. Оно имеет решение в виде локализованной волны (кинка):

$$W = A_0 \exp(\xi) \operatorname{sech} h^2 \left( \frac{\xi}{2} \right), \quad (16)$$

где

$$\xi = \frac{2}{\Delta} (\xi - V\eta).$$

Здесь  $A_0$  – амплитуда волны,  $V$  – ее скорость,  $\Delta$  – характерная ширина. Их значения определяются соотношениями:

$$A_0 = \frac{3c_l^2 [-q_\varepsilon (\lambda + 2/3\mu) \Omega_j]}{25\beta_j^2 \sqrt{\beta_j} (-\beta_N) U_0 \sqrt{D_j}} \cdot \left[ 1 - \frac{q_\varepsilon (\lambda + 2/3\mu) \Omega_j}{\beta_j \rho c_l^2} \right], \quad (17)$$

$$V = \left| \frac{3q_\varepsilon (\lambda + 2/3\mu) \Omega_j}{25\beta_j^2 D_j \rho} \right|, \quad \Delta = \frac{10\sqrt{\beta_j D_j}}{c_l \sqrt{1 - q_\varepsilon (\lambda + 2/3\mu) \Omega_j / (\beta_j \rho c_l^2)}}. \quad (18)$$

В соотношениях (17) и (18)

$$\frac{q_\varepsilon (\lambda + 2/3\mu) \Omega_j}{\beta_j \rho c_l^2} < 1,$$

следовательно, для оценок пригодны следующие приближенные формулы:

$$A_0 \approx \frac{-3c_l^2 q_\varepsilon (\lambda + 2/3\mu) \Omega_j}{25\beta_j^2 \sqrt{\beta_j} D_j (-\beta_N) U_0}, \quad \Delta \approx \frac{10\sqrt{\beta_j D_j}}{c_l}. \quad (19)$$

Соотношение (16) описывает волну стационарного профиля. Такие волны формируются за счет совместного баланса между нелинейностью, дисперсией и диссипацией. Следовательно, наличие точечных дефектов в материале оказывает влияние на процесс локализации распространяющейся в нем волны деформации. Если точечными

дефектами служат вакансии ( $j = V$ ), то профиль волны представляет собой перепад («ступеньку») от большего значения к меньшему. Если точечными дефектами служат межузлия ( $j = i$ ), то профиль волны – это перепад от меньшего значения к большему. Для обоих типов дефектов амплитуда волны уменьшается с ростом скорости рекомбинации на стоках как  $A_0 \sim 1/\beta_j^{5/2}$ , ее скорость уменьшается как  $V \sim 1/\beta_j^2$ , а ширина увеличивается как  $\Delta \sim \sqrt{\beta_j}$ .

Аналогично ведут себя параметры волны и с ростом коэффициента диффузии: амплитуда и скорость уменьшаются  $A \sim 1/\sqrt{D_j}$ ,  $V \sim 1/D_j$ , а ширина увеличивается  $\Delta \sim \sqrt{D_j}$ .

*Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-08-90032-Бел).*

### Список литературы

1. Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А. Лазерное управление процессами в твердом теле // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, №1. С. 3-32
2. Мирзоев Ф.Х., Шелепин Л.А. Нелинейные волны деформации и плотности дефектов в металлических пластинах при воздействии внешних потоков энергии // Журнал технической физики. 2001. Т. 71, №8. С. 23-26.

*Поступила: 29.01.13.*