

УДК 536.24

## СТАЦИОНАРНЫЙ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН В СИСТЕМЕ, ОГРАНИЧЕННОЙ МНОГОСЛОЙНЫМ ТЕПЛОПРОВОДНЫМ ЦИЛИНДРОМ

© Валерий Владимирович Рубцов

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский государственный строительный университет”*

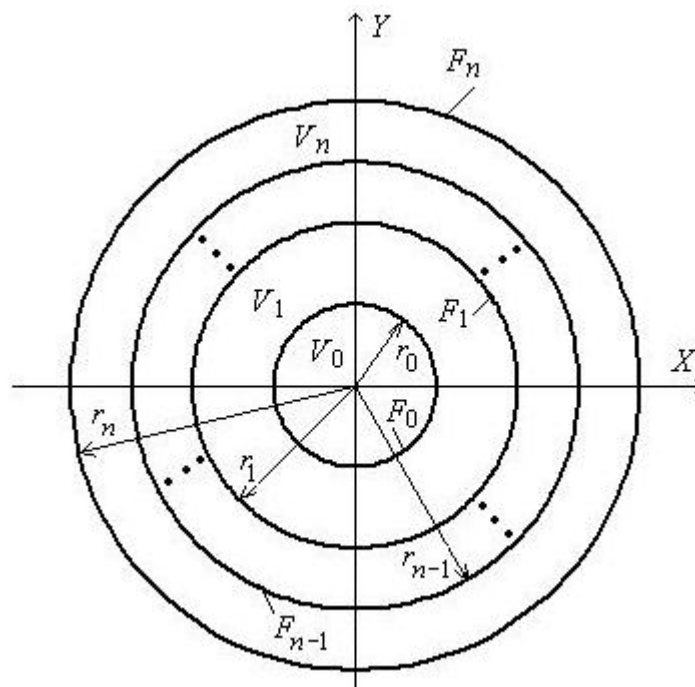
[rubvall@yandex.ru](mailto:rubvall@yandex.ru)

**Аннотация.** В работе дано применение метода последовательных двусторонних приближений к численному моделированию нелинейной стационарной задачи о радиационно-кондуктивном теплообмене в многослойной цилиндрической системе, заполненной поглощающей и изотропно рассеивающей средой.

**Ключевые слова:** радиационно-кондуктивный теплообмен, коэффициент теплопроводности, поглощающая и рассеивающая среда.

**1. Постановка задач.** Рассматриваются две постановки задачи, различающиеся между собой типами граничных условий, заданных на внешней границе системы.

**1.1. Первая постановка задачи.** Пусть имеется теплопроводный цилиндр бесконечной длины без источников (стоков) тепла, ограниченный поверхностями  $F_0, F_n$  и состоящий из  $n$  слоев  $V_i$ :  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$  (рис.1).



**Рис.1.** Схема излучающей системы

Примем, что контакт между слоями  $V_i$  и  $V_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях  $F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , двух слоев одинакова. Заданы коэффициенты теплопроводности  $\lambda_i(M_i)$  слоев  $V_i$ ,  $M_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , которые зависят лишь от

расстояния точки  $M_i$  до оси цилиндра  $V$ . Поверхность  $F_0$  примем серой, диффузно излучающей и отражающей с коэффициентом поглощения  $A_0$ . Поверхность  $F_n$  положим изотермической с заданной температурой  $T_{F_n}$  (граничное условие первого рода). Обозначим через  $V_0$  пространство, ограниченное поверхностью  $F_0$ , заполненное однородной изотермической средой с температурой  $T_0$  и с заданными коэффициентами объемного поглощения  $\alpha$  и рассеяния  $\beta$  [1].

Требуется определить поля температур  $T_i(M_i)$  в цилиндрических слоях  $V_i$ ,  $M_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие неравенствам [2]

$$0 < m_* \leq T_i(M_i) \leq m^*, M_i \in V_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где

$$m_* = \min(T_0, T_{F_n}), \quad m^* = \max(T_0, T_{F_n}).$$

Кроме того, требуется найти распределение значений плотности результирующего излучения  $\eta_{рез}(P_0)$  в поглощающей и рассеивающей среде, заполняющей пространство  $V_0$ ,  $P_0 \in V_0$ .

Математическая постановка данной задачи в цилиндрической системе координат формулируется следующим образом:

- найти функции  $T_i(r)$ , определенные при  $r_{i-1} \leq r \leq r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \lambda_i(r) r \frac{dT_i(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_{i-1} < r < r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

граничным условиям

$$T_i(r_i) = T_{i+1}(r_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3)$$

$$T_n(r_n) = T_{F_n}, \quad (4)$$

$$\lambda_i(r_i) \frac{dT_i(r_i)}{dr} = \lambda_{i+1}(r_i) \frac{dT_{i+1}(r_i)}{dr}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5)$$

$$-\lambda_1(r_0) \frac{dT_1(r_0)}{dr} = E_{рез.0} = A_0 \sigma_0 \left[ T_1^4(r_0) - T_0^4 \right] (\bar{\Pi}_{0,0} - 1), \quad (6)$$

и неравенствам

$$0 < m_* \leq T_i(r) \leq m^*, \quad r_{i-1} \leq r \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (7)$$

- определить  $\eta_{рез.}(r)$  на основании соотношения [3]

$$\eta_{рез.}(r) = 4\alpha\sigma_0 \left[ T_1^4(r_0) - T_0^4 \right] \bar{\Pi}^{(1)}(r, F_0), \quad 0 \leq r < r_0. \quad (8)$$

Здесь  $E_{рез.0}$  – поверхностная плотность результирующего излучения;  $\sigma_0$  – постоянная Стефана – Больцмана;  $\bar{\Pi}_{0,0}$  – вероятность перехода излучения от произвольной единичной площадки на поверхности  $F_0$  и поглощения его этой поверхностью [4];  $\bar{\Pi}^{(1)}(r, F_0)$  – вероятность перехода излучения от единичного элемента объема в точке с координатой  $r$  и его поглощения поверхностью  $F_0$  [4]. Вероятности  $\bar{\Pi}_{0,0}$  и  $\bar{\Pi}^{(1)}(r, F_0)$  находятся с помощью обобщенного зонального метода [3] с использованием расчетных формул и выражений, полученных в [2].

Задачу (2) – (8) удобно представить в безразмерном виде

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( v_i(\xi) \xi \frac{d\theta_i(\xi)}{d\xi} \right) = 0, \quad \xi_{i-1} < \xi < \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$\theta_i(\xi_i) = \theta_{i+1}(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (10)$$

$$\theta_n(\xi_n) = \theta_n(1) = \theta_{F_n}, \quad (11)$$

$$v_i(\xi_i) \frac{d\theta_i(\xi_i)}{d\xi} = v_{i+1}(\xi_i) \frac{d\theta_{i+1}(\xi_i)}{d\xi}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (12)$$

$$-v_1(\xi_0) \frac{d\theta_1(\xi_0)}{d\xi} = N_0 \left[ \theta_1^4(\xi_0) - \theta_0^4 \right] (\bar{\Pi}_{0,0} - 1), \quad (13)$$

$$0 < m \leq \theta_i(\xi) \leq 1, \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

$$q_{\text{рез}}(\xi) = \left[ \theta_1^4(\xi_0) - \theta_0^4 \right] \bar{\Pi}^{(1)}(\xi, F_0), \quad 0 \leq \xi < \xi_0, \quad (15)$$

где

$$\theta = \frac{T}{m^*}, \quad v_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1(\xi_0)}, \quad \xi = \frac{r}{r_n}, \quad m = \frac{m_*}{m^*}, \quad N_0 = \frac{A_0 \sigma_0 m^{*3} r_n}{\lambda_1(\xi_0)}, \quad q_{\text{рез}} = \frac{\eta_{\text{рез}}}{4\alpha \sigma_0 m^{*4}}.$$

**1.2. Вторая постановка задачи.** Данная постановка характеризуется заданием на поверхности  $F_n$  граничного условия третьего рода, а именно, предположим, что между поверхностью  $F_n$  и окружающей чисто поглощающей средой с температурой  $T_s$  происходит радиационный теплообмен. В этом случае математическая постановка задачи отыскания стационарных распределений температур в цилиндрических слоях  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , приводится к решению дифференциальных уравнений (9) при граничном условии

$$v_n(1) \frac{d\theta_n(1)}{d\xi} = N_n \left[ \theta_s^4 - \theta_n^4(1) \right], \quad (16)$$

граничных условиях (10) – (13) и ограничениях (14).

*Замечание.* Следует отметить, что стационарная задача теплопередачи через многослойную цилиндрическую стенку с линейными граничными условиями рассматривалась в [5].

**2. Решение задач.** Для решения сформулированных нелинейных краевых задач воспользуемся методом последовательных двусторонних приближений [2, 6]. В результате приходим к следующим расчетным выражениям

$$\theta_i^{(k)}(\xi) = a_1^{(k)} D_i(\xi) + b_1^{(k)}, \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где

$$a_1^{(k)} = \frac{4N_0 \theta_{F_n} - f_0(\theta_1^{(k-1)})}{\frac{1}{\xi_0} + 4N_0 D_n(1)}, \quad (18)$$

$$b_1^{(k)} = \frac{D_n(1) f_0(\theta_1^{(k-1)}) + \frac{1}{\xi_0} \theta_{F_n}}{\frac{1}{\xi_0} + 4N_0 D_n(1)}, \quad (19)$$

- для первой постановки задачи;

$$a_1^{(k)} = \frac{N_0 f_n(\theta_n^{(k-1)}) - N_n f_0(\theta_1^{(k-1)})}{N_0 + \frac{N_n}{\xi_0} + 4N_0 N_n D_n(1)}, \quad (20)$$

$$b_1^{(k)} = \frac{[1 + 4N_n D_n(1)] f_0(\theta_1^{(k-1)}) + \frac{1}{\xi_0} f_n(\theta_n^{(k-1)})}{4 \left( N_0 + \frac{N_n}{\xi_0} \right) + 16 N_0 N_n D_n(1)}, \quad (21)$$

- для второй постановки задачи.

Содержащиеся в формулах (17) – (21) величины определяются на основании соотношений

$$f_0(\theta_1^{(k-1)}) = N_0 \left\{ \left[ \theta_1^{(k-1)4}(\xi_0) - \theta_0^4 \right] (\Pi_{0,0} - 1) + 4\theta_1^{(k-1)}(\xi_0) \right\}, \quad (22)$$

$$f_n(\theta_n^{(k-1)}) = N_n \left[ \theta_s^4 - \theta_n^{(k-1)4}(1) + 4\theta_n^{(k-1)}(1) \right], \quad (23)$$

$$D_1(\xi) = \varphi_1(\xi), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1, \quad (24)$$

$$D_i(\xi) = \varphi_i(\xi) + \sum_{l=1}^{i-1} \varphi_l(\xi_l), \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 2, \dots, n, \quad (25)$$

$$\varphi_i(\xi) = \int_{\xi_{i-1}}^{\xi} \frac{dz}{z v_i(z)}, \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

С помощью полученных расчетных выражений находим неубывающие  $\theta_{i*}^{(0)}(\xi) = m$ ,  $\theta_{i*}^{(k)}(\xi)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и невозрастающие  $\theta_i^{*(0)}(\xi) = 1$ ,  $\theta_i^{*(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , последовательности приближений, сходящиеся к единственному решению  $\theta_i(\xi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , рассматриваемых краевых задач [2, 6]. Далее приближенно принимаем

$$\theta_i(\xi) \approx \frac{1}{2} \left[ \theta_{i*}^{(k)}(\xi) + \theta_i^{*(k)}(\xi) \right], \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

где  $\theta_{i*}^{(k)}(\xi)$  и  $\theta_i^{*(k)}(\xi)$  выбираем из условия

$$\left[ \theta_i^{*(k)}(\xi) - \theta_{i*}^{(k)}(\xi) \right] < \varepsilon, \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

при заданном достаточно малом числе  $\varepsilon > 0$ .

**3. Численные исследования.** Пусть коэффициенты теплопроводности  $v_i(\xi)$  задаются выражениями  $v_i(\xi) = \sigma_i \xi^2 + \gamma_i \xi + \omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим три случая: 1) функции  $v_i(\xi)$  не зависят от координаты  $\xi$ , т.е.  $\sigma_i = \gamma_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; 2)  $v_i(\xi)$  являются линейными функциями  $\xi$ , т.е.  $\sigma_i = 0$ ,  $\gamma_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; 3)  $v_i(\xi)$  являются квадратичными функциями  $\xi$ , т.е.  $\sigma_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Тогда величины  $\varphi_i(\xi)$ , определяемые формулой (26), соответственно будут иметь вид:

$$1) \varphi_i(\xi) = \frac{1}{\omega_i} \ln \frac{\xi}{\xi_{i-1}}; \quad (29)$$

2) если  $\omega_i = 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{1}{\gamma_i} \left( \frac{1}{\xi_{i-1}} - \frac{1}{\xi} \right); \quad (30)$$

если  $\omega_i \neq 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{1}{\omega_i} \ln \frac{(\gamma_i \xi_{i-1} + \omega_i) \xi}{(\gamma_i \xi + \omega_i) \xi_{i-1}}; \quad (31)$$

3) если  $\gamma_i = \omega_i = 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{1}{2\sigma_i} \left( \frac{1}{\xi_{i-1}^2} - \frac{1}{\xi^2} \right); \quad (32)$$

если  $\gamma_i \neq 0$ ,  $d_i = \gamma_i^2 - 4\sigma_i\omega_i = 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{4\sigma_i}{\gamma_i^2} \ln \frac{\xi(2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i)}{(2\sigma_i\xi + \gamma_i)\xi_{i-1}} + \frac{8\sigma_i^2(\xi_{i-1} - \xi)}{\gamma_i(2\sigma_i\xi + \gamma_i)(2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i)}; \quad (33)$$

если  $d_i > 0$ ,  $\omega_i = 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{\sigma_i}{\gamma_i^2} \ln \frac{\xi_{i-1}}{\xi} + \frac{1}{\gamma_i} \left( \frac{1}{\xi_{i-1}} - \frac{1}{\xi} \right) + \frac{\sigma_i}{\gamma_i^2} \ln \frac{\sigma_i\xi + \gamma_i}{\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i}; \quad (34)$$

если  $d_i > 0$ ,  $\omega_i \neq 0$ , то

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi) = \frac{1}{\omega_i} \ln \frac{\xi}{\xi_{i-1}} + \frac{2\sigma_i}{\sqrt{d_i}(\sqrt{d_i} - \gamma_i)} \ln \frac{2\sigma_i\xi + \gamma_i - \sqrt{d_i}}{2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i - \sqrt{d_i}} + \\ + \frac{2\sigma_i}{\sqrt{d_i}(\sqrt{d_i} + \gamma_i)} \ln \frac{2\sigma_i\xi + \gamma_i + \sqrt{d_i}}{2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i + \sqrt{d_i}}; \end{aligned} \quad (35)$$

если  $d_i < 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{1}{\omega_i} \left[ \ln \frac{\xi}{\xi_{i-1}} - \ln \sqrt{\frac{\sigma_i\xi^2 + \gamma_i\xi + \omega_i}{\sigma_i\xi_{i-1}^2 + \gamma_i\xi_{i-1} + \omega_i}} - \frac{\gamma_i}{\sqrt{-d_i}} \left( \arctg \frac{2\sigma_i\xi + \gamma_i}{\sqrt{-d_i}} - \arctg \frac{2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i}{\sqrt{-d_i}} \right) \right]. \quad (36)$$

На основании полученных расчетных формул и выражений были выполнены численные исследования стационарных распределений температур в трехслойном цилиндре  $V$ , а также распределение значений плотности объемного результирующего излучения в ослабляющей среде, заполняющей пространство  $V_0$ . При проведении расчетов полагали:  $\xi_0 = 0.6$ ,  $\xi_1 = 0.8$ ,  $\xi_2 = 0.9$ ,  $\xi_3 = 1$ ,  $m = 0.5$ ,  $A_0 = 0.7$ ,  $N_n = 1$ ,  $\varepsilon = 0.001$ . Кроме того, число Бугера  $Bu = (\alpha + \beta)r_n$ , характеризующее оптическую плотность ослабляющей среды, заполняющей пространство  $V_0$ , принимали равным 1, а параметр  $p = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$  задавали равным 0.5. Результаты расчетов, полученные с использованием многофункциональной вычислительной системы Mathcad [7], представлены в виде соответствующих графических зависимостей на рис.2 и 3.

На рис.2 изображены графические зависимости температур  $\theta_i(\xi)$  слоев  $V_i$ ,  $i=1,2,3$ , от координаты точки  $\xi$ , а на рис.3 изображены графики зависимости от координаты  $\xi$  плотности объемного результирующего излучения  $q_{рез}(\xi)$ . Представленные на рис.2 и 3 кривые 1 – 4 относятся к первой постановке задачи, а кривые 5 – 8 – ко второй постановке задачи. Зависимости 1 – 4 получены для значений  $\theta_0 = 0.5$ ,  $\theta_n = 1$ , а зависимости 5 – 8 – для значений  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_s = 0.5$ . При этом кривые 1 – 3 и 5 – 7 соответствуют значению  $N_0 = 1$ , а кривые 4, 8 – значению  $N_0 = 10$ . Графики 1, 5 получены для постоянных коэффициентов теплопроводности  $\nu_i(\xi)$ ,  $i=1,2,3$ , и соответствуют значениям:  $\sigma_1 = \gamma_1 = 0$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = \gamma_2 = 0$ ,  $\omega_2 = 0.1$ ,  $\sigma_3 = \gamma_3 = 0$ ,  $\omega_3 = 0.5$ . Графики 2, 6 получены для линейных коэффициентов теплопро-

водности  $\nu_i(\xi)$ ,  $i=1,2,3$ , и соответствуют значениям:  $\sigma_1=0$ ,  $\gamma_1=1$ ,  $\omega_1=0.4$ ;  $\sigma_2=0$ ,  $\gamma_2=-0.5$ ,  $\omega_2=0.6$ ;  $\sigma_3=0$ ,  $\gamma_3=2$ ,  $\omega_3=-0.8$ . Графики 3, 4 и 7, 8 получены для квадратичных коэффициентов теплопроводности  $\nu_i(\xi)$ ,  $i=1,2,3$ , и соответствуют значениям:  $\sigma_1=1$ ,  $\gamma_1=-0.6$ ,  $\omega_1=1$ ;  $\sigma_2=0.1$ ,  $\gamma_2=-0.5$ ,  $\omega_2=0.6$ ;  $\sigma_3=1$ ,  $\gamma_3=1.5$ ,  $\omega_3=0.8$ .

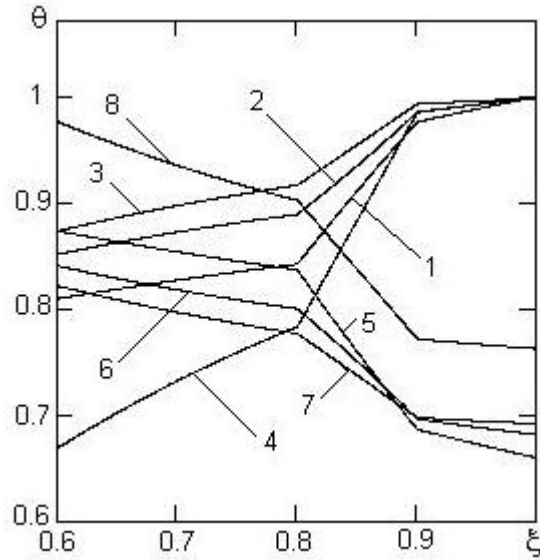


Рис.2. Распределения температур в трехслойном цилиндре

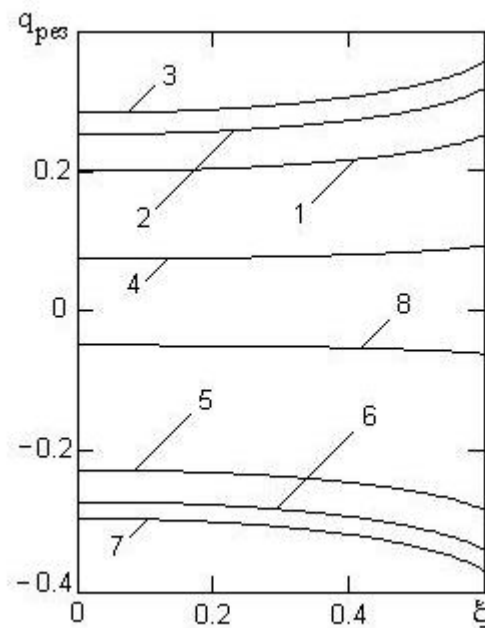


Рис.3. Распределения значений плотности объемного результирующего излучения

Численные исследования, в частности, показали, что для рассмотренных вариантов исходных данных требуется от 8 до 23 итераций для достижения заданной точности расчетов  $\varepsilon = 0.001$ .

**Выводы.** В работе численно решена нелинейная стационарная задача о радиационно-кондуктивном теплообмене в многослойной цилиндрической системе, заполненной поглощающей и изотропно рассеивающей средой с заданной температурой. Рассмотрены две постановки задачи, различающиеся между собой типами граничных условий, заданных на внешней границе системы. Решение получено с помощью обобщенного зонального метода и метода последовательных двусторонних приближений.

На основании приведенных расчетных формул и выражений выполнены численные исследования стационарных полей температур в трехслойном цилиндре и поля значений плотности объемного результирующего излучения в ослабляющей среде, заполняющей излучающую систему. Результаты исследований представлены в виде соответствующих графических зависимостей.

Содержание статьи может быть использовано для разработки научно-обоснованных методов проектирования и расчета теплотехнических устройств различного назначения, а также в образовательных целях.

### Список литературы

1. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир. 1975. 934 с
2. Рубцов В.В. Расчет радиационно-кондуктивного теплообмена в системе из двух теплопроводных коаксиальных цилиндров бесконечной длины, разделенных излучающей средой // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2008. №11. С.48 – 52.
3. Суринов Ю.А. Обобщенный зональный метод исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1975. №4. С.112 – 137.
4. Суринов Ю.А. О некоторых вопросах стохастической теории переноса излучения и радиационного теплообмена // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 1992. №5. С.76 – 81.
5. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия. 1975. 488 с.
6. Рубцов В.В., Суринов Ю.А. О методах решения нестационарных задач теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1989. Т.29. №11. С.1705 – 1713.
7. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Mathcad 12. М.: НТ Пресс. 2005. 352 с.

*Поступила: 11.02.13.*