

УДК 621.01: 534.1

К ПРОБЛЕМЕ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Санкт - Петербургский государственный университет технологии и дизайна

Санкт-Петербург, Россия

vujo@rambler.ru

Аннотация. Исследуются некоторые динамические эффекты в колебательных системах с медленно меняющимися параметрами. Установлено, что нестационарность связей, свойственная приводам машин с цикловыми механизмами, во многих случаях является источником энергетической «подпитки» возбуждаемых колебательных процессов, а также приводит к нежелательному перераспределению энергии между подсистемами и формами колебаний. Приводятся условия, подавляющие рост виброактивности, и инженерные рекомендации.

Ключевые слова: Энергия, колебания, нестационарные связи, цикловой механизм, системы с медленно меняющимися параметрами.

1. Введение. Эффекты, сопутствующие переносу энергии, широко используются при проектировании современных машин и механизмов. Одним из широко известных и наглядных примеров подобных эффектов является динамическое гашение, когда при соответствующей настройке реакция со стороны гасителя на основную массу на заданном установленном режиме равна по величине вынуждающей силе, но противоположна ей по направлению. При этом энергия внешнего источника целенаправленно переносится от объекта виброзащиты на динамический гаситель. Аналогичный результат наблюдается при динамической разгрузке привода цикловых механизмов, когда происходит энергетический обмен между исполнительным органом и динамическим разгрузателем [1,2]. Однако эффекты, связанные с переносом энергии, не всегда носят позитивный характер. Как будет показано ниже, нестационарность связей, свойственная приводам машин с цикловыми механизмами, во многих случаях является источником энергетической «подпитки» колебаний, а также приводит к нежелательному перераспределению энергии и концентрации колебаний с высокими амплитудным уровнем в определённых узлах, звеньях, сечениях и т.п. В подобных случаях даже возможны локальные нарушения условий динамической устойчивости, когда на ограниченных отрезках времени происходит интенсивный рост амплитуд колебаний [1, 2].

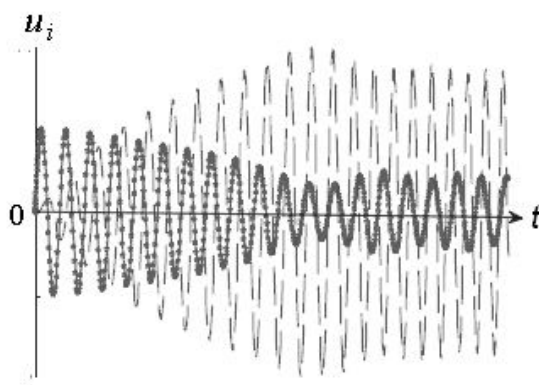


Рис.1. Эффект переноса колебаний в механическом аналоге туннелирования Ландау–Зинера

Отметим, что рассматриваемая проблема носит достаточно общий характер и встречается в различных разделах физики. В частности, в квантовой механике известно так называемое туннелирование Ландау–Зинера, при котором при внешнем возмущении в системе происходит энергетический обмен между двумя уровнями [3, 4]. В работе [4] был предложен механический аналог туннелирования, представляющий собой систему двух слабо связанных маятников, в которой парциальная частота одного из них медленно изменяется во времени и перекрывает зону внутреннего резонанса. При этом, если переход энергии от одного осциллятора к другому оказывается необратимым, то возникает своеобразная ловушка для «захвата» колебательной энергии.

Такой эффект на рис.1 иллюстрируется приведёнными в работе [3] графиками переноса колебаний u_i из подсистемы первого осциллятора (сплошная линия) в подсистему второго (штриховая линия). Исходная энергия обусловлена начальными условиями, заданными на первом осцилляторе. Отметим, что даже при исключении влияния диссипации данная система не является автономной, поскольку имеется внешний источник энергии, реализующий нестационарную связь между осцилляторами. Поэтому в процессе колебаний происходит не только «внутренний» обмен энергией между отдельными подсистемами и формами колебаний, но и энергетическое взаимодействие с внешним источником. Такая ситуация, в частности, возникает при параметрическом резонансе при определенной частотной настройке. В данной статье на примере цикловых механизмов выявляются особенности данного класса систем при медленно меняющихся параметрах.

Непосредственно к рассматриваемому классу задач относится пространственная локализация в колебательных цепочках [5 – 7]. При этом в определённых сечениях нарушается строгая динамическая регулярность системы из-за так называемых «включений», с которыми обычно связано возникновение чётко выраженных экстремумов в формах колебаний. Классическая модель в работе [6] конкретизирована на примере колебаний струны, а также балок Бернулли-Эйлера и Тимошенко с сосредоточенными включениями.

Подобные эффекты наблюдаются также при анализе динамики машин и автоматических линий с повторяющимися секциями (модулями). В частности, устранение пространственной локализации необходимо при проектировании машин с повышенной протяжённостью зоны технологической обработки изделия, когда колебания длинных рабочих органов должны быть близки к синфазным [8, 9]. Нарушение этого требования приводит к появлению помимо нежелательных динамических эффектов к разного рода дефектам выпускаемой продукции. Одна из важных особенностей регулярных колебательных систем машинных агрегатов также обусловлена переменностью «собственных» частот и нестационарностью динамических связей, оказывающих существенное влияние на уровень возбуждаемых колебаний.

2. Цикловые системы с медленно меняющимися параметрами. В цикловых механизмах при переходе от входных звеньев к выходным происходит трансформация координат согласно нелинейной функции положения Π , реализующей заданное программное движение исполнительных органов. Обратимся к динамической модели циклового механизма с упругим приводом при последовательном соединении элементов $J_0 - c_1 - J_1 - \Pi - c_2 - J_2$ (рис.2). Примем следующие условные обозначения: $\varphi_0 = \omega_0 t$ – идеальная координата J_0 при $\omega_0 = \text{const}$; J_i – моменты инерции; c_i – коэффициенты жёсткости; Ψ_i – коэффициенты рассеяния; $\varphi_1 = \varphi_0 + q_1$; $\varphi_2 = \Pi(\varphi_0) + q_2$, где φ_i – абсолютные угловые координаты соответствующих инерционных элементов; q_i – обобщённые координаты, равные абсолютным динамическим ошибкам, т.е. отклонениям от заданного программного движения; Q_i – обобщённые силы.

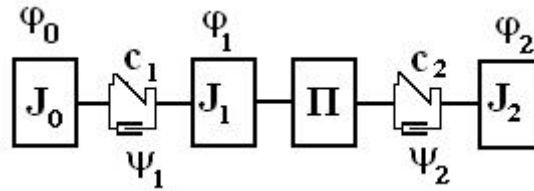


Рис. 2. Динамическая модель циклового механизма с переменными параметрами

Полагая функцию $\Pi(\varphi_1)$ непрерывной и дифференцируемой, произведём линеаризацию этой функции и её производной в окрестности программного движения [1,2]:

$$\Pi(\varphi_0 + q_1) = \Pi_* + \Pi'_* q_1; \quad \Pi'(\varphi_0 + q_1) = \Pi'_* + \Pi''_* q_1. \quad (1)$$

Здесь звёздочка отвечает аргументу $\varphi_0 = \omega_0 t$.

Согласно (1) данной модели после линеаризации в окрестности программного движения соответствует система дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + k_1(2\delta_1 \dot{q}_1 + k_1 q_1) + \mu k_2 \Pi'_*[2\delta_2(\Pi'_* \dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k_2(\mu \Pi'_* q_1 - q_2)] &= W_1(t); \\ \ddot{q}_2 + k_2[2\delta_2(\dot{q}_2 - \Pi'_* \dot{q}_1) + k_2(q_2 - \Pi'_* q_1)] &= W_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $k_i = \sqrt{c_i / J_i}$; $\mu = \sqrt{J_2 / J_1}$; $\delta_i = \psi_i / (4\pi)$ ($i = 1, 2$); ψ_i – коэффициент рассеяния; $\Pi'_* = d\Pi / d\varphi$ при $\varphi = \varphi_0 = \omega_0 t$; $W_i(t)$ – внешнее возмущение.

При отсутствии специальных демпфирующих устройств диссипативные и гироскопические члены, пропорциональные \dot{q}_i , обычно пренебрежимо мало влияют на «собственные» частоты p_i , но в то же время оказывают существенное влияние на амплитуды колебаний. Тогда, при дискретно заданных параметрах после линеаризации в окрестности программного движения частотный и модальный анализ может быть проведён на базе системы однородных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{a}(t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(t)\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где $\mathbf{a}(t), \mathbf{c}(t)$ – квадратные матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов; \mathbf{q} – вектор-функция обобщённых координат.

Как показано в работе [10] при медленном изменении параметров с точностью до величин первого порядка малости кинетическая и потенциальная энергия определяются зависимостями $T = 0,5 \sum_{r=1}^H a_r^* \dot{\eta}_r^2$; $V = 0,5 \sum_{r=1}^H c_r^* \eta_r^2$, где η_r – квазинормальные координаты; H – число степеней свободы колебательной системы. При этом переменные «собственные» частоты в первом приближении могут быть определены на базе формального частотного уравнения, в котором время играет роль параметра:

$$\det(c_{ij}(t) - a_{ij} p(t)^2) = 0. \quad (4)$$

В квазинормальных координатах система уравнений принимает вид

$$a_r^*(t)\ddot{\eta}_r + [b_r(t) + \dot{a}_r^*(t)]\dot{\eta}_r + c_r^*(t)\eta_r = M_r(t), \quad (r = \overline{1, H}) \quad (5)$$

Здесь $M_r(t) = \sum_{i=1}^H \alpha_{ir} Q_{ir}^*$; Q_{ir}^* – неконсервативная обобщённая сила от внешних нагрузок и кинематического возбуждения; $b_r(t)$ – коэффициент эквивалентного линейного сопротивления, приведенного к форме r ; $a_r^* = \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H \alpha_{ir} \alpha_{jr} a_{ij}$; $c_r^* = \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H \alpha_{ir} \alpha_{jr} c_{ij}$, где α_{ij} – нестационарные коэффициенты формы.

В матричном виде имеем

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} \mathbf{a} = \text{diag} \{ a_1^*, \dots, a_H^* \}; \quad \mathbf{a}^T \mathbf{c} \mathbf{a} = \text{diag} \{ c_1^*, \dots, c_H^* \}. \quad (6)$$

После возвращения к исходным координатам $\mathbf{q} = \mathbf{a}(t)\boldsymbol{\eta}$.

При приведенном способе определения квазинормальных координат формы колебаний исходя из физических предпосылок принимаются как медленно меняющиеся функции; в остальном их определение не отличается от аналогичной процедуры при постоянных параметрах. Отметим лишь, что в отличие от традиционной индексации частот, когда большему индексу соответствует более высокая частота, здесь предпочтительна индексация, при которой $k_r = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} p_r$. Тогда на выстое выходного звена, когда система вырождается в два несвязанных колебательных контура, частота p_r равна парциальной частоте с тем же индексом.

Приведём уравнения (5) к виду

$$\ddot{\eta}_r + 2n_r(t)\dot{\eta}_r + p_r^2(t)\eta_r = W_r(t) \quad (r=1, 2), \quad (7)$$

где $n_r(t) = 0,5\dot{a}_r(t)/a_r(t) + \delta_r p_r(t)$; $p_r(t) = \sqrt{c_r(t)/a_r(t)}$; $W_r(t) = M_r(t)/a_r(t)$.

Воспользуемся методом условного осциллятора, который при медленно меняющейся функции положения приводит к решению на уровне ВКБ-приближения первого порядка [1,2]. Тогда

$$\eta_r = A_{r0} \exp\left[-\int_0^t n_r(\tau) d\tau\right] \sqrt{k_r / p_r(\tau)} \cos\left[\int_0^t p_r(\tau) d\tau + \alpha_r\right] + Y_r(t), \quad (8)$$

где A_{r0}, α_r – определяются начальными условиями, а частное решение $Y_r(t)$ может быть представлено как [1, 2]

$$Y_r(t) = \frac{1}{\sqrt{p_r(t)}} \int_0^t \frac{W_r(u)}{\sqrt{p_r(u)}} \exp\left[-\int_u^t n_r(\xi) d\xi\right] \left[\sin \int_u^t p_r(\xi) d\xi\right] du. \quad (9)$$

При $p_r = \text{const}$ зависимость (9) совпадает с формулой Дюамеля.

В рассматриваемой колебательной системе помимо энергетических потерь, возникающих при преодолении диссипативных сил, происходит обмен энергией с внешним источником энергии. Остановимся на анализе свободных колебаний ($Y_r(t) \equiv 0$). В практике динамического расчёта технологических машин свободные колебания чаще всего представляют интерес с позиций частотного анализа, являющегося важным этапом определения вынужденных колебаний. При этом обычно принимается во внимание, что свободные колебания, возникающие за счёт энергии, внесённой в систему в начальный момент времени, достаточно быстро затухают и практически не оказывают влияния на установившиеся колебательные режимы. Между тем виброактивность цикловых технологических машин в основном определяется уровнем так называемых свободных сопровождающих колебаний [1,2,5,6], которые при сложных законах движения, зазорах и других возмущениях импульсного характера не только затухают, но и периодически возбуждаются. Строго говоря, эти колебания следует также отнести к вынужденным колебаниям, однако по частотному спектру, удалённости от резонансов и методике анализа их удобнее рассматривать как свободные колебания, возникающие при $t = t_i > 0$. При этом соответствующие «начальные» условия определяются при представлении частного решения уравнения (9) в виде быстро сходящегося ряда по производным функции возмущения $W_r(t)$ [1, 2].

Можно показать, что свободные колебания системы при любом t будут убывающими, если $n_r + \dot{p}_r / (2p_r) > 0$ [1,2]. Это неравенство является достаточным условием динамической устойчивости этой формы колебаний на произвольном отрезке кинематического цикла.

3. Некоторые динамические эффекты, обусловленные переносом энергии. Для конкретизации исследуемых эффектов воспользуемся приведённой выше динамической моделью, описанной системой уравнений (2). При этом целесообразно перейти к «безразмерному времени», в качестве которого примем $\varphi_0 = \omega_0 t$. Пусть закон движения выходного звена описывается гармонической функцией вида $\Pi(\varphi) = r_0(1 - \cos \varphi)$. На рис. 3 приведены графики нормированных переменных частот $p_r(\varphi_0)$ при $k_1 = 10, k_2 = 32$ (пунктирная линия) и $k_1 = k_2 = 32$ (сплошная линия).

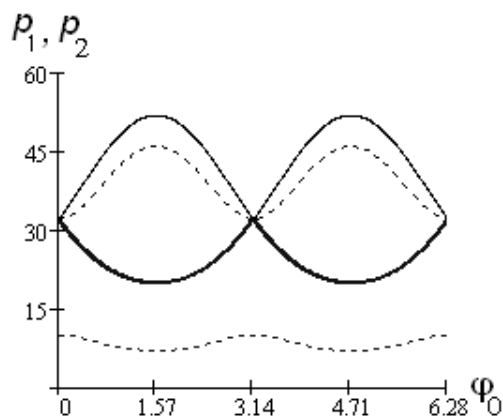


Рис.3. Графики «собственных» частот

Пусть при $\varphi_0 = 0$ подсистема выходного звена получает импульсное возмущение ($\dot{q}_2(0) \neq 0$). На рис.4, для ряда режимов приведены графики $q_1(t)$ (сплошная линия) и $q_2(t)$ (пунктирная линия), а также соответствующие фазовые портреты, полученные при компьютерном моделировании системы уравнений (2). Для большей наглядности графиков диссипативные члены и внешнее возбуждение в системе (2) опущены. При $\Pi'(0) = 0$ подсистемы между собой не связаны, поэтому исходный запас энергии полностью «принадлежит» подсистеме 2 (координата q_2). При $\Pi'(\varphi) \neq 0$ энергия перераспределяется между обеими подсистемами. При режиме 1 чётко виден рост колебаний на входном звене (кривая 1) по мере уменьшения амплитуд в подсистеме выходного звена (кривая 2); при этом доминируют колебания, по частоте близкие к парциальной частоте k_2 .

В отличие от этого режима при обратном соотношении парциальных частот (режим 2) доминируют низкочастотные колебания, причём перенос колебаний из второй подсистемы в первую практически отсутствует. При равенстве парциальных частот (режим 3), интенсивное возбуждение подсистемы входного звена наблюдается уже при очень малых значениях Π' . Отметим, что при близких парциальных частотах появляются зоны с повышенной плотностью частного спектра, в которых интенсивность энергетического обмена между формами колебаний резко возрастает. Для фиксированного значения $f = \mu\Pi' < 1$ частоты наиболее близки при $\kappa = k_2/k_1 = \sqrt{1-f^2}/(1+f^2)$. При этом значении f

$$p_2/p_1 = \sqrt{(1-f)/(1+f)}.$$

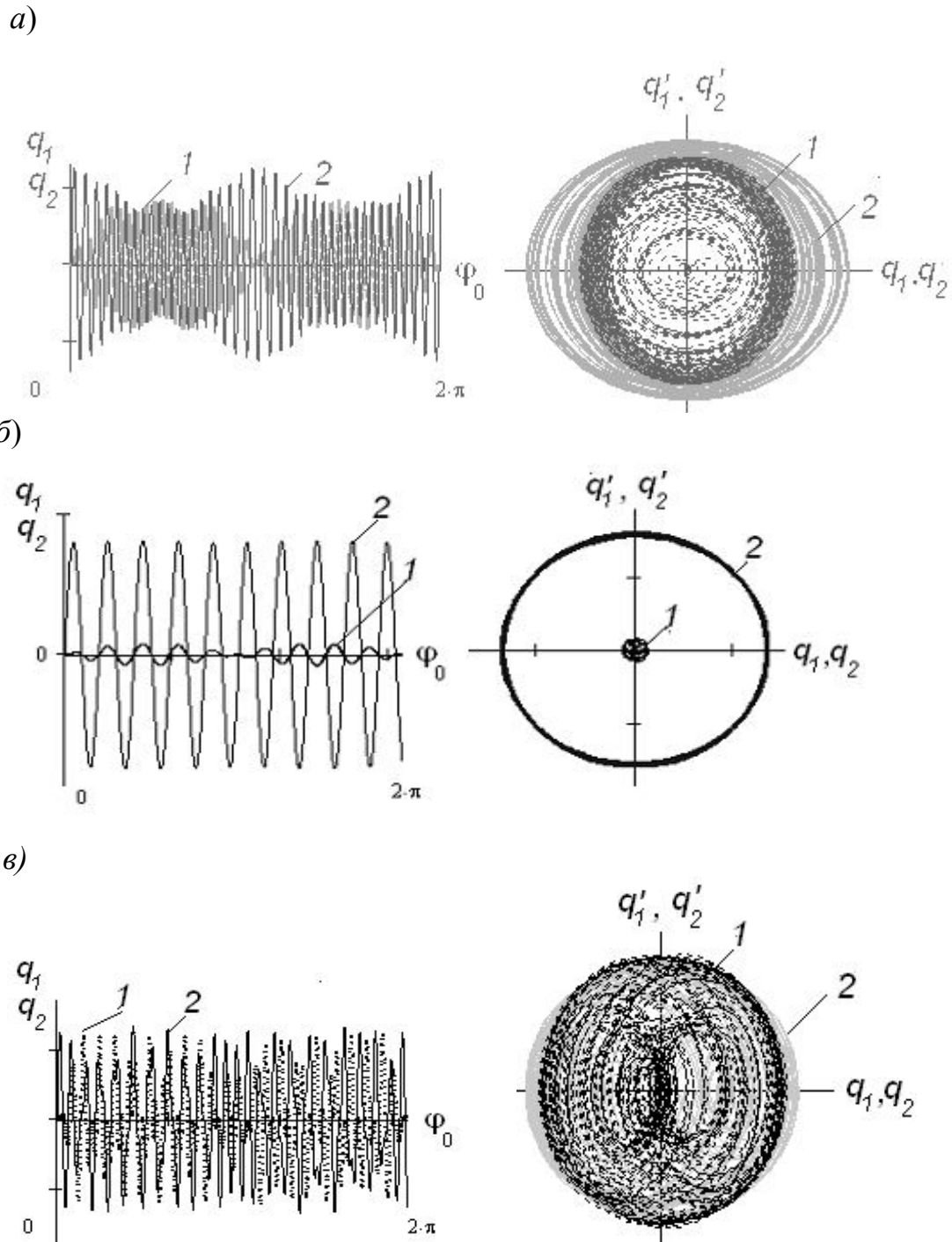


Рис.4. К анализу переноса колебаний: а – режим 1, $k_1 = 10, k_2 = 32$; б – режим 2, $k_1 = 32, k_2 = 10$; в – режим 3, $k_1 = k_2 = 32$

Далее аналогичный анализ проведём для функции положения более сложной структуры, при которой вторая геометрическая передаточная функция (аналог ускорений) отображается графиком, приведённым на рис.5. В отличие от ранее рассмотренного случая в крайних положениях выходного звена имеются выстои. Результаты частотного анализа приведены для двух комбинаций парциальных частот: $k_1 = 20 \text{ с}^{-1}$, $k_2 = 30 \text{ с}^{-1}$ (режим 4, рис.6, а) и

$k_1 = k_2 = 30 \text{ c}^{-1}$ (режим 5, рис.6, б). При режиме 5 собственные частоты на выстоях оказываются кратными.

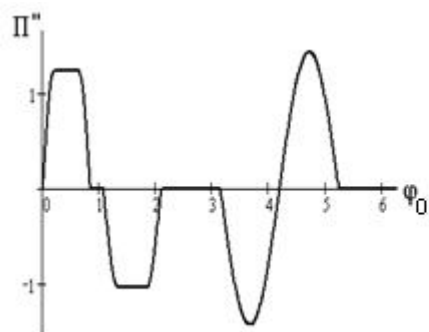


Рис.5. График $\Pi''(\varphi_0)$

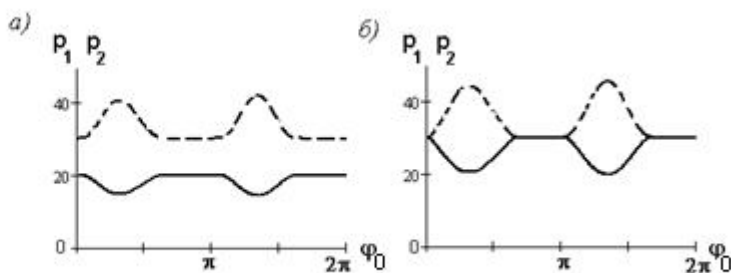


Рис.6. Графики $p_r(\varphi_0)$

Пусть, как и в предыдущем примере, при $\varphi = 0$ подсистема выходного звена получает импульсное возмущение ($\dot{q}_2(0) \neq 0$). На рис.7 приведены графики $q_1(\varphi_*)$ (сплошная линия) и $q_2(\varphi_*)$ (пунктирная линия). Сопоставление обоих графиков показывает, что при равенстве парциальных частот в конце кинематического цикла полностью восстанавливается исходный уровень амплитуд в обеих подсистемах. В отличие от случая, рассмотренного в работе [3] (см. рис.1), функцию энергетической «ловушки» цикловая система выполняет лишь частично – на участке выстоя внутри кинематического цикла. В целом за цикл наблюдается обмен колебательной энергии между подсистемами. При этом доля перенесённой энергии в значительной степени зависит от соотношения парциальных частот.

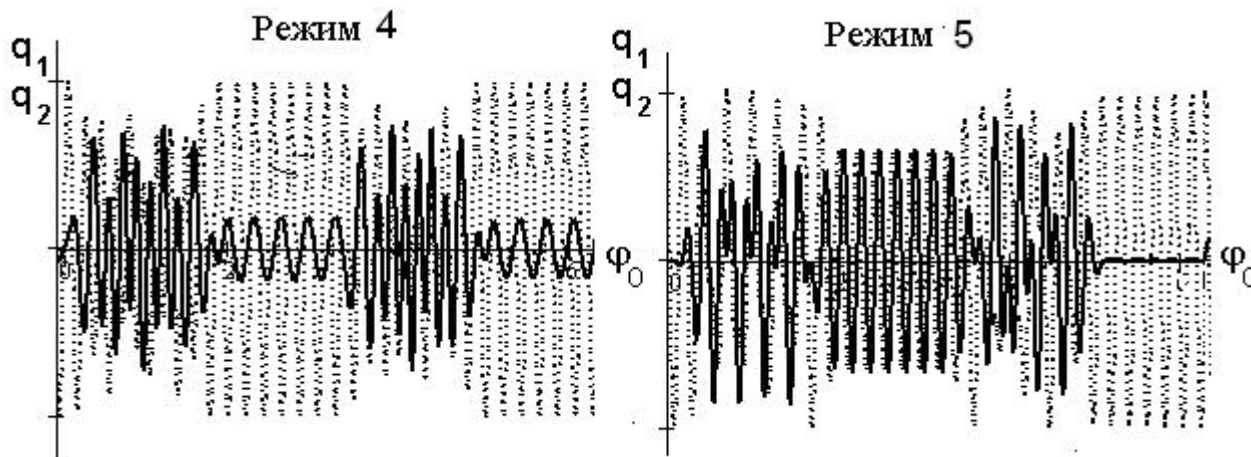


Рис.7. Графики $q_i(\varphi_0)$

4. Анализ трансформации энергии. Сначала воспользуемся уравнением (7) для оценки изменения энергии выделённой формы колебаний при $p_r(\varphi_0)$. В принятом виде уравнение (7) отвечает некоторому осциллятору с единичным инерционным коэффициентом, переменной частотой и псевдодиссипативной составляющей, пропорциональной скорости $\dot{\eta}_r$. (Напомним, что переменный коэффициент $n_r(t)$ учитывает не только диссипативные, но и гироскопические силы, поэтому на некоторых участках кинематического цикла он может принимать отрицательное значение.) Интенсивность изменения энергии колебаний может быть определена как [12]

$$d\tilde{E}_r / dt = W_r \dot{\eta}_r + \partial V_r / \partial t, \quad (11)$$

где \tilde{E}_r нормированное значение энергии колебаний для формы r .

Для инженерных приложений представляет интерес медленное изменение амплитудных значений энергии при свободных сопровождающих колебаниях. На основании (11) можно показать, что при нормированных значениях частот $\tilde{p}_r = p_r / \omega_0$

$$\tilde{E}'_r = 0,5[\tilde{p}'_r / \tilde{p}_r^2 - \psi_r / (2\pi)] . \quad (12)$$

Положительное значение этой функции свидетельствует о росте энергии колебаний на данной форме.

Перенос энергии от одной подсистемы к другой проиллюстрируем на примере модели, показанной на рис.2. Можно показать, что

$$E' = \partial E / \partial \varphi_0 = -\mu \Pi''[(\Pi' + q'_2) - p_2^2(q_2 - \Pi' q_1)]. \quad (13)$$

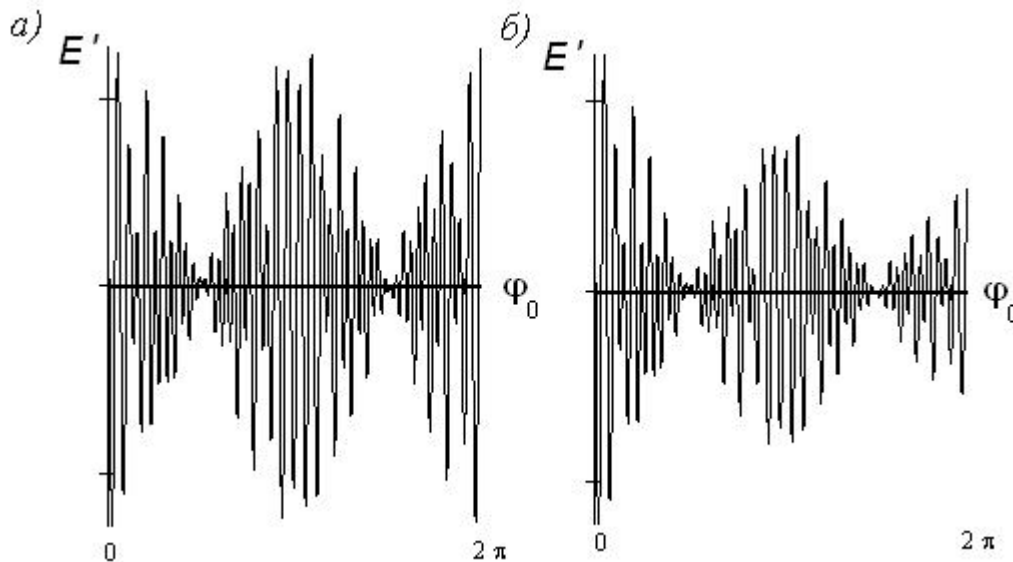


Рис.8. Характеристика интенсивности изменения энергии

На рис.8 приведены графики $E'(\varphi_0)$, построенные для режима 1 согласно зависимости (13) без учёта диссипации (рис.8,а) и при учёте диссипации (рис.8,б). На первый взгляд, наличие диссипации при $t \rightarrow \infty$ приводит к полному затуханию колебаний. Однако, как уже отмечалось, сопровождающие свободные колебания практически нередко образуют незатухающий колебательный фон, который приводит к существенным искажениям кинематических характеристик цикловых механизмов. В числе причин возникновения такого эффекта выделим многократное импульсное возбуждение системы, которое возникает за счёт резких изменений ускорений программного движения, ударов при переключке в зазорах и других возмущений не только в начальный момент времени, но и на протяжении всего кинематического цикла [1,2,11]. Эти возмущения усиливаются за счёт подводимой энергии. При этом устанавливается некоторый энергетический баланс, при котором амплитудный уровень колебаний может не удовлетворять поставленным требованиям. Устранение зон нарастания энергии колебаний реализуется при превышении определённого уровня диссипации.

Нормированное значение энергии колебаний для рассматриваемой модели может быть представлено как

$$\tilde{E} = 0,5\{\mu[k_2^2(q_2 - \Pi'_* q_1)^2 + (\Pi'_* + q'_2)^2] + (1 + q'_1)^2 + k_1^2 q_1^2\}, \quad (14)$$

где $\mu = J_2 / J_1$.

На рис.9 для режимов 1 и 2 приведены полученные на основании (14) графики изменения энергии колебаний на одном периоде кинематического цикла. (В функции \tilde{E} исключена составляющая, не зависящая от q_i, q'_i , пропорциональная энергии переносного движения без учёта упругости).

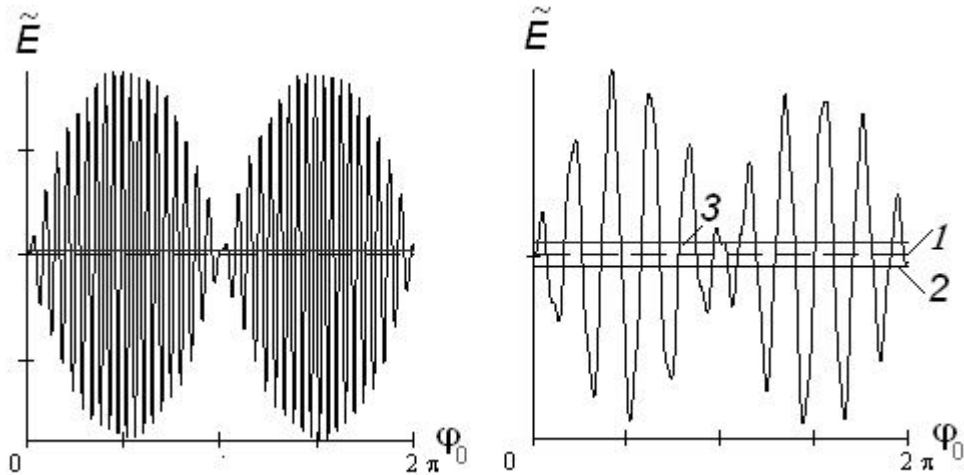


Рис.9. Графики $\tilde{E}(\varphi_0)$

Отметим, что при исключении диссипативных сил и внешних возмущений переменность функции $\tilde{E}(\varphi_0)$ связана только с нестационарностью связей при $\Pi' \neq 0$. Действительно, при $\Pi' = \text{const}$ система оказывается консервативной, следовательно, при свободных колебаниях энергия системы сохраняется постоянной и равна энергии, внесённой в систему за счёт начальных условий. Этому энергетическому уровню на графике отвечает прямая 1. На графиках показаны ещё два уровня, соответствующие $\varphi_0 = 2\pi$ (прямая 2) и $\varphi_0 = \pi$ (прямая 3). При строгой кратности частот и ω_0 прямые 1 и 2 совпадают.

Существенное отличие энергии колебаний внутри кинематического цикла от $\tilde{E}(0)$, как уже отмечалось, связано с работой гироскопических сил, которая в данном случае близка к нулю только при $\varphi_0 = 2\pi$. Однако при более сложных законах движения, а также в многосвязных системах сложной структуры возникают режимы с биениями, при которых накопление энергии происходит на относительно большом отрезке времени [8, 9]. Подобный пример накопления энергии иллюстрируется на рис.10, на котором видно многократное увеличение исходной энергии на периоде $\tau = 2\pi/\omega_0$. Как показал анализ, «возврат» этой энергии произошёл за время 17τ что соответствовало периоду биений.

Итак, в цикловых механизмах виброактивность зависит не только от перераспределения энергии между подсистемами, но и в значительной степени определяется дополнительным «вкладом», вносимым внешним источником при реализации нестационарных связей.

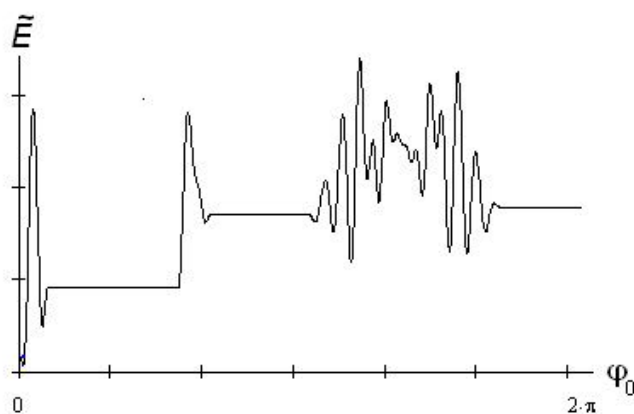


Рис. 10. График уровня подведённой энергии при биениях

Аналогичная ситуация, как уже отмечалось, имеет место при параметрическом резонансе, однако в нашем случае возникают локальные нарушения условий динамической устойчивости при медленном изменении параметров и отсутствии определенной частотной настройки [1,2,11]. Поэтому даже при медленном изменении параметров учёт влияния нестационарных связей является важным этапом динамического расчёта, на базе которого реализуется рациональный способ снижения виброактивности машин.

Список литературы

1. Вульфсон И.И. Динамические расчёты цикловых механизмов. – Л.: Машиностроение, 1976.– 328 с.
2. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия.– Машиностроение, 1990.– 309 с.
3. Kovaleva A., Manevitch L., Kosevich Yu. Fresnel integrals and irreversible energy transfer in an oscillatory system with time-dependent parameters // Physical Review E., 2011. V. 83. – P.p. 026602-1-12.
4. Косевич Ю. А., Маневич Л. И., Маневич Э. Л. Колебательный аналог неадиабатического туннелирования Ландау – Зинера и возможность создания энергетических ловушек нового типа // Успехи физических наук. 2010. Т.180, №12 –С. 1331 – 1334.
5. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. – М.: Изд.-во иностр. лит. 1959.– 457 с.
6. Индейцев Д.А., Кузнецов Н.Г., Мотыгин О.В. и др. Локализация линейных волн. – СПб.: Изд.-во. С.- Петерб. ун-та, 2007.– 342 с.
7. Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989.– 216 с.
8. Вульфсон И.И. Синфазность и пространственная локализация колебаний рабочих органов цикловых машин с симметричной динамической структурой.// Проблемы машиностроения и надежности машин, 2011. №1.– С.12–18.
9. Вульфсон И. И., Преображенская М.В. Исследование колебательных режимов, возбуждаемых при переключении в зазорах цикловых механизмов, соединенных с общим исполнительным органом. //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. №1.– С. 33–39.
10. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. – 432 с.
11. Вульфсон И. И. Колебания в машинах. Изд. 3-е. доп.– СПб.: СПГУТД, 2008.– 260 с.
12. Гантмахер Ф . Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Изд.-во физ. мат. лит.,1960. – 296.с.