

Математическая модель срывного флаттера

П. С. Ланда
Московский Государственный Университет,
физический факультет

6 февраля 2013 г.

Аннотация

Рассматривается модель срывного флаттера, включающая регулярную и случайную составляющие. Явление срывного флаттера относится к так называемым "нерешаемым" задачам [1]. Такие задачи получили название "нерешаемых", поскольку, как правило, мы не можем для них записать даже исходные уравнения. Поэтому ни численное, ни аналитическое решение этих задач невозможно. Приходится строить из физических соображений и экспериментальных данных какие-то математические модели. Общие принципы построения математических моделей различных систем изложены в книгах [2, 3]. В них перечисляются следующие виды моделей: геометрические, физические, аналоговые математические и имитационные. При этом утверждается, что "у них общая основа — изоморфизм". В книге [4] также рассматриваются некоторые принципы построения математических моделей. В ней дается следующее определение модели: "объект a' является моделью объекта a ..., относительно некоторой системы S характеристик (свойств), если a' строится (или выбирается) для имитации a по этим характеристикам.... Моделирование, т.е. построение моделей, лежит в основе любой науки." Очевидно, что это определение является более общим, чем первое. С ним следует согласиться, если термин "имитация" понимать в широком смысле. Другая классификация моделей и их роль в познании природы описаны в работе [5] и кратко изложены в книге [29]. Очевидно, что определение Ю.И. Неймарка основано на том, что при построении модели мы можем опираться на динамические уравнения, описывающие поведение исследуемого объекта, т.е. на то, что исследуемый объект является динамической системой¹. Многие распределенные системы (например, целый ряд гидродинамических) и происходящие в них явления практически нельзя адекватно описать динамическими уравнениями. Особенно это относится к так называемым плохо обтекаемым гидродинамическим системам. Именно в этом смысле подобные системы были названы нами нерешаемыми.

1. Плохо обтекаемые тела и срывной флаттер

Явление так называемого срывного флаттера, возникающего в результате взаимодействия автоколебаний тела с плохо обтекающими его вихрями, является причиной многих технических катастроф: сильных колебаний мачт на парусных кораблях, опущенных с кораблей тросов в океане, проводов в линиях электропередачи [1], а также разрушений мостов, стальных заводских труб, винтов вертолетов, перископов подводных лодок, лопаток компрессоров, турбин в турбореактивных двигателях и т.п. [8, 10, 11, 15, 22, 23]. Наиболее известной из катастроф является разрушение Такомоского моста, произошедшее в 1940 году. Процесс этого разрушения детально описан в целом ряде книг, например, в [8, 15]. Экспериментальные исследования срывного флаттера и снимки ряда вызванных им катастроф например, кадр из фильма о катастрофе Такомоского моста, демонстрирующий его состояние за полчаса до разрушения (см. рис. 1, заимствованный из [15]), показывают, что преобладающими при флаттере являются крутильные колебания тела, а изгибная составляющая является малой. Этим срывной флаттер существенно отличается от значительно более широко известного

¹Заметим, что, согласно [2, 3], "динамическая система является основным объектом теории колебаний", но в реальности современная теория колебаний (нелинейная динамика) изучает часто не динамические системы, а стохастические

изгибно-крутильного флаттера, являвшегося основной причиной катастроф самолетов на заре их появления (см.[18]).

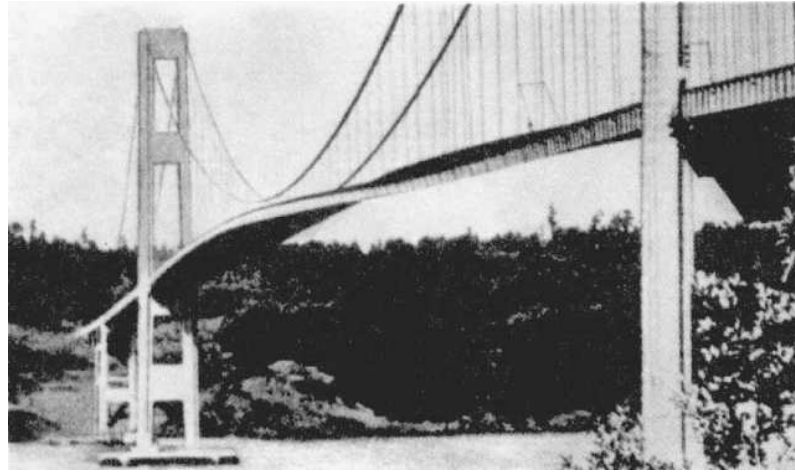


Рис. 1: Кадр из фильма о Такомо́й катастрофе, демонстрирующий состояние моста за полчаса до его разрушения

Все описанные явления обусловлены образованием за плохо обтекаемым телом приблизительно периодической вихревой структуры, получившей название по имени одного из главных своих исследователей «дорожки Кармана» [19]. Явление возбуждения таких автоколебаний мы будем называть срывным флаттером². Заметим, что теоретических работ, связанных с явлением срывного флаттера, сравнительно мало, а последовательная строгая теория просто отсутствует. По-видимому, это объясняется большой сложностью проблемы и тем, что при полете самолетов этот вид флаттера встречался и встречается сравнительно редко [11], и поэтому особой необходимости в строгой теории долгое время не существовало. В последние годы такая необходимость возникла в связи с тем, что появилось большое количество вертолетов, аварии которых чаще всего связаны именно с этим явлением.

Почему же возникают автоколебания? Известно, что течение жидкости, хотя и является при больших скоростях неустойчивым, не может само по себе приводить к автоколебаниям, поскольку эта неустойчивость имеет конвективный (сносовый) характер и поэтому любое возмущение не нарастает, а сносится вниз по потоку [7]. Для возбуждения автоколебаний в такой среде необходима дополнительная обратная связь. Эксперименты показывают, что при плохом обтекании некоторого тела, когда происходит срыв вихрей с поверхности этого тела, образуется возвратное течение. Именно это возвратное течение обеспечивает необходимую обратную связь, т.е. преобразование конвективной неустойчивости в абсолютную. Поскольку характеристики этого возвратного течения сильно зависят от формы, размеров и качества поверхности обтекаемого тела, оно, по существу, является случайным и его теоретическое описание невозможно в рамках динамических систем. Это значит, что мы не можем записать даже относительно точных исходных уравнений для задачи о срывном флаттере. Поэтому во многих работах и даже учебниках задача о срывном флаттере ограничивается расчетом турбулентных струй и вихревых следов за плохообтекаемыми телами с использованием так называемого метода дискретных вихрей, разработанного в 80-х гг. прошлого столетия (см., например, [24, 25, 26, 27]). Хотя надежное обоснование этого метода отсутствует, в некоторых случаях, при тщательном подборе параметров, он позволяет получить удовлетворительные результаты. Однако не ясно, можно ли обосновать этот метод исходя из уравнений гидродинамики. Наверно, именно поэтому многие работы, основанные на этом методе, вызывают целый ряд вопросов.

Трудность строгого математического описания срывного флаттера и связанная с этим

²В некоторых работах, например, [14], это явление называют «ветровым резонансом».

необходимость сочетания теории с экспериментом понимали его первые исследователи, хотя конкретных причин этого они не указывали. Например, в статье [28] авторы правильно утверждают, что теория срывного флаттера может быть только полуэмпирической. Но в качестве причины они указывают возникновение отрицательного трения за счет срыва потока. Такой вывод авторы делают, проводя аналогию между срывным флаттером и классическим изгибно-крутильным флаттером. Однако срывной флаттер принципиально отличается от классического. Это отличие хорошо описано в монографии Бисплингофа [11]. Приведем отрывок из этой монографии: «Классический тип флаттера связан с потенциальным потоком и обычно, но не обязательно, включает взаимодействие двух или более степеней свободы. Неклассический тип флаттера, который до сих пор трудно анализировать на чисто теоретической основе, может иметь место при сорванном потоке, периодических срывах потока с прилеганием его вновь ...»³. По нашему мнению, основная трудность теории срывного флаттера лежит в описании струи позади обтекаемого тела, возникающей при срыве вихрей, поскольку эта струя является случайной. В той или иной мере срывной флаттер описывается в книгах [8, 9, 11, 10, 16, 17, 20, 15, 22, 14, 23].

Ниже будет описана модель срывного флаттера, уравнения которой, безусловно, далеки от исходных уравнений, но достаточно хорошо объясняющая влияние процесса срыва вихрей на возбуждение автоколебаний. Модель основана на широко известных экспериментальных фактах, показывающих, что процесс срыва вихрей с плохо обтекаемого тела имеет автоколебательный характер [30, 31, 32, 20, 1, 29]. Если принять во внимание, что обтекаемое колеблющееся тело представляет собой случайную колебательную нагрузку с одной или несколькими степенями свободы, то явление срывного флаттера в среднем должно быть подобно процессу автоколебаний в системе, содержащей как активные, так и пассивные колебательные элементы. Классическим примером такой системы является генератор с дополнительным колебательным контуром, впервые рассмотренный А.А. Андроновым и А.А. Виттом [33] методом малого параметра Пуанкаре и С.П. Стрелковым [34] качественными методами. Впоследствии подобный генератор исследовался также К.Ф. Теодорчиком [35]. Он описан также в учебном пособии [36].

К признакам, указывающим на автоколебательный характер процесса срыва вихрей с обтекаемого тела в некоторой области параметров, можно отнести следующие:

1. Пульсации скорости и давления в дорожке Кармана имеют относительно узкий спектр с ярко выраженным максимумом на частоте, соответствующей некоторому числу Струаля St (в широком диапазоне параметров $St \approx 0.2$).
2. Процесс срыва вихрей с обтекаемого тела может быть в среднем синхронизован, если возбудить колебания этого тела на некоторой заданной частоте, приблизительно равной или кратной частоте срыва вихрей с неподвижного тела [30, 31, 32, 20], причем характер зависимости средней частоты срыва вихрей с колеблющегося тела от расстройки между средней частотой колебаний тела и частотой срыва вихрей с неподвижного тела в среднем совпадает с характером хорошо известной зависимости частоты синхронных колебаний генератора Ван дер Поля от расстройки между частотой свободных колебаний и частотой внешней силы (см. [38]). Заметим, что в режиме синхронизации частота срыва вихрей и частота колебаний тела в среднем либо совпадают, либо кратны.

В настоящей работе мы рассмотрим явление срывного флаттера на простейшей модели колебаний упругого цилиндрического тела длины l , помещенного перпендикулярно потоку и закрепленного на концах (рис. 2). Как уже отмечалось, за обтекаемым цилиндром образуется вихревая дорожка Кармана (рис. 3), которая в диапазоне чисел Рейнольдса $40 < Re < 150$ является почти регулярной, а при $150 < Re < 300$ — турбулентной. При $300 < Re < 2 \cdot 10^5$ дорожка Кармана снова становится близкой к регулярной, но с турбулентными всплесками. Затем в некоторой области при $Re > 5 \cdot 10^6$ снова наблюдается доминирующая частота срыва

³Следует, правда, отметить, что термин «потенциальный поток» здесь является не вполне удачным, потому что в потенциальном безграничном потоке идеальной жидкости никакого флаттера быть не может из-за равенства нулю суммы всех аэродинамических сил (парадокс Даламбера (см.[12])).

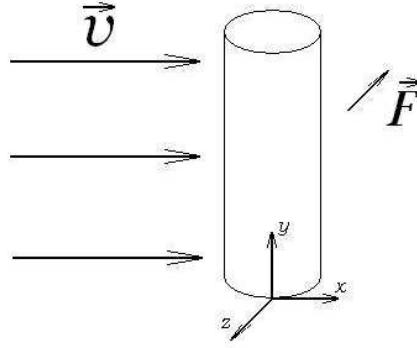


Рис. 2: Схематическое изображение изгибных колебаний упругого цилиндра длины l , происходящих вдоль оси z , при обтекании потоком в направлении оси x

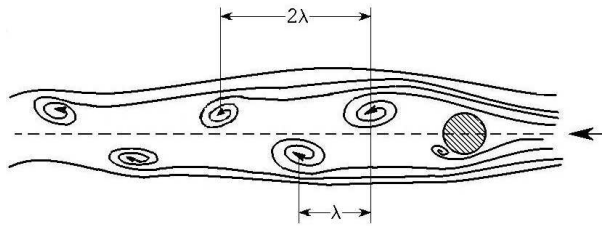


Рис. 3. Схематическое изображение дорожки Кармана при обтекании цилиндра

вихрей. Заметим, что такое чередование областей различного поведения при изменении параметра характерно для хаотических автоколебательных систем [37, 29]. В частности, область $300 < Re < 2 \cdot 10^5$, по-видимому, может рассматриваться как область перемежаемости. Сказанное лишний раз свидетельствует, что образование дорожки Кармана представляет собой автоколебательный процесс. Ниже мы будем рассматривать только область значений числа Рейнольдса, где процесс срыва вихрей является близким к регулярному, но содержит небольшую случайную составляющую. При этом в некоторой области параметров он может быть близким к периодическому, когда в среднем имеет место синхронизация, либо к квазипериодическому, содержащему в среднем две основных частоты: собственную частоту колебаний цилиндра ω_0 и частоту $\omega_{us}(\Omega)$, которую мы будем называть частотой срыва вихрей с поверхности цилиндра, колеблющегося в направлении некоторой оси u с частотой Ω . Если частота ω_0 достаточно сильно отличается от частоты срыва вихрей с поверхности неподвижного цилиндра, которую мы обозначим $\omega_{us}(0)$, то частота срыва близка к

$$\omega_{us}(0)$$

: вихри как бы не чувствуют, что цилиндр колеблется. При приближении частоты ω_0 к $\omega_{us}(0)$ частота срыва начинает изменяться до значения ω_0 : наступает синхронизация.

1.1. Явление синхронизации

Одни из первых экспериментов по синхронизации частоты срыва вихрей за счет колебаний цилиндра были выполнены в России Л.П. Смирновым и М.А. Павлихиной [30] и, несколько позднее, на Западе Бишопом и Хассаном [31]. Кроме области синхронизации на основной частоте, последние обнаружили синхронизацию на второй и третьей субгармониках частоты

колебаний цилиндра (о синхронизации генератора Ван дер Поля на субгармониках внешней силы (см. [38]).

Несколько позднее синхронизация срыва вихрей за счет колебаний цилиндра, но только на основной частоте, наблюдалась Л.Х. Блюминой и К.К. Федяевским [32, 20]. Зависимость $\Delta St = (f - f_0)D/U_0$ от $\Delta St_0 = (f_{\text{stall}}(0) - f_0)D/U_0$, где D — диаметр цилиндра, U_0 — скорость набегающего потока, построенная на основе экспериментальных данных, приведенных в работе [20], представлена на рис. 4. Если проводить кривую не между точками, а по точкам, то

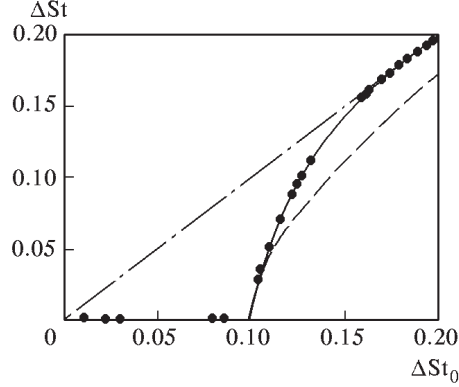


Рис. 4: Зависимость ΔSt от ΔSt_0 . Штрих-пунктиром показана асимптота $\Delta St = \Delta St_0$, а штриховой линией — зависимость $\Delta St_{vdP} = \sqrt{\Delta St_0^2 - \Delta St_{0\text{sinchr}}^2}$

полученная зависимость будет близкой к соответствующей зависимости для зашумленного генератора Ван дер Поля [21].

Для сравнения на том же рисунке штриховой линией приведена зависимость, вычисленная по формуле Ван-дер-Поля $\Delta St_{vdP} = \sqrt{\Delta St_0^2 - \Delta St_{0\text{sinchr}}^2}$, где $\Delta St_{0\text{sinchr}}$ — полуширина области синхронизации. Эта зависимость должна иметь место в случае синхронизации незашумленного генератора малой периодической внешней силой, т.е. при малой амплитуде колебаний цилиндра. Однако, судя по тому, что найденная область синхронизации оказалась достаточно широкой, амплитуда колебаний цилиндра была значительной, что и привело к более крутой средней зависимости ΔSt от ΔSt_0 .

При срывном обтекании цилиндра в направлении оси x со средней скоростью V , одинаковой для всех сечений цилиндра, на это сечение в среднем действуют периодические (или близкие к периодическим) подъемная сила $F_z(t)$, направленная вдоль оси z , и сила лобового сопротивления $F_x(t)$, направленная вдоль оси x навстречу потоку и представляющая собой сумму двух составляющих: не зависящей от времени (или медленно меняющейся со временем) и периодической (или близкой к периодической) с периодом, вдвое меньшим, чем период подъемной силы.

В случае неподвижного цилиндра в широком диапазоне чисел Рейнольдса частота подъемной силы близка к частоте срыва вихрей с поверхности цилиндра $\omega_{\text{stall}0}$, а частота силы лобового сопротивления близка к $2\omega_{\text{stall}0}$ [31]. Разница средних периодов подъемной силы и силы лобового сопротивления возникает из-за того, что частота подъемной силы определяется расстоянием между вихрями только вдоль одной из сторон дорожки Кармана (2λ), тогда как частота силы лобового сопротивления определяется расстоянием между вихрями вдоль обеих сторон дорожки Кармана (λ) (см. рис. 3).

Частота $\omega_{\text{stall}}(0)$ связана с числом Струхала St и скоростью обтекания V выражением

$$\omega_{\text{stall}0} = \frac{2\pi St}{D} V, \quad (1)$$

где D — диаметр цилиндра. Эксперименты показывают, что с ростом числа Рейнольдса при $40 < Re < 150$ число Струхала растет, затем становится приблизительно постоянным и равным 0.2, а далее снова начинает расти. В области $2 \cdot 10^5 < Re < 5 \cdot 10^6$ вихревая дорожка

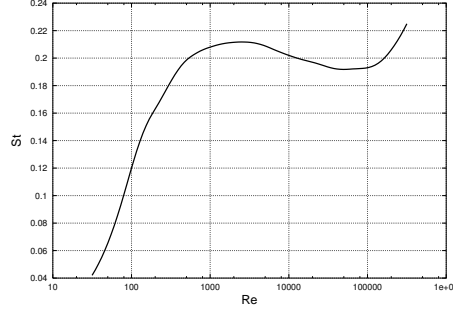


Рис. 5: Зависимость числа Струхалия от числа Рейнольдса при поперечном обтекании неподвижного цилиндра с круглым сечением

является сильно турбулентной, так что число Струхалия определить невозможно. Далее, при $Re > 5 \cdot 10^6$, число Струхалия $St \approx 0.3$. Все сказанное отражено на рис. 5, заимствованном из [22]).

Уравнения, позволяющие строго описать подъемную силу и силу лобового сопротивления в случае срывного обтекания, насколько нам известно, в литературе отсутствуют. В основном приводятся только выражения для их амплитуд и частоты [31, 15, 22].

Амплитуды средних сил $F_z(t)$ и $F_x(t)$ во всех известных книгах по аэроупругости (см., например, [22]) находятся из соображений размерности. Соответствующие формулы можно записать в виде

$$A_z = c_k(Re)S_{yz} \frac{\rho V^2}{2}, \quad A_x = c_r(Re)S_{yz} \frac{\rho V^2}{2}, \quad (2)$$

где $c_k(Re)$ и $c_r(Re)$ — коэффициенты, зависящие от степени обтекаемости тела (чем хуже обтекаемость, тем больше значения c_k и c_r), и от числа Рейнольдса, S_{yz} — площадь проекции тела на плоскость yz , перпендикулярную направлению потока. Заметим, что коэффициент $c_r(Re)$ всегда много меньше, чем $c_k(Re)$, т.е. амплитуда силы лобового сопротивления всегда много меньше амплитуды подъемной силы.

Для колеблющегося цилиндра к силам $F_z(t)$ и $F_x(t)$ следует добавить силы, связанные с нестационарностью обтекания. Эти силы определяют присоединенную массу цилиндра и дополнительный коэффициент затухания. Поэтому их учет, по-видимому, не имеет принципиального значения. Кроме того, в случае колеблющегося цилиндра коэффициенты $c_k(Re)$ и $c_r(Re)$ зависят от амплитуды колебаний.

Рассматривая колеблющийся цилиндр как струну и принимая во внимание силы вязкого трения, запишем уравнения его колебаний вдоль осей x и z в виде

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 U_x(y, t)}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial U_x(y, t)}{\partial t} - 2T \frac{\partial^2 U_x(y, t)}{\partial y^2} &= F_x(y, t), \\ \rho_s \frac{\partial^2 U_z(y, t)}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial U_z(y, t)}{\partial t} - T \frac{\partial^2 U_z(y, t)}{\partial y^2} &= F_z(y, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $U_x(y, t)$ и $U_z(y, t)$ — смещения цилиндра вдоль осей x и z , соответственно, ρ_s — линейная плотность струны, T — натяжение струны, α — коэффициент вязкого трения. Если цилиндр закреплен на концах, то граничные условия имеют вид:

$$U_x(0, t) = 0, \quad U_x(l, t) = 0, \quad U_z(0, t) = 0, \quad U_z(l, t) = 0. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что силы $F_x(y, t)$ и $F_z(y, t)$ отличны от нуля только при $0 \leq y \leq l$ и частота силы лобового сопротивления вдвое больше частоты подъемной силы, представим

$F_x(y, t)$ и $F_z(y, t)$ в виде

$$F_x(y, t) = A_x \sum_{j=1}^{\infty} \cos(2\omega_j t) \sin\left(\frac{2(2j-1)\pi}{l} y\right), \quad (5)$$

$$F_z(y, t) = A_z \sum_{j=1}^{\infty} \cos(\omega_j t) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{l} y\right), \quad (j = 1, 2, \dots),$$

где

$$\omega_j = \sqrt{\frac{T(2j-1)\pi}{\rho_s l}} \quad (6)$$

— j -я собственная частота колебаний цилиндра.

Если частота срыва вихрей с колеблющегося цилиндра близка к n -й собственной частоте колебаний цилиндра, то в разложениях (5) можно оставить только по одному члену с $j = n$.

Сохраняя в разложениях (5) только по одному члену с $j = n$ и подставляя (5) в (3), для функций $U_x(y, t)$ и $U_z(y, t)$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_x}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_x}{dt} - 4\omega_n^2 U_x &= \frac{A_x}{\rho_s} \cos(2\omega_n t) \sin\left(\frac{2(2n-1)\pi}{l} y\right), \\ \frac{d^2 U_z}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_z}{dt} - \omega_n^2 U_z &= \frac{A_z}{\rho_s} \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{l} y\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta = \alpha/\rho_s \ll \omega_n$.

Из-за того, что частоты колебаний в направлениях x и z различны, суммарные колебания могут иметь довольно сложный характер. Более того, в диапазонах чисел Рейнольдса, где процесс срыва вихрей является случайным, они также будут случайными, что часто наблюдается в реальности.

Как уже указывалось, процесс срыва вихрей по многим признакам имеет автоколебательный характер, обусловленный образованием за обтекаемым телом обратной струи.

Рассмотрим вначале случай, когда частота срыва вихрей близка к собственной частоте колебаний цилиндра, так что возможна синхронизация. Поскольку какие-либо уравнения, позволяющие строго вывести выражения для сил $F_z(y, t)$ и $F_x(y, t)$ в литературе отсутствуют, для их вычисления мы будем пользоваться модельными уравнениями автоколебаний. Используя уравнение Ван дер Поля [38] со случайным источником и принимая во внимание экспериментальный факт, что колебания цилиндра могут синхронизовать срыв вихрей, запишем следующие уравнения для $f_z(t)$ и $f_x(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_z}{dt^2} - \mu(1 - 4f_z^2) \frac{df_z}{dt} + \omega_{\text{stall}}^2 f_z &= m_1 U_z + \xi_1(t), \\ \frac{d^2 f_x}{dt^2} - \mu(1 - 4f_x^2) \frac{df_x}{dt} + 4\omega_{\text{stall}}^2 f_x &= m_2 U_x + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi_{1,2}(t)$ — белые шумы интенсивности $K_{1,2}$, μ — малый параметр, $m_{1,2}$ — некоторые коэффициенты. Отметим, что члены $m_1 U_z$ и $m_2 U_x$ отвечают за синхронизацию частоты срыва вихрей колебаниями цилиндра.

При малом μ из уравнений (8) следует, что в случае неподвижного цилиндра, когда $U_x = U_z = 0$, мы имеем

$$F_z = A_z f_z \approx A_z \cos(\omega_{\text{stall}} t), \quad F_x = A_x f_x \approx A_x \cos(2\omega_{\text{stall}} t + \varphi), \quad (9)$$

где φ — некоторый сдвиг фаз. Заметим, что формулы (9) находятся в полном соответствии с выражениями для подъемной силы и силы лобового сопротивления, приведенными в работах [31].

Система уравнений (7), (8) описывает две независимых автоколебательных системы, каждая из которых обладает двумя степенями свободы. На языке радиофизики каждая автоколебательная система представляет собой генератор с дополнительным колебательным контуром, связанным с основным контуром через емкость.

Для определенности рассмотрим систему, описываемую первыми из уравнений (7) и (8). Эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_z}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_z}{dt} + \omega_n^2 U_z &= \frac{f_z(t)}{\rho_s}, \\ \frac{d^2 f_z}{dt^2} - \mu(1 - 4f_z^2) \frac{df_z}{dt} + \omega_{\text{stall}}^2 f_z - m_1 U_z &= \xi_1(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Система уравнений (10) описывает взаимодействие между автоколебательной системой, определяемой функцией $f_z(t)$, и пассивной колебательной системой, определяемой функцией $U_z(t)$. Если собственные частоты этих систем ω_n и ω_{stall} сильно отличаются друг от друга, то системы будут очень слабо взаимодействовать, т.е. будут практически независимыми. Но если частоты достаточно близки, то может возникнуть синхронизация.

Для приближенного решения этой системы в режиме синхронизации или близком к нему используем метод усреднения, разработанный Н.Н. Боголюбовым [39] и развитый Ю.А. Митропольским [40]. Мы используем этот метод в форме, изложенной в [38]. Для этого перепишем уравнения (10), введя условный малый параметр ϵ и безразмерное время $\tau = \omega_n t$:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_z + \omega^2 U_z - \epsilon \left[(\omega^2 - 1)U_z - 2\tilde{\delta}\dot{U}_z + \frac{f_z(t)}{\rho_s \omega_n^2} \right] &= 0, \\ \ddot{f}_z + \omega^2 f_z - \epsilon \left[(\omega^2 - \xi^2)f_z + \tilde{m}_1 U_z + \tilde{\mu}(1 - 4f_z^2)\dot{f}_z \right] &= \tilde{\xi}_1(\tau). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\tilde{\mu} = \mu/\omega_n$, $\tilde{\delta} = \delta/\omega_n$, $\tilde{m}_1 = m_1/\omega_n^2$, $\xi = \omega_{\text{stall}}/\omega_n$ — расстройка между частотой срыва вихрей и собственной частотой колебаний цилиндра, ω — неизвестная относительная частота автоколебаний в синхронном режиме, $\tilde{\xi}_1(\tau) = \xi_1(t)/\omega_n^2$, точки означают дифференцирование по безразмерному времени τ .

Перейдем в уравнениях (11) к новым переменным $A_{1,2}(\tau)$ и $\varphi_{1,2}(\tau)$, определяемым уравнениями

$$\begin{aligned} f_z(\tau) &= A_1(\tau) \cos(\omega\tau + \varphi_1(\tau)), \quad \dot{f}_z(\tau) = -A_1(\tau)\omega \sin(\omega\tau + \varphi_1(\tau)), \\ U_z(\tau) &= A_2(\tau) \cos(\omega\tau + \varphi_2(\tau)), \quad \dot{U}_z(\tau) = -A_2(\tau)\omega \sin(\omega\tau + \varphi_2(\tau)). \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом (12) уравнения (11) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 \cos \Phi_1 - A_1 \dot{\varphi}_1 \sin \Phi_1 &= 0, \quad -\left(\dot{A}_1 \sin \Phi_1 + A_1 \dot{\varphi}_1 \cos \Phi_1 \right) = \\ &= \frac{\epsilon}{\omega} \left[(\omega^2 - \xi^2)A_1 \cos \Phi_1 - \tilde{\mu}\omega \left(1 - 4A_1^2 \cos^2 \Phi_1 \right) A_1 \sin \Phi_1 + \tilde{m}_1 A_2 \cos \Phi_2 \right] - \frac{\tilde{\xi}_1(\tau)}{\omega}, \\ \dot{A}_2 \cos \Phi_2 - A_2 \dot{\varphi}_2 \sin \Phi_2 &= 0, \quad -\left(\dot{A}_2 \sin \Phi_2 + A_2 \dot{\varphi}_2 \cos \Phi_2 \right) = \\ &= \frac{\epsilon}{\omega} \left[(\omega^2 - 1)A_2 \cos \Phi_2 + 2\tilde{\delta}\omega A_2 \sin \Phi_2 + \tilde{m}_2 A_1 \cos \Phi_1 \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Phi_1 = \tau + \varphi_1$, $\Phi_2 = \tau + \varphi_2$, $\tilde{m}_2 = 1/(\rho_s \omega_n^2)$.

Согласно методу усреднения, в первом приближении нужно разрешить уравнения (13) относительно \dot{A}_1 , \dot{A}_2 , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ и усреднить полученные уравнения по быстрому времени τ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{\epsilon}{2\omega} \left(\tilde{\mu}\omega(1 - A_1^2)A_1 - \tilde{m}_1 A_2 \sin \varphi \right), \\ \dot{A}_2 &= -\frac{\epsilon}{2\omega} \left(2\tilde{\delta}\omega A_2 - \tilde{m}_2 A_1 \sin \varphi \right), \\ \dot{\varphi}_1 &= -\frac{\epsilon}{2\omega A_1} \left[(\omega^2 - \xi^2)A_1 + \tilde{m}_1 A_2 \cos \varphi \right], \\ \dot{\varphi}_2 &= -\frac{\epsilon}{2\omega A_2} \left[(\omega^2 - 1)A_2 + \tilde{m}_2 A_1 \cos \varphi \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз между колебаниями подъемной силы и колебаниями цилиндра.

В синхронном режиме все производные в уравнениях (14) можно положить равными нулю. Тогда получим следующую систему уравнений для определения амплитуд A_1 , A_2 φ и частоты синхронных автоколебаний ω :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}\omega(1 - A_1^2) - \tilde{m}_1 \frac{A_2}{A_1} \sin \varphi &= 0, \quad 2\tilde{\delta}\omega \frac{A_2}{A_1} - \tilde{m}_2 \sin \varphi = 0, \\ \omega^2 - \xi^2 + \tilde{m}_1 \frac{A_2}{A_1} \cos \varphi &= 0, \quad (\omega^2 - 1) \frac{A_2}{A_1} + \tilde{m}_2 \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Исключая из уравнений (15) отношение амплитуд A_2/A_1 , получаем:

$$\omega^2 - \xi^2 + \frac{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{4\tilde{\delta}\omega} \sin 2\varphi = 0, \quad (\omega^2 - 1) \operatorname{tg} \varphi + 2\tilde{\delta}\omega = 0. \quad (16)$$

Уравнения (16) удобно решать, записав их в виде

$$(\omega^2 - \xi^2) \left((1 - \omega^2)^2 + 4\tilde{\delta}^2 \omega^2 \right) + \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 (1 - \omega^2) = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\tilde{\delta}\omega}{1 - \omega^2}. \quad (17)$$

Примеры зависимостей ω и φ от ξ для $\delta/\omega_n = 0.1$, $m_1 m_2 / \omega_n^4 = 0.05$ и $m_1 m_2 / \omega_n^4 = 0.15$ приведены на рис. 6 *a* и *b*, соответственно. Из рисунка 6 *a* видно, что при $\xi \leq \xi_{\text{cr}}$, т.е. при

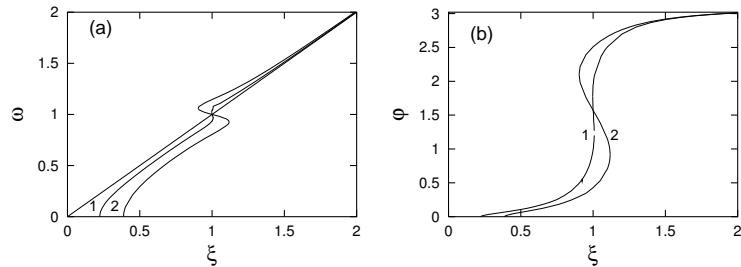


Рис. 6: Зависимости относительной частоты автоколебаний в синхронном режиме (а) и разностей фаз между колебаниями подъемной силы и колебаниями цилиндра (б) от расстройки между частотами срыва вихрей с неподвижного цилиндра и собственных колебаний цилиндра для $\delta = 0.1$, $\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = 0.05$ (кривые 1), $\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = 0.15$ (кривые 2)

относительно малых значениях частоты срыва вихрей с неподвижного цилиндра, одночастотные автоколебания невозможны. Значение ξ_{cr} может быть найдено аналитически, исходя из первого уравнения (17). Оно равно $\xi_{\text{cr}} = \sqrt{m_1 m_2 / \omega_n^4}$. При $\xi \leq \xi_{\text{cr}}$ автоколебания представляют собой биения. Вблизи границы области синхронизации частоту биений можно вычислить подобно тому, как это делается для генератора Ван дер Поля (см., например, [38]).

При увеличении расстройки частота автоколебаний приближается к частоте колебаний генератора в отсутствие дополнительного контура, но не монотонно. В окрестности $\xi = 1$ происходит затягивание частоты, при котором частота автоколебаний зависит от начального значения частоты и от направления ее изменения. В этой области результаты качественно совпадают с изложенными в [35].

Вычислим теперь зависимости амплитуд автоколебаний от расстройки, используя уравнения (14) и (15). Из этих уравнений следует, что

$$A_1 = \sqrt{1 - \frac{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{2\mu \tilde{\delta} \tilde{\omega}^2} \sin^2 \varphi}, \quad A_2 = \frac{\tilde{m}_2}{2\tilde{\delta} \tilde{\omega}} A_1 \sin \varphi. \quad (18)$$

Подставляя сюда значения $\tilde{\omega}(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, следующие из уравнений (15), находим зависимости A_1 и A_2 от ξ .

Зависимости амплитуд колебаний в основном контуре (A_1) и дополнительном (A_2), определяемые уравнениями (18), показаны на рис. 7 а и б.

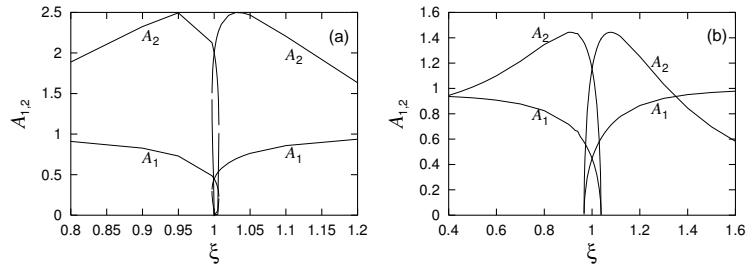


Рис. 7: Зависимости амплитуд автоколебаний подъемной силы (A_1) и цилиндра (A_2) от расстройки между частотами срыва вихрей с неподвижного цилиндра и собственных колебаний цилиндра для $\tilde{\delta} = 0.1$, $\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = 0.05$ (а), $\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = 0.15$ (б)

В области резонанса обе амплитуды имеют минимум, но по обе стороны минимума они изменяются по-разному: в основном контуре обе амплитуды монотонно нарастают, тогда как изменения амплитуд колебаний в дополнительном контуре имеют максимумы вблизи $\xi = 0$.

Приведенные на рис. 6 и 7 зависимости построены без учета устойчивости найденных решений. Уравнения (6), (7) позволяют провести исследование устойчивости. Это исследование показывает, что за счет неустойчивости некоторые участки зависимостей, представленных на этих рисунках, выпадают.

В заключение данного раздела заметим, что найденный здесь эффект невозможности одночастотного режима автоколебаний не имеет места в случае индуктивно связанных контуров. По-видимому, именно этим можно объяснить тот факт, что этот эффект не нашел отражения в литературе. Следует отметить, что в работе К.Ф. Теодорчика этот эффект также не был замечен.

Заключение

На рассмотренных двух примерах мы продемонстрировали, что использование моделей, описываемых уравнениями, не изоморфными уравнениями моделируемой системы в ряде случаев приводит к возможности описать поведение исследуемой системы, по крайней мере, качественно. При этом следует подчеркнуть, что численное решение найденных уравнений значительно проще, чем полученных другими (возможно, более строгими) методами.

Список литературы

1. Ланда П.С., Гиневский А.С. Использование математических моделей для решения "нерешаемых" задач. В сб. "Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика", под ред. В. В. Белецкого, Д. А. Индейцева, А. Л. Фрадкова; Ин-т проблем машиноведения РАН. - СПб.: Наука, 2009, сс. 349–367.
2. Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2004, 401с.
3. Неймарк Ю.И. Математическое моделирование — наука и искусство. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2010, 404с.
4. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: Предмет, логика, особенности подходов. С примерами из механики. Изд. 4-е. Москва: Изд-во ЛКИ, 2007, стр. 128.
5. Landa P.S. Universality of oscillation theory laws. Types and role of mathematical models. // *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 1997, vol. 1, P. 99–110.
6. Ланда П.С. Срывной флаттер как один из механизмов возбуждения автоколебаний линий электропередачи. Изв. вузов "ПНД", 2009, т.16, № 2, сс. 3–15.
7. Ланда П.С. Гипотеза о флуктуационном происхождении турбулентности в параллельных незамкнутых течениях. АЕН: Ассоциация авторов научных открытий. Москва, 1994, № 1 А-008.
8. Roscard Y. *Dynamique Générale des Vibrations*. Paris, Masson et C^{ie}, Editeurs, 1949.
9. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва: Гостехиздат, 1956.
10. Рокар И. Неустойчивость в механике. Москва: ИЛ, 1959.
11. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Аэроупругость. Москва: ИЛ, 1958.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Мцсква: Наука, 1986.
13. Гольденблат И.И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. Москва: Госстройиздат, 1947.
14. Казакевич М.И. Аэродинамика мостов. Москва: Транспорт, 1987.
15. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Москва: Наука, 1979, 384с.
16. Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. Москва: Физматгиз, 1959.
17. Девнин С.И. Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л.: Судостроение, 1975.
18. Гроссман Е.П. Флаттер. Тр. ЦАГИ, 1937, № 284.
19. Karman Th. von. *Über den Mechanismus des Flüssigkeitsund Luftwiderstands*. *Phys.Z.*, Bd. 13, 1912, SS. 49–59.
20. Федяевский К.К., Блюмина Л.Х. Гидродинамика отрывного обтекания тел. Москва: Машиностроение, 1977.
21. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Сов. Радио, Москва, 1961, 558 стр. 475.
22. Ферпинг Г. Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984.

23. A Modern Course of Aeroelasticity. Ed. Dowell E.H. Kluwer Acad. Publ., 2004.
24. Lewis R.I., Porterhouse D.T.C. A generalized numerical method for bluff body stalling aerofoil flow. ASME Paper 82-GT-70, 1982.
25. Spalart P.R. Numerical simulation of separated flows. NASA-TM-84238, 1983.
26. Sisto F., Thangam S. Abdelrahim A. Computational study of stall flutter in linear cascades. ASME J. of Turbomachinery, vol. 115, No 1, 1993.
27. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов методом дискретных вихрей. Москва: Наука, 1995, 365с.
28. Ericsson L.E., Reding G.P. Stall-flutter analysis. J. Aircraft, vol. 10, No 1, P. 5–13.
29. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Москва: URSS, 2010, 550с.
30. Павлихина М.А., Смирнов Л.П. Вихревой след при обтекании колеблющихся цилиндров, Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8, С. 124–127.
31. Bishop R.E.D., Hassan A.Y. The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid. Proc. Royal Soc. (London), 1964, vol. A277, P. 32–50, 51–75.
32. Блюмина Л.Х., Федяевский К.К. Исследование влияния вынужденных колебаний цилиндра в воздушном потоке на механизм срыва вихрей, Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1, С. 118–119.
33. Андронов А.А., Витт А.А. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы, ЖТФ, 1934, т. 4, С. 122–136.
34. Стрелков С.П., Скибарко А.П. Качественное исследование процессов в генераторе по сложной схеме. К теории затягивания по Ван-дер-Полю, ЖТФ, 1934, т. 4, С. 158–171.
35. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. Москва: Гостехиздат, 1952, 269с.
36. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. Москва: Наука, 1988.
37. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. URSS, Москва, 2009, 425 с.
38. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. URSS, Москва, 2009, 359 с.
39. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике. В сб. Ин-та строит. механики АН УССР, 1950, т. 14, С. 9-34.
40. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971, 440с.