

УДК 621.01: 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОМПЕНСАТОРАХ ПРИВОДОВ С ГИБКИМИ СВЯЗЯМИ ПРИ ПРОГРАММНОМ УПРАВЛЕНИИ НАТЯЖЕНИЕМ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна

Санкт-Петербург, Россия

vujo@rambler.ru

***Аннотация.** Предложена динамическая модель компенсатора привода с гибкими связями при программном управлении натяжением, описанная нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Получены амплитудно-частотные характеристики и условия динамической устойчивости при совместном параметрическом и кинематическом возбуждении. Результаты аналитического исследования проиллюстрированы и подтверждены компьютерным моделированием.*

Исследование динамики механизмов с гибкими связями представляет большой интерес при проектировании текстильных, полиграфических, швейных, бумагоделательных машин, а также приводов с ременными передачами машин различного назначения. Эта проблема, а также подробный обзор библиографических источников нашли отражение в монографиях [1,2,3]. Для стабилизации движения гибкой ленты или нити широко используются различного рода натяжные устройства, основное назначение которых обычно состоит в поддержании квазипостоянного натяжения и подавления относительно малых возмущений. Эти устройства, называемые стабилизаторами или компенсаторами натяжения, представляют собой ролик или палец, имеющий контакт с гибким элементом, а также с корпусом посредством линейного или нелинейного упругого элемента. Наряду с отмеченной функцией натяжных устройств, возможны случаи, когда палец натяжного устройства совершает заданные большие перемещения, причём в некоторых случаях технологический процесс предусматривает даже запрограммированный разрыв кинематического контакта с гибкой связью. Такая ситуация, в частности, возникает в нитепротягивателях швейных и обувных машин, когда на определённом временном интервале технологического цикла нить должна быть свободной, т.е. натяжение должно отсутствовать. Отмеченные факторы существенно проявляются на динамике подобных устройств.

1. На рис.1,а приведена динамическая модель пружинного компенсатора натяжения гибкой связи. Приняты следующие условные обозначения: c_i – коэффициенты жёсткости, ψ_i приведённые коэффициенты рассеяния, m – масса. Для коэффициентов c_1 и ψ_1 могут быть использованы приведённые значения, учитывающие упругие и диссипативные свойства нити за пределами двух ветвей. Предполагается, что механический привод достаточно массивен по сравнению с натяжным устройством, поэтому его колебания слабо зависят от колебаний массы m . В то же время обратное влияние может быть существенным. В данной статье исследуются динамические эффекты, возникающие при программном изменении длины ветви нити $l(t) = L / \cos \theta(t)$. Как уже отмечалось, нередко возникает необходимость в «свободной» (не натянутой) нити. В подобных случаях предельные перемещения компенсатора должны быть ограничены соответствующими упорами.

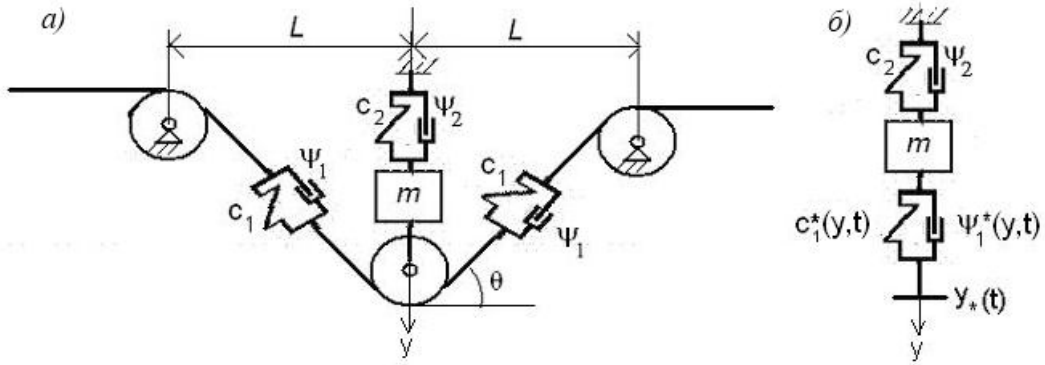


Рис.1

Осуществим переход к модели, показанной на рис.1,б. Потенциальная энергия при деформации одной ветви равна $P^2/(2c_1)$, где P – сила натяжения. Сила P и реакция нити на ролик R связаны следующей очевидной зависимостью: $R = 2P \sin \theta$. На основании условия баланса потенциальной энергии имеем $2P^2/(2c_1) = R^2/2c_1^*$. Отсюда следует $c_1^* = 2c_1 \sin^2 \theta$. Аналогичная зависимость связывает коэффициенты рассеяния: $\psi_1^* = 2\psi_1 \sin^2 \theta$. Приведённый коэффициент жёсткости системы равен $c = 2c_1 \sin^2 \theta + c_2$, а приведённый коэффициент рассеяния $\psi = 2\psi_1^* c_1^* / c + \psi_2 c_2 / c$ [4, 5].

В качестве безразмерной обобщённой координаты примем $q = \text{tg} \theta = y/L$. Тогда $\sin^2 \theta = q^2 / (1 + q^2)$ и $c = c_2 [1 + 2\zeta^2 q^2 / (1 + q^2)]$, где $\zeta^2 = c_1 / c_2$. Потребуем, чтобы при $\theta = \theta_0$ имело бы место статическое равновесие системы. Для определения внешней силы F_0 , которую необходимо приложить к системе при $\theta = 0$, составим уравнение статического равновесия:

$$c_2 y + F_0 = 2\zeta^2 c_2 L \int_0^q \frac{q^2}{(1 + q^2)} dq \quad (1)$$

Здесь левая часть равенства отвечает реакции F_1 со стороны пружины компенсатора, а правая часть – реакции R со стороны нити. После интегрирования правой части (1) получаем

$$w = (2\zeta^2 + 1) \text{tg} \theta_0 - 2\zeta^2 \theta_0, \quad (2)$$

где $w = F_1(\theta_0) / (c_2 L)$.

Далее рассмотрим источники возбуждения колебаний. Пусть $l = l_0 f(t)$, где $f(t) = 1 + \Delta f(t)$. Принимая во внимание, что $y/l = \sin \theta$, имеем $\theta(t) = \arcsin(f^{-1}(t) \sin \theta_0)$. Можно показать, что при этом на систему действует кинематическое возбуждение, которое в безразмерной форме с достаточной точностью описывается как $y^*(t) = 2c_2 \zeta^2 \sin^3 \theta_0 [1 - f^{-1}(t)]$. При учёте (1),(2) система описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + 2\delta k \dot{q} \sqrt{(1 + 2\zeta_*^2 \sin^2 \theta_0)} + k^2 [q(1 - h_2 \eta_2(-q)) + h_1 q^2 \eta_1(q - q_1) + 2\zeta_*^2 (q - \arctg q)] = \\ = k^2 (w_* + \Delta w(t)). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\zeta_*^2 = \zeta^2 \eta_1(q) \eta_2(q - q_1)$; $\eta_1(q)$, $\eta_2(q - q_1)$; η_i – единичные функции, управляющие «подключением» c_1 ; q_1 – координата установки упора; $\Delta w(t) = 2\zeta_*^2 [\text{tg}(\theta_0 + \Delta\theta) - \text{tg} \theta_0 + \Delta\theta]$, $w_* = w(\zeta_*)$; $\Delta\theta = \arcsin(f^{-1}(t) \sin \theta_0) - \theta_0$.

2. Так как положение «статического» равновесия оказывается функцией времени, то в нелинейной системе спектр «собственных» частот зависит не только от амплитуды колеба-

ний, но и от времени, а, следовательно, наряду с кинематическим возбуждением возможно и параметрическое [6,7]. При этом возможны существенные коррективы диссипативных характеристик [4,5]. В частности, в [4], было исследовано дифференциальное уравнение

$$\ddot{q} + 2n_0\dot{q} + k_0^2(1 - \varepsilon \sin pt)q = a\omega^2 \sin(\omega t - \gamma_1),$$

где k_0 – усреднённая частота свободных колебаний.

На основании условий энергетического баланса, принимая $\omega = 2k_0$, $q = A \sin(\omega t - \gamma_2)$, можно показать, что возможен установившийся режим с амплитудой

$$A = 0,5\omega^2 k_0^{-2} a \sin(\gamma_2 - \gamma_1) / (\delta - \delta_* \cos 2\gamma_2). \quad (4)$$

Здесь $\delta = n_0 / k_0 = \psi / (4\pi)$; $\delta_* = 0,25\varepsilon$; $\gamma_2 - \gamma_1 = \pi / 2$.

Из формулы (4) следует, что амплитуда A в первом приближении отвечает некоторой условной системе при отсутствии параметрического возбуждения, но с изменённым уровнем диссипации $\delta - \delta_* \cos 2\gamma_2$. При $\delta < \delta_* \cos 2\gamma_2$ в рамках линейной постановки задачи установившийся режим не возможен ($A \rightarrow \infty$). Представив в виде усечённого ряда Маклорена функцию $\arctg y \approx y - y^3 / 3$ и временно исключив из рассмотрения влияние упругих упоров, приведём уравнение (5) к виду уравнения Дуффинга

$$\ddot{q} + 2\delta p_0 \dot{q} + \Psi(q) = [w + \Delta w(t)]k^2,$$

где $\Psi(q) = k^2(q + 2\zeta_*^2 q^3 / 3)$; $p_0 = \sqrt{1 + 2\zeta_*^2 \sin^2 \theta_0}$ – «собственная» частота в положении равновесия.

Принимая решение в виде $q = A_0 + A \sin \omega t$, с помощью метода гармонической линеаризации запишем линеаризованное дифференциальное уравнение в виде

$$\ddot{q} + 2\delta p_0 \dot{q} + p^2(A_0, A)q + \Psi_0(A_0, A) = W_0 + W_1 \sin(\omega t + \gamma). \quad (5)$$

С помощью метода гармонической линеаризации получаем $A_0^2(t) = 2 / [3\zeta_*^2 \text{tg}^2(\theta_0 + \Delta\theta(t))]$.

При $A \rightarrow 0$ имеем $p^2(A_0, t) = k^2 \{1 + 2\zeta_*^2 \text{tg}^2[\arcsin(f^{-1}(t) \sin \theta_0)]\}$.

При $f(t) = 1 - a \sin \omega t$. Отсюда следует

$$\Delta p^2 = p_1^2 - p_0^2 = 2k^2 \zeta_*^2 [\sin^2 \theta_0 / (f^2 - \sin^2 \theta_0) - \text{tg}^2 \theta_0],$$

где p_1^2, p_0^2 – значения функции p^2 при $f = 1 - a$ и $f = 1$.

Тогда глубина пульсации параметрического возбуждения ε и максимальное критическое значение коэффициента демпфирования δ_* определяются как

$$\varepsilon = \zeta^2 a^2 / (1 + \zeta^2 a^2 + 2\zeta^2 \text{tg}^2 \theta_0); \quad \delta_* = 0,5\varepsilon. \quad (6)$$

На основании (6) построены графики $\delta_*(a, \zeta)$ (рис.2) при $\theta_0 = 0,3$ и $\delta_*(\theta_0, \zeta)$ при $a = 0,2$. При $\theta_0 \rightarrow \pi / 2$ имеем $\delta_* \rightarrow 0$, и параметрическое возбуждение отсутствует.

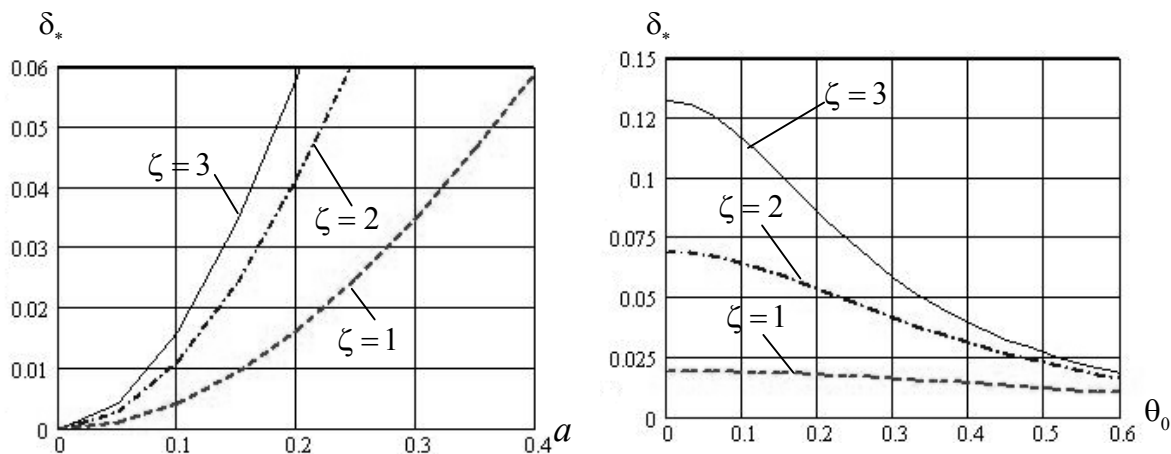


Рис.2

Амплитуда резонансных вынужденных колебаний с учётом корректив, вызванных параметрическим возбуждением, может быть оценена следующим образом:

$$A_* = a\zeta^2 \sin^3 \theta_0 (1 + 2\zeta^2 \sin^3 \theta_0)^{-1} [\delta - \delta_*(\zeta, \theta_0, a)]^{-1}. \quad (7)$$

При $\delta \leq \delta_*$ формально $A_* \rightarrow \infty$, однако за счёт нелинейных факторов происходит срыв колебаний, поэтому неограниченное возрастание амплитуд не реализуется. Можно показать, что амплитуда параметрических колебаний при учёте нелинейности в нашем случае определяется как

$$A_\varepsilon = \sqrt{2\zeta^{-2}(z^2 - 1) \pm \sqrt{(0,25\varepsilon^2 - z^2\delta^2)/(1 + 2\zeta^2 \sin^2 \theta_0)^2}}, \quad (8)$$

где $z = \omega / (k\sqrt{1 + 2\zeta^2 \sin^2 \theta_0})$.

Графики функции $A_\varepsilon(z, \zeta)$ для $a = 0,5$ приведены на рис.3. Штриховыми линиями показаны неустойчивые ветви амплитудно-частотной характеристики. При $0,5\varepsilon = z\delta$ наступает срыв колебаний.

С целью проверки эффективности полученных выше аналитических оценок проведён численный эксперимент на базе нелинейного дифференциального уравнения (5). Линии 1 и 2 на графике $q(t)$ отвечают положению упоров, а прямая 3 – положению равновесия, определённого по условию (1). На рис.4 приведены характерные режимы ($k = 2c^{-1}$, $\theta_0 = 0,3$, $\zeta = 3$), возникающие при совместном кинематическом и параметрическом возбуждении.

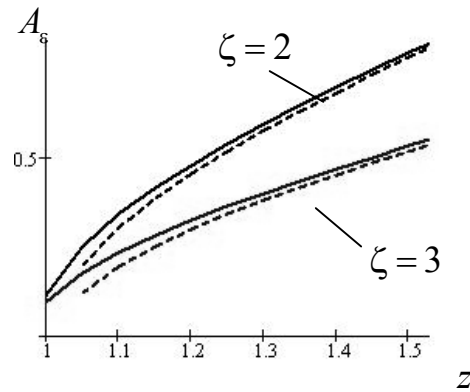


Рис.3

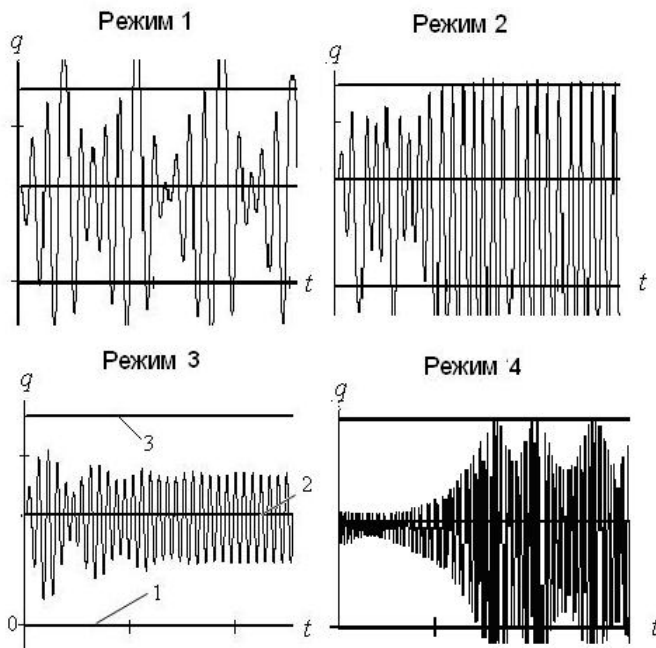


Рис. 4

Режимы 1,2 ($\omega = 3,2 \text{ с}^{-1}$). Система находится в окрестности «собственной» частоты (см. выше), однако, из-за нелинейной характеристики в частотном спектре наиболее значительная пульсация имеет место на частоте 2ω . Следовательно, $p \approx \omega$, что одновременно отвечает зоне главного параметрического резонанса. О параметрической природе возбуждения свидетельствует наблюдаемый на графиках экспоненциальный характер нарастания колебаний, сопровождающийся в режиме 1 срывом колебаний. При подключении упоров (режим 2) дополнительное возбуждение и рост виброактивности, как уже отмечалось, связаны с возникновением виброударных режимов.

Режим 3 ($\omega = 3,9 \text{ с}^{-1}$). При повышении частоты ω система выходит за пределы области динамической неустойчивости и совершает вынужденные колебания под воздействием кинематического возбуждения.

Режим 4. Поскольку спектр пульсации содержит также гармонику на частоте ω , можно было также ожидать параметрическое возбуждение в окрестности $\omega \approx 2p$, что и подтвердилось при численном эксперименте. В рассматриваемом режиме вынужденные колебания имеют относительно незначительную амплитуду, в то время как параметрические колебания проявляются достаточно интенсивно. Срыв нарастания колебаний происходит при резких изменениях частотного спектра в зоне упоров.

3. Рассмотрим ещё один распространённый случай, когда возмущение носит импульсный характер. Пусть $f(t) = 1$ при $t < t_1$ и $t > t_2$; $f_i(t) = 1 \pm \sigma [1 - \sigma_1 + \sigma_1 \sin[(t - t_1)\pi / (t_2 - t_1)]]$ при $t_1 \leq t \leq t_2$. При $\sigma_1 = 0$ импульс имеет прямоугольную форму, а при $\sigma_1 = 1$ – форму полуволны синусоиды; $i = 1$ соответствует знаку плюс, а $i = 2$ – знаку минус.

При колебаниях в окрестности положения равновесия «собственная» частота описывается зависимостью [8].

$$p_i = k \sqrt{1 + 2\zeta^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{f_i^2 - \sin^2 \theta_0}}. \quad (9)$$

При этом дифференциальное уравнение (1) может быть представлено как

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + p^2(t)q = w(t).$$

Согласно методу условного осциллятора общее решение этого уравнения запишем следующим образом [4,5]:

$$q = A_0 \exp\left[-\int_0^t n(\xi) d\xi\right] \sqrt{\frac{\Omega(0)}{\Omega(t)}} \cos[\Phi(t) + \gamma] + \frac{1}{\Omega(t)} \int_0^t \left\{ \frac{w(u)}{\sqrt{\Omega(u)}} \exp\left[-\int_u^t n(\xi) d\xi\right] \sin\left[\int_u^t \Omega(\xi) d\xi\right] \right\} du. \quad (10)$$

Здесь $A_0 = A(0)$; $\Phi(t) = \int_0^t \Omega(\xi) d\xi$; $\Omega(t) = \Omega_* \exp[z(t)]$, где Ω_* – произвольный параметр с размерностью частоты, z определяется из дифференциального уравнения:

$$\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2 + 2\Omega_*^2 \exp 2z(t) = 2\tilde{p}^2(t), \quad (11)$$

где $\tilde{p}^2 = p^2 - \dot{n} - n^2$. Можно показать, что из-за малого влияния диссипации на «собственную» частоту $\tilde{p}^2 \approx p^2$.

На рис.5,а показан фазовая траектория при прямоугольном параметрическом импульсе [4,8,9]. Участок *OM* отвечает колебаниям около нового положения статического равновесия, а участок *MN* – колебаниям, возникающим при возвращении к начальному положению равновесия.

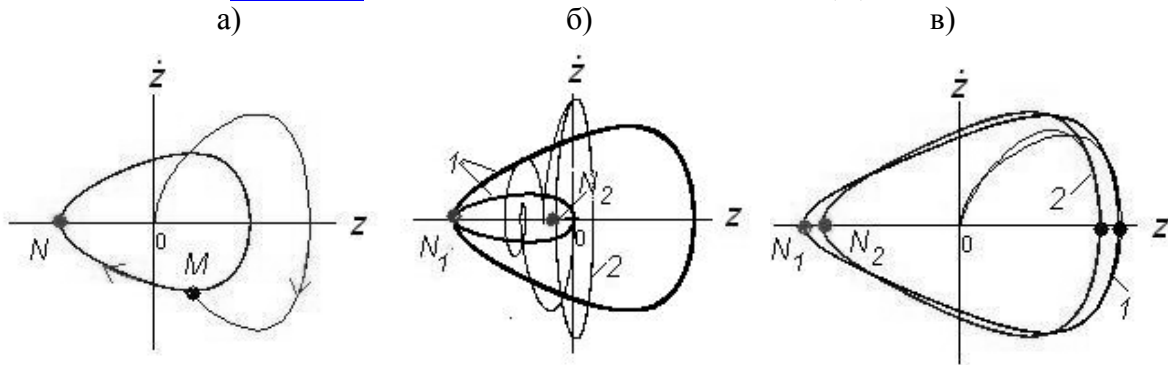


Рис.5

При этом $A_{\max} = A_0 \exp[-0,5z_{\min}]$. Чем выше значение z , отвечающее точке переключения M , тем больше энергия вносимая в систему, а следовательно, и амплитуда динамического последействия от приложенного импульса. Значение z_{\min} определяется из следующего квадратного уравнения (точка N), полученного на основании (10) при $z' = 0$:

$$\exp(2z_{\min}) - \exp(z_{\min})[1 + v_*^2 + (1 - v_*^2)\exp(-z_1)] + 1 = 0. \quad (12)$$

Используя формулы (10),(12), можно показать, что без учёта диссипации коэффициент возрастания амплитуды $\kappa = A/A_0$ при параметрическом импульсе определяется следующим образом:

$$\kappa = \exp(-0,5z_{\min}) = \sqrt{H \pm \sqrt{H^2 - 16v_*^4}} / (2v_*), \quad (13)$$

где $H = (1 + v_*^2)^2 - (1 - v_*^2)^2 \cos 2\tau_*$; $\tau_* = p_1 \Delta t$. Знак в подкоренном выражении должен соответствовать наибольшему значению.

Согласно (13) $\kappa_{\max} = v_*^\alpha$ при $\alpha = \text{sign}(v_* - 1)$. Таким образом, можно утверждать, что уровень свободных колебаний при воздействии одиночного параметрического импульса при самых неблагоприятных фазовых случаях лимитируется неравенством

$$q_{\max} \leq A_0 \kappa_{\max} \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right].$$

Для сопоставления динамических эффектов при прямоугольном и синусоидальном импульсах для относительно больших и малых значений Δt на рис.5,б,в приведены фазовые траектории (кривые 1 и 2). При $\Delta t/T_z > 1 - 2$ положения точек N_1 и N_2 существенно различаются (рис.5,б), причём $(z)_{N_1} < (z)_{N_2}$, что свидетельствует о большем квазиударном эффекте при прямоугольном импульсе. Если теперь сократить время синусоидального импульса до $\Delta t < 0,25T_z$, точки N_1 и N_2 практически располагаются рядом (рис.5,в). Это указывает на идентичный динамический эффект и на малое влияние формы импульса.

На рис.6 показан ряд колебательных режимов, полученных компьютерным моделированием при параметрических импульсах. Для удобства сопоставления динамических эффектов в зависимости от длительности импульса Δt возбуждение на каждом режиме осуществлялось при двух последовательных импульсах, сдвинутых по времени и различающихся величиной Δt . При этом первый импульс – «длинный», а второй – «короткий», настройка которого производилась, исходя из выявленного при аналитическом исследовании максимального значения коэффициента возрастания амплитуды κ_{\max} (см. формулу (13)). В дополнении к ранее введённым обозначениям на графиках показана прямая 2^* , соответствующая положению равновесия при максимальной пульсации собственной частоты.

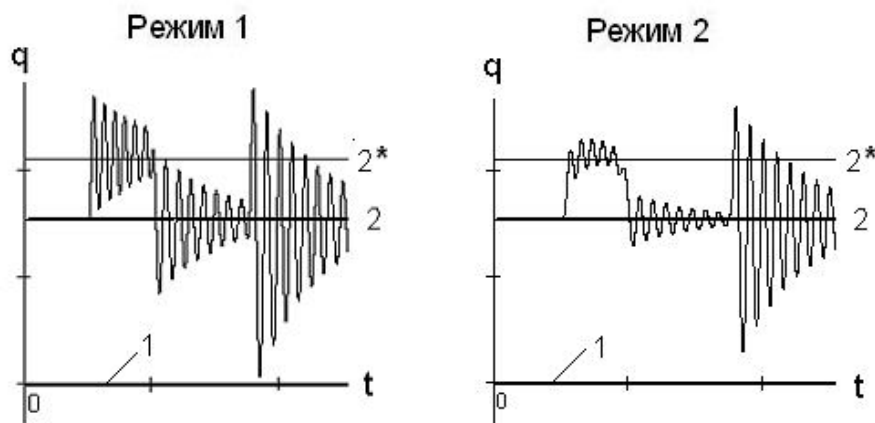


Рис.6

Оба графика иллюстрируют динамические эффекты при импульсном характере увеличения длины $l(t)$ на отрезке времени Δt . В этом случае новое положение равновесия соответствует росту приведённого коэффициента жёсткости, что связано с возрастанием угла θ .

Режим 1 соответствует прямоугольной форме импульсов. При относительно большом значении длительности для первого из двух последовательных импульсов в этом режиме имеем чёткое разделение двух «скачков» в начале и в конце импульса. При «коротком» импульсе положение равновесия практически остаётся неизменным, причём амплитуда колебаний близка к максимальному отклонению при первом импульсе.

Режим 2 отличается более гладкой формой функции f_1 , отвечающей полуволне синусоиды. Это привело к существенному уменьшению амплитуд колебаний от первого импульса и почти не повлияло на амплитуду от второго импульса, что полностью согласуется с результатами аналитического исследования (см. пояснения к рис.5).

К аналогичным выводам приводит анализ режимов для случая $f_2(t)$ ($i = 2$), однако в этом случае влияние формы импульса при относительно больших значениях Δt проявляется более резко. По существу, в обоих случаях наблюдается примерно одинаковый уровень амплитуд возбуждаемых колебаний, однако при $i = 1$ относительное значение импульса $|\Delta f_i(0)|$ составляло 100%, а при $i = 2$ – 20%. Это связано со значительным снижением приведённой жёсткости по мере приближения к $q = 0$ и $\theta = 0$. При этом существенным образом проявляется параметрический характер возбуждения, в то время как при $i = 1$ возбуждение в основном является кинематическим. При определённых условиях $q < 0$, что приводит к разрыву кинематического контакта компенсатора натяжения с гибким элементом и к возникновению виброударных режимов. Этот случай также интересен при динамическом анализе прыжков на батуте.

Литература

1. Вейц В.Л., Бейлин И.Ш., Меркин В.М. и др. Динамика и оптимизация механизмов с гибкими связями.– СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004.
2. Меркин Д.Е. Введение в механику гибкой нити.– М.: Наука, 1980.
3. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей.– М.: Машиностроение, 1978.
4. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия.– Л.:Машиностроение, 1990.
5. Вульфсон И.И. Колебания в машинах.– СПб.: Изд-во СПГУТД, 2006, 2008.
6. Коловский М.З. О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейной системе // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ №226. М.,Л.: Машгиз, 1963. С.7-17.
7. Вульфсон И.И. Исследование колебаний механизмов с гибкими связями при парамет-

7. рическом и кинематическом возбуждении //Теория механизмов и машин.Т.6. №1(15). 2010. С.3–13.
Вульфсон И.И. Колебания механизмов с гибкими связями при параметрических импульсах. // Теория механизмов и машин. №2 (16), Т.8, 2010. С.3–13.
8. Вульфсон И.И. Колебания механизмов с гибкими связями при параметрических импульсах. // Теория механизмов и машин. №2 (16), Т.8, 2010. С.3–13.
9. Vul'fson J.I. Analytical investigation of the vibration of mechanisms caused by parametric impulses.// Mechanism and Machine Theory. Vol.10, 1973. Pp. 305–313.

Поступила: 12.08.12.