

УДК 531

О ФИЛЬТРАЦИИ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ: ДВУМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ

© Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Проведены аналитические исследования проблем, связанных с прохождением периодических сильно нелинейных (виброударных) процессов через многомерные машинные конструкции, моделируемые посредством дискретных 2D механических систем с регулярными структурами — многомерными механическими фильтрами низших частот. Выяснен физический смысл полученных решений, выведены расчетные формулы и описаны главные динамические эффекты. Введено понятие метрики фильтра.

Ключевые слова: регулярные структуры, 2D-виброполя, удары, частотно-временные методы, собственные частоты, фильтры низших частот..

1. Решение проблем связанных с изучением особенностей прохождения вибрации, сопровождаемой соударениями элементов конструкций, через различные технические объекты представляются весьма важными и актуальными, в частности для создания научных основ проектирования машин. В работе [1] рассмотрены задачи фильтрации виброударных процессов в D фильтрующих системах, элементы которой расположены вдоль некоторой оси. В линейной постановке они рассматривались, в частности, в [2]. Учет соударений элементов конструкций был проведен, в частности, в работах [1, 3-7]. Далее рассмотрены задачи о прохождении периодических виброударного процесса через 2D-механические фильтры низших частот, элементы которых представляют, например, двухмерные решетчатые конструкции.

Для анализа используются решения, получаемые при помощи методов частотно-временного анализа [3,4 7-10]. Итак, рассмотрим решетчатую конструкцию(рис.1) с единственным двусторонним ограничителем. Здесь вместо линейной структуры имеется плоская (решетчатая), составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих[11, 12]

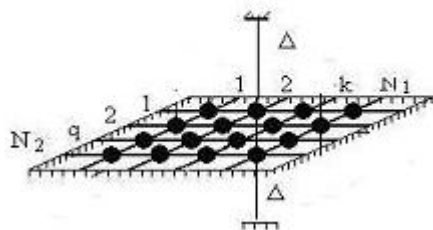


Рис.1

одинаковых линейных струн, образующих прямоугольную конструкцию. Струны заземлены на концах и имеют соответственно длины L_1 и L_2 . Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0, 1, 2, \dots, N_1$ и $q = 0, 1, 2, \dots, N_2$. В вершинах решетки помещены точечные абсолютно твердые тела с одинаковыми массами m .

Предполагается, что прямоугольные ячейки решетки одинаковы, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка (дискретный аналог мембраны) - анизотропная. Струнные элементы предполагаются безынерционными.

Крепления струн в узлах считаются абсолютно жесткими, а их натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь. Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину ΔL_1 ; «вертикальная» - ΔL_2 . Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение T_1 , а «вертикальные участки» - соответственно T_2 .

Динамика решетчатой конструкции описывается посредством N функций прогибов $u_{kq}(t)$, где индексы $k=1,2,.. N_1$; $q=1,2,.. N_2$. Каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Считаем, что первый по счету индекс (в данном случае k) – нумерует струны «слева направо» или наоборот - рис.1, а второй индекс (в данном случае q) – «снизу вверх» или наоборот, рис 1.

Параллельно плоскости статического равновесия решетки на расстоянии вблизи фиксированного узла (k,q) установлен двусторонний ограничитель хода, образованный парой препятствий с которым точечное тело, находящаяся в узле решетки может совершать соударения; удары предполагаются прямыми и центральными.

В данном случае, в предположении T -периодичности и симметричности процесса, сила удара записывается при помощи симметричных периодических δ -функций Дирака [3, 4]. Обозначив эту силу как $\Phi_0[u_{kq}(t), u_{kqt}(t)]$ имеем:

$$\Phi_0[u_{kq}(t), u_{kqt}(t)] = J\delta^{T/2}(t-t_0).$$

Причем симметричная T -периодичная δ -функция

$$\delta^{T/2}(t) = -\delta^{T/2}(t+T/2),$$

$$\delta^{T/2}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(t - kT\right) - \delta\left(t - kT - \frac{T}{2}\right) \right] = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(2k+1)i\omega t}.$$

В случае двусторонних ограничителей колебания происходят в пределах зазора:

$$u_{kq}(t) \leq \Delta; 0 \leq t < T, \tag{1}$$

Предположение о симметричности системы приводит соотношению $u_{kq}(t) = -u_{kq}(t+T/2)$. Таким образом, если при $t=t_0$ происходит соударение фиксированного узла с ограничителями [3,4], то, например, для верхнего (рис.1) ограничителя:

$$u_{kq}(t_0) = \Delta_{kq}, u_{tkq}(t_0-0) = -Ru_{tkq}(t_0+0) < 0; 0 < R \leq 1; u_{kq}(t) < \Delta_{kq}; 0 \leq t < T/2. \tag{2}$$

Для нижнего ограничителя соотношения (2) соответственно меняются:

$$u_{kq}(t_0) = -\Delta_{kq}, u_{tkq}(t_0-0) = -Ru_{tkq}(t_0+0) > 0; 0 < R \leq 1; u_{kq}(t) > -\Delta_{kq}; T/2 \leq t < T. \tag{3}$$

Здесь и далее нижняя индексация по переменной t означает дифференцирование. Входящее сюда четвертыми неравенства запрещает узлам решетки оказываться «за ограничителями» и накладывает на систему неударивающие связи, ограничивая конфигурационное пространство системы; R – коэффициент восстановления [3, 4].

2. Пусть силы диссипации, вынуждающие силы, а также любые другие неконсервативные силы, действующие в решетке на каждое из массивных точечных тел – малы. Обозначив их $\varepsilon g_{ij}(t, u_{ij}, u_{ij}, \dots)$, где многоточие обозначает прочие неучитываемые сейчас переменные, ε - малый параметр, модель системы построим следующим образом [2, 11, 12]. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то для всех значений индексов имеем N уравнений:

$$m u_{ijtt} + c_1(2u_{ij} - u_{(i-1,j)} - u_{(i+1,j)}) + c_2(2u_{ij} - u_{(i,j-1)} - u_{(i,j+1)}) = \varepsilon g_{ij}(t, u_{ij}, u_{ij}, \dots) + \Phi_{kq}(\varepsilon, u_{ij}, u_{ij}), \tag{4}$$

где функции Φ – сингулярная симметричная обобщенная функция, описывающая ударное взаимодействие в фиксированной ударной паре [3, 4]. При этом предполагается, что удар близок к упругому: $1-R = \varepsilon\rho > 0$. Здесь также соответственно обозначено: $c_{1,2} = T_{1,2}/\Delta L_{1,2}$ – коэффициенты упругости. Граничные условия заземления можно записать как ([2, 11, 12]) $u_{ij} = 0$, при $i=0; N_1; j=0; N_2$. Поэтому $N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$. При необходимости сюда могут быть добавлены начальные условия. Однако далее рассматриваются установившиеся режимы движения. И поэтому вид начальных условий – несущественен.

Пусть внешняя сила $\varepsilon g_{ij}(t, u_{ij}, u_{ij}) = \varepsilon g_{ij}(t + T/2, u_{ij}, u_{ij})$ – симметрична. Ограничимся здесь линейной моделью трения и синусоидальным возбуждением, приложенным к каждому узлу решетки. Тогда в соответствии с общими алгоритмами частотно-временного анализа виброударных процессов [3, 4, 7-10] для решетчатых систем, учитывая, что в данном случае в системе имеется лишь одна ударная пара, имеем:

$$u_{kq,kq} = f_{kq}(t) - J_{kq} \chi_{kq,kq}(t - \varphi_{kq}). \tag{5}$$

$$u_{ij,kq} = f_{ij}(t) - J_{ij} \chi_{kq,ij}(t - \varphi_{ij}). \tag{6}$$

Здесь $f_{kq}(t)$ и $f_{ij}(t)$, движения узлов в пренебрежении ударами; J_{kq} и φ_{kq} – импульс и фаза удара в выделенной ударной паре, J_{ij} «амплитудный коэффициент», φ_{ij} – фаза процесса в узле (i, j) . Сдвиг между фазами φ_{kq} и φ_{ij} определяются семейством операторов динамической податливости, определяющих модель системы. В работе [12] были построены и семейства операторов динамической податливости $L_{kn,ij}(p)$, и отвечающее им семейство периодических функций Грина (ПФГ) $\chi_{km,ij}(t)$.

С учетом результатов работы [2] было показано следующее.

$$L_{kq,nj}(p) = \zeta \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(a\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(\beta j\pi N_2^{-1}) (\Omega_{\alpha\beta}^2 + p^2)^{-1}. \tag{7}$$

Здесь собственные частоты решетки

$$\Omega_{kq}^2 = \frac{2T_1}{m\Delta L_1} [1 - \cos(k\pi N_1^{-1})] + \frac{2T_2}{m\Delta L_2} [1 - \cos(q\pi N_2^{-1})], \tag{8}$$

Здесь нормировочный коэффициент ζ , в общих случаях удобнее всего вычислять при заданных параметрах системы. В данном случае можно положить: $\zeta = 2[(N_1 - 1)(N_2 - 1)]^{-2}$. В соответствии с найденным, симметричная ПФГ системы (реакция линейной системы на силовое воздействие) $\delta^{T/2}(t)$ (см. начало п.1.) имеет вид [3,4]

$$\chi_{kq,nj}(t) = \frac{2}{T} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} L_{kq,nj}[i(2\sigma+1)\omega] \exp[i(2\sigma+1)\omega t]. \tag{9}$$

Причем выражение для $L_{kq,nj}(p)$ определяется формулой (7) или другими эквивалентными выражениями. Например, таким, получающимся после подстановки (7) в (9):

$$\chi_{kq,nj}(t) = \tag{10}$$

$$= \frac{2}{T} \zeta \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \exp[i(2\sigma+1)\omega t] \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(a\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(\beta j\pi N_2^{-1}) / (\Omega_{\alpha\beta}^2 - (2\sigma+1)^2 \omega^2).$$

Заметим, что в данном случае в уравнениях движения не учтено вязкое трение. Этот учет может быть проделан без труда [3, 4, 9]. Однако определяющие формулы становятся чересчур громоздкими и слабо влияют на окончательные результаты; см. также [9, 10].

Заметим, что для «элементарных» операторов $(\Omega_{\alpha\beta}^2 + p^2)^{-1}$ соответствующие ПФГ могут быть записаны не только в виде бесконечных рядов, но и при помощи конечных формул [3, 4, 9]. В данном случае оказывается:

$$\chi_{\alpha\beta}(t) = (2\Omega_{\alpha\beta})^{-1} \sin[\Omega_{\alpha\beta}(t-T/4)] \cos^{-1}(\Omega_{\alpha\beta}T/4), \quad (11)$$

причем это представление имеет место только при $0 \leq t < T/2$, а для других всех других значений t необходимо продолжить это представление по периодичности на всю числовую ось учитывая также и условие симметрии $\chi_{\alpha\beta}(t+T/2) = -\chi_{\alpha\beta}(t)$.

Представление (11) должно быть скорректировано при выходе значения аргумента из интервала периодичности или, соответственно, симметрии. Соответствующие формулы здесь не понадобятся и не выписываются [3, 4, 12]. Приведенные представления позволяют существенно упростить (10), так что можно записать:

$$\chi_{kq,nj}(t) = \zeta \sum_{\alpha=1}^{N_1-1} \sum_{\beta=1}^{N_2-1} \sin(k\alpha\pi N_1^{-1}) \sin(q\beta\pi N_2^{-1}) \sin(\alpha n\pi N_1^{-1}) \sin(\beta j\pi N_2^{-1}) \chi_{\alpha\beta}(t), \quad 0 \leq t < T/2, \quad (12)$$

где выражение $\chi_{\alpha\beta}(t)$ определяется при помощи (11). Заметим также, что конечные выражения типа (12) могут быть выписаны и для «элементарного» оператора $(\Omega_{\alpha\beta}^2 + 2\Psi_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}p + p^2)^{-1}$. Сложность записей соответствующих выражений определяет редкость их использования при проведении практических расчетов [3, 4, 10].

Теперь мы имеем все необходимое для построения решений (5), (6).

3. В формулы (5) и (6) входят решения линейных задач $f_{ij}(t)$. В соответствии со сделанным предположением внешние силы $g_{ij}(t)$ - T -периодичны и симметричны. В соответствии с соотношениями частотно-временного анализа [2-4] имеем:

$$f_{kq}(t) = \varepsilon \sum \sum_{n,j} \int_0^{T/2} \chi_{kq,nj}(t-s) g_{nj}(s) ds, \quad (13)$$

где двойное суммирование ведется по всем индексам n и j . В формуле (13) индексы k и q не фиксированы, а свободны. В данном случае, когда к каждому узлу приложена сила из семейства $\{A_{kQ} \cos(vt + \varphi_{kQ})\}$, используя формулу (13), находим:

$$f_{kq}(t) = \sum_{(k,Q)} A_{kQ} L_{kq,kQ}(i\nu) \cos(vt + \Psi_{kQ}), \quad \Psi_{kQ} = \arg [L_{kq,kQ}(i\nu)] + \varphi_{kQ}. \quad (14)$$

Импульс и фаза удара - J_{kq} и φ_{kq} определяются из условий (2) и (3). В соотношения для них мы не приводим (см. [2, 12]).

В случае не учета вязкого трения, а при решении задачи фильтрации это вполне допустимо [2, 5], совмещая удар o , например, верхний ограничитель с началом отсчета времени, можно положить $\varphi_{kq} = 0$. В результате получаем аналог хорошо известного [3, 4] соотношения:

$$J_{kq} = \Delta/\chi_{kq,kq}(0); J_{ij} = J_{kq}. \tag{15}$$

С помощью соотношения (12) представление (15) можно конкретнее связать с параметрами системы. На рис. 2. Показаны эскизы зависимостей $J(\omega)$ в случае отсутствия трения (15) и при учете вязкого трения [3, 4].

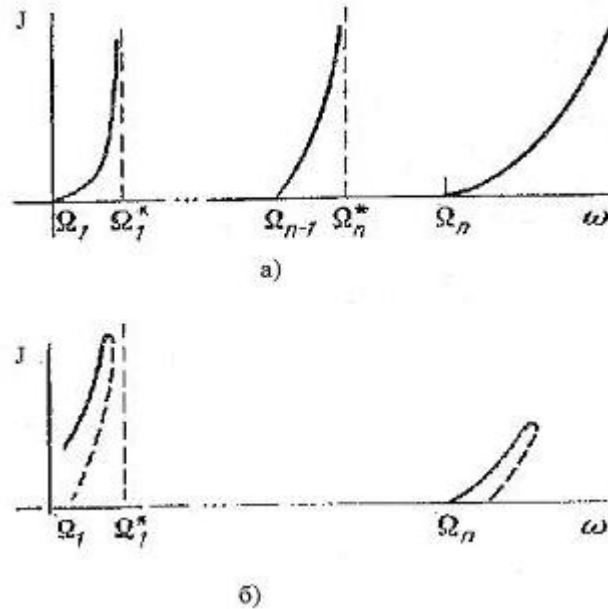


Рис.2

Здесь $n=(N_1-1)(N_2-1)$; семейство частот $\{\Omega_k^*\}$ -суть простые корни уравнения $\chi_{kq,kq}(\omega;0)=0$.

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с фильтрацией систематического ударного воздействия. В работах [8-10] было отмечено, что широкий класс линейных систем обладает свойством фильтра низших частот: высшие гармоники возбуждения хуже воспринимаются ими, чем низшие. В нашей задаче это свойство хорошо видно из следующего рассуждения.

Если $L_{kq,kq}(p)=O(p^{-2})$, то режим движения $u_{kq}(t)$ непрерывен, но имеет разрывную производную: ряд Фурье, его определяющий, содержит коэффициенты $O(\kappa^{-2})$. Легко показать, что, например, для режимов движения $u_{(k\pm 1, q\pm 1); k\pm 1, q\pm 1}(t)$ тел, соседних с фиксированным, определяющие их локальные операторы описываются функциями, которые имеют скорость убывания при $p \rightarrow \infty$ уже не меньше, чем $O(p^{-3})$, и, вообще, при удалении от точки взаимодействия скорость убывания функций операторных функций $L_{qj,qj}(p)$ при $p \rightarrow \infty$ увеличивается: $L_{qj,qj}(p)=O(p^{-\alpha})$, где $\alpha=2+|q-j|$. В соответствии с этим и соответствующие ПФГ, входящие в представления для законов движения узлов решетки имеют $|q-j|$ непрерывных производных, и при большом удалении узла от фиксированного движение оказывается весьма близким к синусоидальному лишь первая гармоника оказывается существенной. Убедиться в описанном свойстве операторов можно, непосредственно исходя из их записи [2, 12] (с учетом ортогональности матрицы собственных форм линейной системы $[\Theta_{kq}=C\sin(kn\pi N_1^{-1})\sin(qj\pi N_2^{-1})]$, $C=\text{const}$, которые определяют вид операторов динамической податливости, в данном случае, решетчатых конструкций) или из уравнений движения посредством их дифференцирования. Заметим также, что при достаточно высокой частоте вынуждающей силы подавляться будут даже первые гармоники; удаленные тела вообще могут практически находиться в состоянии покоя. Таким образом фильтрация виброударного режима в решетчатых конструкциях аналогична фильтрации в протяженных цепочках: при удалении от соударяющегося тела режимы стремятся к большей гладкости и уменьшаются по амплитуде.

Необходимо заметить, что в решетчатых конструкциях понятие удаленности имеет более сложный смысл, чем в линейных цепочках. Здесь удаленность определяется ячейками решетки на плоскости. Для узла, находящегося в глубине решетки равноудаленными от него оказываются четыре соседних узла. Для приграничных узлов – равноудалены соответственно три узла. Сказанное позволит нам в дальнейшем ввести понятие *метрики механического фильтра*.

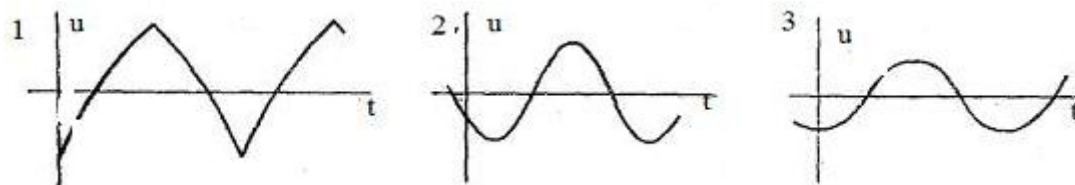


Рис.3.

На рис.3 кривая 1 отвечает виброударному процессу, а две следующих – соответствуют отфильтрованным законам движения.

В дальнейшем проблема фильтрации будет рассмотрена и для виброударных процессов в системах более высокой размерности.

Отметим. Наконец, что решетчатые конструкции, имеющие несколько ударных элементов [11, 12] также могут обладать свойствами фильтра, однако анализ здесь усложняется и задача нуждается в самостоятельных рассмотрениях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-08-00500-а).

Литература

1. Крупенин В.Л. К проблеме фильтрации и вибропередачи виброударных процессов: одномерные линейные фильтры// Интернет журнал «Вестник научно технического развития»(www.vntr.ru). -№9 (61), 2012г.-С.22-29.
2. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
3. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука,1985. – 384 с.
4. Babitsky V.I., Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
5. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных вибропроводов // Машиноведение.-1987. -№1.- С.25-32.
6. В.Л. Крупенин К проблеме фильтрации и вибропередачи виброударных процессов (часть1) // Интернет-журнал «Вестник научно-технического развития» (<http://vntr.ru/ftpgetfile.php?id=605>).- № 6 (58).- 2012 г.- С. 21-26
7. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. – 1995/- Т. 343,- №6. -С. 759-763.
8. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний.// Веприк А.М., Вознюк А.Д., Крупенин В.Л., Чирков И. М.- Л: Машиностроение, 1987.-72 с.
9. Крупенин В.Л. Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин,- 2001.- №3. - С.20-28.
10. Крупенин В. Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения "импульс-фаза" // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2010. - № 1. - С. 34-42.
11. Крупенин В.Л. Колебания решетчатых двумерных конструкций в присутствии препятствий // ДАН.-2006.- Т. 400.- №2. -С. 1-4.

12. В.Л.Крупенин К описанию виброударных процессов в решетчатых двумерных системах// Интернет-журнал (www.vntr.ru). Вестник научно-технического развития. №1.- 2008. - С.22 –32

Поступила: 26.08.12.