π-кинки в параметрически возбужденном уравнении синус-Гордон

В.Ш. Бурд

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Аннотация. Рассматривается параметрически возбужденное уравнение синус-Гордон. Возбуждение представляет собой быстро осциллирующую периодическую функцию с нулевым средним значением. С помощью метода усреднения строится усредненное уравнение как в случае, когда быстро осциллирующая функция имеет постоянную амплитуду, так и асимптотически большую амплитуду. Усредненное уравнение имеет в качестве решений π кинки.

Ключевые слова: уравнение синус-Гордон, параметрическое возбуждение, метод усреднения, π кинки.

Хорошо известно (см. напр. [1,2]), что уравнение синус-Гордон (sine-Gordon) используется для того чтобы описать многие физические эффекты в одномерном приближении, например, контакт Джозефсона в передающих линиях, краевые дислокации в кристаллах, спиновые волны в сверхтекучих фазах A и B гелия ^3He, волны в квазиодномерных ферромагнитных материалах и др. Значительное число работ посвящено развитию техники теории возмущений для систем, близких к интегрируемым, в том числе для систем, близких к уравнению синус-Гордон (см. обзорную статью [3], а также, например, работы [4,5,6,7,8]).

В уравнении синус-Гордон обнаружены три типа волновых решений: фононы, кинки и бризеры. Фононы - это протяженные периодические решения, кинки и бризеры являются уединенными волнами (солитонами). Исследовалось действие возмущения на эти классы решений.

В работах [9,10] рассматривалось параметрически возбужденное быстро осциллирующей периодической функцией уравнение синус-Гордон:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(t,x) + f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin u(t,x) = 0. \qquad (1)$$

Здесь $f(t)$ - периодическая функция с нулевым средним значением и постоянной амплитудой, ε - малый положительный параметр. Целью работ состояло обнаружение в усредненном уравнении π кинков, которые являются приближенными решениями уравнения (1) при достаточно малом ε. Утверждается, что результаты исследования могут быть применены к квазиодномерным ферромагнетикам, которые находятся под действием быстроосциллирующего внешнего магнитного поля. Наличие π кинков оказывает влияние на движение доменных стенок ферромагнетика.

Задача построения усредненного уравнения в [9,10] решается следующим образом.

Вводится гамильтониан

$$H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} - f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \cos u \right) dx,$$

где $p = u_t$. Выполняется несколько канонических преобразований, которые позволяют устранить быстро осциллирующие слагаемые из гамильтониана. Усредненная система уравнений имеет в качестве решения π кинки, которые являются приближенными решениями уравнения (1). Чтобы потвердить это утверждение проводятся численные вычисления при значениях параметров $c = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ и $f(t) = \sin t$. Отметим, что работы [9], [10] почти идентичны.

В этой работе предлагается другой метод построения усредненного уравнения для (1), именно стандартный метод усреднения [11]. Наш подход совпадает с тем, который был использован в [12] для исследования устойчивости состояний равновесия маятника с вибрирующим подвесом.

Обозначим через $\varphi(t)$ периодическую функцию с нулевым средним значением, для которой производная $\varphi'(t)$ удовлетворяет равенству $\varphi'(t) = f(t)$.

От уравнения (1) перейдем к системе уравнений

$$\begin{aligned} &u_t = p - \varepsilon\varphi\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\sin u \\ &p_t = u_{xx} + \varepsilon\varphi\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)p\cos u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(\varphi\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\right)^2\sin 2u. \end{aligned} \tag{2}$$

Легко проверяется, что система (2) эквивалентна уравнению (1). Этот переход по существу является переходом от записи системы в форме Лагранжа к записи системы в гамильтоновой форме.

В системе уравнений (2) перейдем к быстрому времени $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. Получим систему

$$\begin{aligned} &u_\tau = \varepsilon p - \varepsilon^2\varphi(\tau)\sin u \\ &p_\tau = \varepsilon u_{xx} + \varepsilon^2\varphi(\tau)p\cos u - \tfrac{1}{2}\varepsilon^3(\varphi(\tau))^2\sin 2u. \end{aligned} \tag{3}$$

Правые части системы (3) пропорциональны малому параметру ε. Выполним стандартную замену переменных метода усреднения

$$\begin{aligned} &u = \xi + \varepsilon^2 v_2(\tau,\xi) + \varepsilon^3 v_3(\tau,\xi), \\ &p = \eta + \varepsilon^2 w_2(\tau,\xi,\eta) + \varepsilon^3 w_3(\tau,\xi,\eta). \end{aligned}$$

Замена должна устранить время τ из правых частей системы (3), т.е. мы должны получить систему

$$\begin{aligned} &\xi_\tau = \varepsilon\eta + \varepsilon^2 A_2(\xi,\eta) + \varepsilon^3 A_3(\xi,\eta) + O(\varepsilon^4), \\ &\eta_\tau = \varepsilon\xi_{xx} + \varepsilon^2 B_2(\xi,\eta) + \varepsilon^3 B_3(\xi,\eta) + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты A_2, A_3, B_2, B_3. Подставляя формулу замены в систему (3), получим

$$\begin{aligned} &\varepsilon\eta + \varepsilon^2 A_2(\xi,\eta) + \varepsilon^3 A_3(\xi,\eta) + \varepsilon^2 v_{2\tau} + \varepsilon^3 v_{2\xi}\eta + \varepsilon^3 v_{2\eta}\xi_{xx} + v_{3\tau} + O(\varepsilon^4) = \\ &\varepsilon\eta - \varepsilon^2\varphi(\tau)\sin\xi + \varepsilon^3 w_2(\tau,\xi,\eta) + O(\varepsilon^4), \\ &\varepsilon\xi_{xx} + \varepsilon^2 B_2(\xi,\eta) + \varepsilon^3 B_3(\xi,\eta) + \varepsilon^2 w_{2\tau} + \varepsilon^3 w_{2\xi}\eta + \varepsilon^3 w_{2\eta}\xi_{xx} + \varepsilon^3 w_{3\tau} + O(\varepsilon^4) \\ &= \varepsilon\xi_{xx} + \varepsilon^3\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(v_2(\tau,\xi)) + \varepsilon^2\varphi(\tau)\eta\cos\xi - \tfrac{1}{2}(\varphi(\tau))^2\sin 2\xi. \end{aligned} \tag{4}$$

Приравнивая слагаемые в обеих частях равенств (4) при ε^2, получим

$$v_{2\tau} + A_2 = -\varphi(\tau)\sin\xi, \quad w_{2\tau} + B_2 = \varphi(\tau)\eta\cos\xi.$$

В методе усреднения функция $A_2(\xi)$ определяется как среднее значение по переменной τ функции $-\varphi(\tau)\sin\xi$. Так как периодическая функция $\varphi(\tau)$ имеет нулевое среднее значение, то $A_2(\xi) = 0$. Функция $v_{2\tau}(\tau,\xi)$ определяется как периодическая по τ с нулевым средним значением. Отсюда следует, что $v_2 = -\int\varphi(s)ds\sin\xi$, где $\int\varphi(s)ds$ - периодическая функция с нулевым средним значением. Аналогично, находим, что $B_2(\xi,\eta) = 0$ и $w_2(\tau,\xi,\eta) = \int\varphi(s)ds\eta\cos\xi$. Далее, приравниваем слагаемые при ε^3 в равенствах (4). Получим соотношения

$$A_3 + v_{3\tau} + v_{2\xi}\eta + v_{2\eta}\xi_{xx} = w_2(\tau,\xi,\eta),$$

$$B_3 + w_{3\tau} + w_{2\xi}\eta + w_{2\eta}\xi_{xx} = -\frac{1}{2}(\varphi(\tau))^2\sin 2\xi + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_2(\tau,\xi)).$$

Так как средние значения по переменной τ функций $v_{2\xi}\eta$, $v_{2\eta}\xi_{xx}$, $w_2(\tau,\xi,\eta)$ равны нулю, то $A_3(\xi,\eta) = 0$. Точно такие же рассуждения показывают, что B_3 определяется формулой

$$B_3(\xi) = \frac{1}{2}\langle(\varphi(\tau))^2\rangle\sin 2\xi,$$

где $\langle\varphi(\tau)\rangle$ - среднее значение периодической функции $\varphi(\tau)$.

Следовательно, усредненная система имеет вид

$$\begin{aligned}&\xi_\tau = \varepsilon\eta,\\ &\eta_\tau = \varepsilon\xi_{xx} - \varepsilon^3\tfrac{1}{2}\langle(\varphi(\tau))^2\rangle\sin 2\xi.\end{aligned}$$

Вернемся к исходному времени $t = \varepsilon\tau$. Получим усредненную систему во времени t:

$$\begin{aligned}&\xi_t = \eta,\\ &\eta_t = \xi_{xx} - \varepsilon^2\tfrac{\bar a}{2}\sin 2\xi,\end{aligned}$$

где

$$\bar a = \frac{1}{T}\int_0^T(\varphi(\sigma))^2 d\sigma.$$

Эту систему можно записать в виде одного уравнения второго порядка

$$\xi_{tt} - \xi_{xx} + \varepsilon^2\frac{\bar a}{2}\sin 2\xi = 0. \tag{5}$$

Будем искать волновые решения уравнения (5) в виде $\xi(x,t) = r(x-ct)$. Подставляя это выражение в уравнение (5), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(c^2-1)r'' + \varepsilon^2\frac{\bar a}{2}\sin 2r = 0. \tag{6}$$

Умножим уравнение (6) на r' и проинтегрируем. Получим уравнение

$$\frac{r'^2}{2} - \varepsilon^2 \frac{\bar{a}}{2(c^2-1)} \cos 2r = \frac{B}{c^2-1}, \quad B = const. \tag{7}$$

Уравнение (7) - это закон сохранения энергии для системы, описываемой уравнением (6). Потенциал имеет вид

$$V(r) = -\frac{\varepsilon^2 \bar{a} \cos 2r}{2(c^2-1)}.$$

Предположим, что $c^2 - 1 < 0$. Тогда точки 0 и π являтся критическими точками потенциала $V(r)$. Легко видеть, что

$$V''(0) = V''(\pi) = -2\frac{\varepsilon^2 \bar{a}}{1-c^2} < 0.$$

Следовательно, точки 0 и π - точки максимума потенциала, причем $V(0) = V(\pi)$. Эти точки являются седловыми точками уравнения (6). Указанные условия обеспечивают существование у уравнения (5) волнового решения, которое называется кинком, в данном случае π кинком. Вычислим это волновое решение.

Найдем решение уравнения (6), которое удовлетворяет условиям:

$$r(t) \to 0, \quad r'(t) \to 0$$

при $t \to \infty$. Учитывая эти условия, для вычисления искомого решения получаем уравнение

$$r'^2 + \frac{\varepsilon^2 \bar{a}(\cos 2r - 1)}{2(1-c^2)} = 0,$$

или,

$$r'^2 = \frac{\varepsilon^2 \bar{a}(1-\cos 2r)}{2(1-c^2)} = \frac{\varepsilon^2 \bar{a} \sin^2 r}{1-c^2}.$$

Отсюда

$$\frac{dr}{\sin r} = \frac{\varepsilon\sqrt{\bar{a}}}{\sqrt{1-c^2}} ds.$$

Мы ограничиваемся выбором знака плюс в правой части равенства. Интегрируем это равенство

$$\int \frac{dr}{\sin r} = s\frac{\varepsilon\sqrt{\bar{a}}}{\sqrt{1-c^2}} + \delta, \quad \delta = const.$$

Учитывая значение интеграла в левой части последнего равенства, получим

$$\ln |\operatorname{tg} \frac{r}{2}| = s\frac{\varepsilon\sqrt{\bar{a}}}{\sqrt{1-c^2}} + \delta.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \frac{r}{2} = \exp\left(s\frac{\varepsilon\sqrt{\bar{a}}}{\sqrt{1-c^2}} + \delta\right).$$

Откуда

$$r(s) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(s\frac{\varepsilon\sqrt{\bar a}}{\sqrt{1-c^2}}+\delta\right)\right].$$

Таким образом, уравнение (5) имеет волновые решения

$$u(x,t) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left((x-ct)\frac{\varepsilon\sqrt{\bar a}}{\sqrt{1-c^2}}+\delta\right)\right].$$

Такие решения уравнения (5) называются кинками (π кинками).

Мы считаем, что эти решения являются приближенными решениямм исходного уравнения (1) при достаточно малых ε.

Выше предполагалось, что быстро осциллирующая функция $f(t/\varepsilon)$ имеет постоянную амплитуду. Будем считать теперь, что амплитуда колебаний порядка $1/\varepsilon$, т.е. равна $\frac{1}{\varepsilon}H$, где $H = const$. Параметрически возбужденное уравнение синус-Гордон при этих условиях имеет вид

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(t,x) + \frac{1}{\varepsilon}f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin u(t,x) = 0. \tag{8}$$

Обозначим снова через $\varphi(t)$ периодическую функцию с нулевым средним значением, для которой $\varphi'(t) = f(t)$. От уравнения (8) перейдем к системе уравнений

$$\begin{aligned} &u_t = p - \varphi\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\sin u \\ &p_t = u_{xx} + \varphi\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)p\cos u - \tfrac{1}{2}\left(\varphi\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\right)^2\sin 2u. \end{aligned}$$

Переходя к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$, получим систему, в которой правые части пропорциональны малому параметру ε

$$\begin{aligned} &u_\tau = \varepsilon(p - \varphi(\tau)\sin u) \\ &p_\tau = \varepsilon(u_{xx} + \varphi(\tau)p\cos u - \tfrac{1}{2}(\varphi(\tau))^2\sin 2u). \end{aligned}$$

Усредненная система определяется в первом приближении и имеет вид

$$\begin{aligned} &\xi_\tau = \varepsilon\eta \\ &\eta_\tau = \varepsilon(\xi_{xx} - \tfrac{1}{2}\langle(\varphi(\tau))^2\rangle\sin 2\xi). \end{aligned}$$

Теперь усредненная система во времени t имеет вид

$$\begin{aligned} &\xi_t = \eta \\ &\eta_t = \xi_{xx} - \tfrac{1}{2}\langle(\varphi(t))^2\rangle\sin 2\xi. \end{aligned}$$

Полагаем $\bar a = \langle(\varphi(t))^2\rangle$ и записываем усредненную систему в виде одного уравнения второго порядка

$$\xi_{tt} - \xi_{xx} + \frac{\bar a}{2}\sin 2\xi = 0. \tag{9}$$

Вычисление волновых решений уравнения (9) приводит к существованию π кинков в виде

$$u(x,t) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left((x-ct)\frac{\sqrt{\bar a}}{\sqrt{1-c^2}}+\delta\right)\right], \quad \delta = const.$$

Вычисления проведены формально и нуждается в численной проверке тот факт, что полученные π кинки является приближенными решениями уравнения (8) при малых значениях параметра ε.

Рассмотрим еще возмущенное уравнение синус-Гордон следующего вида

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(t,x) + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \sin u(t,x) = 0. \tag{10}$$

Отметим, что в случае одной переменной t уравнение (10) превращается в уравнение движения маятника, точка подвеса которого периодически колеблется вдоль вертикальной оси с большой частотой и малой амплитудой.

В обозначениях, введенных ранее, система эквивалентная уравнению (10) имеет вид

$$\begin{aligned} u_t &= p - \varphi\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right) \sin u \\ p_t &= u_{xx} - \sin u + \varphi\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right) p \cos u - \tfrac{1}{2}\left(\varphi\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\right)^2 \sin 2u. \end{aligned}$$

Переходим к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$ и усредняем систему. Систему первого приближения во времени t записываем в виде одного уравнения второго порядка

$$\xi_{tt} - \xi_{xx} + \sin\xi + \frac{\bar{a}}{2} \sin 2\xi = 0.$$

Таким образом, усредненное уравнение представляет собой двойное уравнение синус-Гордон (double sine-Gordon).

Литература

1. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988, 695 с.
2. Браун О.М., Кившарь Ю.С. Модель Френкеля - Конторовой. Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008.- 536 с.
3. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly by integrable systems // Reviews of Modern Physics, 1988, vol. 61, no. 4, pp. 763–915.
4. Fernandez J.C, Passot Th., Politano H., Reinisch G., Taki M. Sturm-Liouville description of sine-Gordon soliton dynamics // Physical Review B, 1988, vol. 37, no. 13, pp. 7342–7347.
5. Grauer R., Kivshar Yu.S. Chaotic and phase-locked breather dynamics in the damped and parametrically driven sine-Gordon equation // Physical Review B, 1993, vol. 48, no. 6, pp. 4791–4800.
6. Sakai S., Samuelsen M.R., Olsen O.H. Perturbation analysis of a parametrically changed sine-Gordon equation // Physical Review B, 1987, vol. 36, no. 1, pp. 217–225.
7. Kivshar Yu. S., Gronbech-Jensen N., Samuelsen M.R. π kinks in a parametricaly driven sine-Gordon chain // Physical Review B, 1992, vol. 45, no. 14, pp. 7789–7794.
8. Kivshar Yu. S., Gronbech-Jensen N., Parmentier R.D. Kinks in the presence of rapidly varying perturbations // Physical Review E, 1994, vol. 49, no. 5, pp. 4542–4551.
9. Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M. Parametrically forced sine-Gordon equation and domain wall dynamics in ferromagnets // Physical Review B, 1998, vol. 57, no. 9,

pp. 5033–5035.
10. Mitkov I., Zharnitsky V. π-Kinks in the parametrically driven sine-Gordon equation and applications // Physica D, 1998, vol. 123, pp. 301–307.
11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М.: Наука, 1974.- 411 с.
12. Burd V. Method of averaging for differential equations on an infinite interval. Theory and applications, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 255. Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2007, 356 c.