УДК 534.1

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ

© Владимир Иванович Ерофеев, Алексей Олегович Мальханов
Нижегородский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук
erf04@sinn.ru

Аннотация. *Рассмотрены процессы локализации нелинейных волн деформации в элементах конструкций. Исследовано влияние магнитного поля на локализацию волны.*

Формирование локализованной волны деформации, рост ее амплитуды по мере распространения представляются весьма важными проблемами [1], поскольку увеличение амплитуды может привести к достижению предела текучести, что, в свою очередь, способствует появлению зон пластичности или микротрещин в элементах конструкций.

В настоящей работе изучается влияние магнитного поля на процесс локализации нелинейной волны.

Рассмотрим распространение продольных волн в однородном, нелинейно-упругом стержне, находящемся во внешнем магнитном поле.

Будем полагать, что внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью H_0 перпендикулярно направлению распространения волн.

Суммарное магнитное поле состоит из его постоянного значения и возмущений, появляющихся в результате взаимодействия с полем деформаций

$$\vec{H} = H_0 \vec{n} + \vec{h}, \tag{1}$$

где $\vec{n}$ – вектор нормали, $\vec{h}$ – малое возмущение магнитного поля.

Для описания продольных колебаний стержня воспользуемся моделью Бишопа, учитывающей в дополнение к классической модели Бернулли, кинетическую энергию поперечных движений частиц стержня и потенциальную энергию сдвиговых деформаций [2].

Вектор перемещений содержит только одну (осевую) компоненту

$$\vec{u} = (u_1, 0, 0), \tag{2}$$

а, согласно сказанному выше, для векторов внешнего магнитного поля и его малого возмущения имеем:

$$\vec{H} = (0, 0, H_0 + h_3), \vec{h} = (0, 0, h_3). \tag{3}$$

Система уравнений магнитоупругости для стержня примет вид:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial G}{\partial \tau}-c_0^2\left(1+\frac{6\alpha_1}{E}Q\right)\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\nu^2R^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial G}{\partial \tau}-c_\tau^2\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}\left(H_0+h_3\right)\frac{\partial h_3}{\partial x_1}=0,\\
&\frac{\partial Q}{\partial \tau}-\frac{\partial G}{\partial x_1}=0,\\
&\frac{\partial h_3}{\partial \tau}+\left(H_0+h_3\right)\frac{\partial G}{\partial x_1}+G\frac{\partial h_3}{\partial x_1}-\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 h_3}{\partial x_1^2}=0.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Здесь $G=\frac{\partial u_1}{\partial \tau}$, $Q=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, ν – коэффициент Пуассона, $R=\sqrt{J_0/F}$ – полярный радиус инерции, $J_0=\iint\limits_F\left(x_2^2+x_3^2\right)dF$ – полярный момент инерции, F – площадь поперечного сечения стержня, λ,μ – модули упругости (константы Ламе) второго порядка, $E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ – модуль Юнга, $\alpha_1=\frac{E}{2}+\frac{3\lambda}{2}+A+B(1-2\nu)+\frac{C}{3}(1-6\nu)$ – коэффициент упругой нелинейности, $c_0=\sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны, $c_\tau=\sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны, *A, B, C* – модули упругости (константы Ландау) третьего порядка, c – скорость света в вакууме, ρ – плотность материала, σ – проводимость, τ – время.

Перейдем в системе (4) к безразмерным переменным

$$U=Q, V=\frac{G}{c_0}, W=\frac{h_3}{H_0}$$

$$\tilde{x}_1=\frac{1}{\nu R}x_1,\quad \tilde{\tau}=\frac{c_0}{\nu R}\tau \tag{5}$$

и введем движущуюся систему координат

$$x=\tilde{x}_1-V_p\tilde{\tau},\ t=\varepsilon\tilde{\tau}, \tag{6}$$

где V_p – характерная скорость волн, заранее неизвестная, ε – малый параметр.

Подставим (5) и (6) в систему (4), сохраняя при этом члены с ε в степени, не выше первой, получим две системы уравнений:

$$\left\{\begin{aligned}
&-V_p\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{c_A^2}{c_0^2}\frac{\partial W}{\partial x}=0,\\
&-V_p\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}=0,\\
&-V_p\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}=0.
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{6\alpha_1}{E}U\frac{\partial U}{\partial x}+V_p\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}+\frac{c_\tau^2}{c_0^2}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+\frac{c_A^2}{c_0^2}W\frac{\partial W}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial W}{\partial t}+W\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{c^2}{4\pi\sigma\, c_0\nu R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

которые являются соответственно нулевым и первым приближением системы (4) в новых переменных.

Здесь $c_A = \sqrt{H_0^2 / 4\pi\rho}$ – скорость волны Альфвена [3].

Из второго и третьего соотношений системы (7) получим связь между функциями:

$$U = -W, V = -V_p U,$$

а из первого соотношения определим значение скорости: (9)

$$V_p = \sqrt{1 + \frac{c_A^2}{c_0^2}}. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8) и складывая полученные уравнения системы (8), преобразуем её к уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \delta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \tag{11}$$

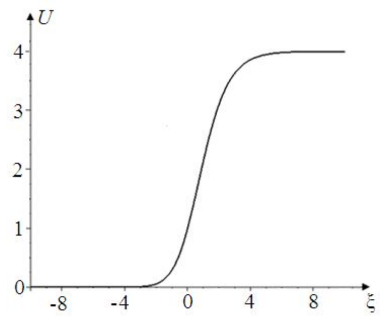
где $\alpha = \dfrac{\dfrac{c_A^2}{c_0^2} - \dfrac{6\alpha_1}{E} + 2V_p}{1 + V_p}$, $\beta = \dfrac{V_p^2 - \dfrac{c_\tau^2}{c_0^2}}{1 + V_p}$, $\delta = \dfrac{c^2}{4\pi\sigma\, c_0 \nu R(1 + V_p)}$.

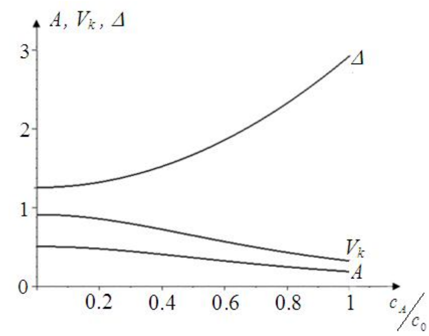
Уравнение (11) носит название уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса [4]. Оно имеет решение в виде локализованной волны (кинка):

$$\begin{gathered} U = A \exp(\xi) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{2}\right), \\ \xi = \xi_0 (x - 2at), \xi_0 = \sqrt{-\frac{a}{3\beta}}, \\ a = -\frac{3\delta^2}{25\beta}, A = -\frac{a}{\alpha}, V_k = 2a, \Delta = \frac{2}{\xi_0}. \end{gathered} \tag{12}$$

На рис. представлен профиль локализованной волны (12) (*а*) и изображены зависимости амплитуды (*A*), скорости (V_k) и ширины (Δ) этой волны от напряженности магнитного поля (*б*).

Для конденсированных сред в магнитных полях до 10 Тл скорость волны Альфвена меньше скорости распространения продольной волны [5], поэтому изменение параметров представлено на интервале $0 \le c_A^2 / c_0^2 < 1$.





Из рис. видно, что с увеличением напряженности внешнего магнитного поля амплитуда и скорость локализованной волны убывают, в то время как ее ширина возрастает.

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-08-97066-р_поволжье).

Литература

[1] Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации. М.: Физматлит, 2009. 208 с.
[2] Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
[3] Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наукова думка, 1991. 200 с.
[4] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир. 1988. 694 с.
[5] Физико-химические процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии / Под ред. Углова А.А. М.: Наука. 1989.

Поступила: 12.04.12.