

УДК 539.4: 678.067

ОБОСНОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ДАННЫМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ

© Александр Николаевич Полилов, Николай Алексеевич Татусь

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт машиноведения им. А.А.Благонравова Российской академии наук

polilov@imash.ru; nikalet@mail.ru

Аннотация: Волокнистые композиты со слабой полимерной матрицей или с непрочными поверхностями раздела «волокно-матрица» обнаруживают некоторые специфические направленные механизмы разрушения (расслоения, расщепления, скол вдоль волокон, полосу сдвига – кинк и др.), и для численного описания этих видов разрушения необходимы нетрадиционные подходы, новые специальные модели разрушения и критерии прочности, учитывающие взаимодействие нормальных и касательных напряжений на плоскости разрушения. Показано, что использование простых линейных критериев прочности позволяет лучше интерпретировать экспериментальные данные и оценивать в опытах прочностные параметры целостности композитных структур, которые можно использовать при проектных расчетах композитных элементов конструкций.

Ключевые слова: разрушение, критерии прочности, укладка волокон, расслоение, циклическое нагружение, волокнистые композиты, полоса сдвига.

Substantiation of strength criteria for FRP by experimental data

© A.N.Polilov, N.A.Tatus

Institute of Machines Science of Russian Academy of Sciences

Abstract: FRP (fiber-reinforced-plastics) with weak polymeric matrix and/or fiber-matrix interface demonstrate some specific directional modes of failure behavior (delamination, splitting, failure along the fibers, kink, etc.) and to describe numerically these failure modes it is necessary to use some non-traditional approaches, new specific models of fracture processes and strength criteria taking into account the normal-shear stresses interaction on the fracture planes. It's shown that using simple linear fracture criteria it's possible to understand the experimental data more correctly. The application of new proposed FRP fracture criteria makes it possible to estimate experimentally some structure integrity parameters being used in more correct design of composite elements of constructions.

Keywords: fracture, strength criteria, laying fiber, delamination, fatigue, fiber reinforced plastics, kink.

Введение

Многие авторы [1, 2, 3, 5, 8, 21 и др.] формулировали критерии прочности анизотропных композитов в виде некоторого полинома от инвариантов, представляющих собой свертки тензора напряжений σ_{ij} с так называемыми тензорами прочности четных рангов: $I_1 = B_{rs}\sigma_{rs}$, $I_2 = A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$ и т.д. Число констант B_{rs} для плоского случая равно трём, A_{ijkl} - шести и нахождение такого большого числа констант из ограниченного числа опытов, как правило, оказывается неустойчивым: экспериментальные данные описываются одинаково хорошо различным набором констант, и некоторые из них приходится назначать

по произволу (например, равными 0). Если ограничиться 2-м инвариантом, критерий прочности приобретает вид:

$$I_1 + I_2^\beta = 1 \quad (1)$$

$\beta = 1/2$ - Гольденблат-Копнов [3], $\beta = 1$ - Цай-Ву [21]), и предельная кривая в плоскости $\sigma_1 - \sigma_2$ в случае растяжения в двух направлениях напряжениями σ_1 и σ_2 будет представлять собой эллипс.

Приближение предельной кривой эллипсом для ортогонально армированного пластика со слабой матрицей вряд ли может считаться удовлетворительным. Действительно, пренебрегая прочностью полимерного связующего, мы получаем ортогональную решётку, которая может разрушиться в результате разрыва волокон в том или ином направлении. Решетка может выдерживать напряжения только вдоль волокон, но не под углом к ним, когда возникают касательные напряжения. В соответствии с этим, условие разрушения в плоскости $\sigma_1 - \sigma_2$ будет представляться прямоугольником. Конечно, вводя в уравнение (1) инварианты более высоких порядков, можно этот прямоугольник аппроксимировать с любой степенью точности, но число констант и соответствующие трудности их экспериментального определения при этом неизмеримо возрастут.

С другой стороны, тензорный полином (1) определяет гладкую поверхность в пространстве напряжений, и мы ничего не можем сказать о смене механизмов разрушения. В то же время разрушение, например, ортогонально армированных пластиков при растяжении под углом к волокнам (см. п. 1) происходит по плоскости, содержащей одно или другое семейство армирования. Учитывая направленный характер разрушения волокнистого композита, естественно принять в качестве условия прочности некоторое предельное соотношение между напряжениями, действующими в плоскости возможного разрушения, включающей в себя одно из направлений армирования. Обозначая через σ_n и τ_n нормальное и касательное напряжение на этой плоскости, будем формулировать условие прочности в виде [7,9]

$$\varphi(\sigma_n, \tau_n) = 1 \quad (2)$$

1. Растяжение ортогонально армированных пластиков

Для ортогонально армированных пластиков естественно применить условие (2), поставленное на одной из двух перпендикулярных друг другу площадок, содержащих волокна одного из семейств армирования. Простейшее предположение о виде функции φ в (2) состоит в том, что она линейна, и тогда можно выписать 2 критерия, поставленных на одной (n_1) или на другой (n_2) плоскости возможного разрушения,

$$\sigma_{n_1} + m_1 \tau_{n_1} = \sigma(0^\circ) = c_1 \quad (3)$$

$$\sigma_{n_2} + m_2 \tau_{n_2} = \sigma(90^\circ) = c_2 \quad (4)$$

Формулы преобразования тензора напряжений при повороте координатных осей на угол α :

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1} &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha + 2\tau \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma_{n_2} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha - 2\tau \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{n_1} &= \tau_{n_2} = \tau(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

используем для случая растяжения под углом α к одному из семейств волокон $\sigma_1 = \tau = 0$, $\sigma_2 = \sigma(\alpha)$. Тогда из критериев (3), (4) получаем две зависимости прочности $\sigma(\alpha)$ от угла вырезки образца α :

$$\sigma(\alpha) = \frac{c_1}{\cos^2 \alpha + m_1 \sin \alpha \cos \alpha} \text{ при } \alpha \leq \alpha^* \quad (6)$$

$$\sigma(\alpha) = \frac{c_2}{\sin^2 \alpha + m_2 \sin \alpha \cos \alpha} \text{ при } \alpha > \alpha^* \quad (7)$$

При нагружении под углом α^* происходит переход от одной плоскости разрушения к другой, и α^* находится из равенства (6)=(7), приводящего к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} \alpha^*$:

$$\alpha^* = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} (m_1 \varepsilon - m_2 + \sqrt{(m_2 - m_1 \varepsilon)^2 + 4\varepsilon}), \text{ где } \varepsilon = c_2 / c_1. \quad (8)$$

1.1. «Равнопрочный» пластик (0/90)

Как видно из рис.1 (сплошные линии), зависимость (6) хорошо описывает изменение прочности ортогонально армированных пластиков при растяжении под углами от 0° до 45° .

При одинаковом числе слоев N_1 и N_2 в двух ортогональных направлениях можно считать $c_1 = c_2$, $m_1 = m_2$ и $\alpha^* = 45^\circ$. Формулы (6) и (7) описывают симметричную относительно 45° зависимость прочности от угла: $\sigma(\alpha) = \sigma(90^\circ - \alpha)$ (рис. 2,в). При $N_2 = 0$ – имеем рассмотренный ниже, в п. 1.2, случай однонаправленного материала. А при неравных N_1 и N_2 можно считать прочности вдоль волокон пропорциональными числу слоев $c_1 / c_2 = N_1 / N_2$. Если допустить также, что сдвиговая прочность вдоль волокон слабо зависит от числа слоев (это – по смыслу – прочность полимерной матрицы), то $m_2 / m_1 = c_1 / c_2 = N_1 / N_2$, и окажется, что для известной структуры ортогонального армирования (известное число слоев N_1 и N_2) всю немонотонную зависимость прочности от направления растяжения (см. рис. 2, г) можно описать на основании всего лишь 2-х экспериментов, например, для углов вырезки 0° и 45° . Угол смены плоскости разрушения нужно определять из условия (8).

На рис.2,а данные с рис.1 для углепластика нанесены в координатах $\sigma_{n1} = \sigma(\alpha) \cos^2 \alpha$, $\tau_{n1} = \tau(\alpha) \cos \alpha \sin \alpha$. Прямая линия (3) в этих координатах, приводящая к зависимости (6), одинаково хорошо описывает эксперимент, как и участок эллипса

$$\left(\frac{\sigma_{n1}}{\sigma_1^*} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{\tau^*} \right)^2 = 1 \quad (9)$$

Критерий (9) при подстановке (5) приводит к выражению

$$\sigma(\alpha) = \left(\cos^4 \alpha / \sigma_1^{*2} + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha / \tau^{*2} \right)^{-1/2} \quad (10)$$

Расчеты по формуле (10) приведены на рис. 1 штриховыми линиями, а штрихпунктирными для стеклопластика показана обработка по формуле типа (1) из [2], хуже согласующаяся с экспериментом и приводящая к более громоздким расчетным выражениям. По своей простоте и удобству обработки результатов в координатах σ_n - τ_n предпочтение следует отдать линейным зависимостям (3), (4). Интересно отметить, что кривые (6) и (7) немонотонны и для равнопрочного (0/90) композита образуют ω -образную нижнюю огибающую, т.е. угол минимума кривой (6) $\alpha'_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} m_1$ лежит левее α^* , а угол минимума кривой (7) $\alpha'_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (-m_2)$ - правее α^* .

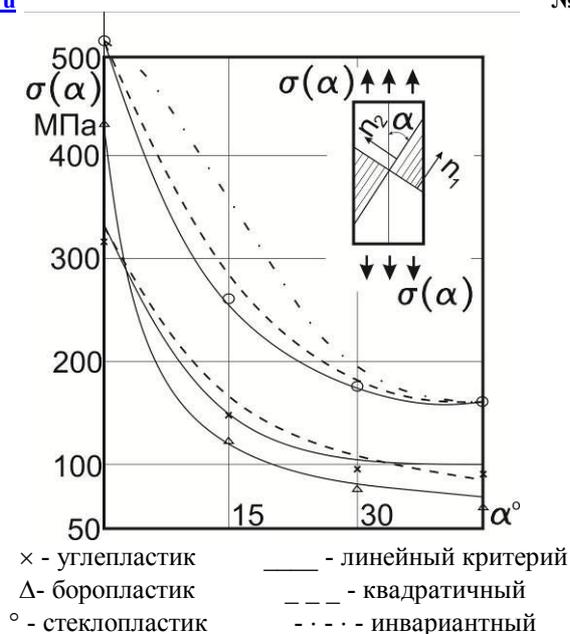


Рис.1. Зависимости прочности ортогонально армированных пластиков от направления вырезки образцов

1.2. Однонаправленный материал (0)

Наиболее естественно применение условия типа (2) к однонаправленным композитам [9, 15, 17, 22], и предположение о линейном виде функции φ приводит к критериям (3) и (4), где, по сути, $c_1 = \sigma(0^\circ)$ - прочность вдоль волокон, $c_2 = \sigma(90^\circ)$ - прочность при растяжении поперек волокон, хотя более правильно считать c_1, c_2 , как и m_1, m_2 , феноменологическими параметрами, определяемыми при обработке экспериментальных данных по прочности образцов, вырезанных в различных направлениях. Наиболее просто определять эти параметры, проводя по методу наименьших квадратов прямую линию через экспериментальные точки, нанесенные в координатах $\sigma_{n1} - \tau_{n1}$ или $\sigma_{n2} - \tau_{n2}$. При малых углах $\alpha < \alpha^*$ происходит разрыв волокон, и зависимость прочности имеет вид (6). Часто в литературе по механике композитов полагают $m_1 = 0$, что приводит к противоречащему опыту результату: прочность растет с ростом угла разориентации. Условие (4) лишено этого логического порока: $\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} < 0$ при $0 \leq \alpha < \alpha'_2$, где α'_2 - координата минимума зависимости (7).

Критический угол (8), при котором происходит переход от разрыва волокон к разрушению матрицы, определяется равенством (6) = (7), из которого $\alpha^* \approx \text{arctg}(\varepsilon/m_2)$ при $c_2/c_1 = \varepsilon \ll 1$. Для однонаправленных пластиков угол α^* мал (например, для углепластиков $\sigma(0^\circ) \approx 1000 \text{ МПа}$, $\sigma(90^\circ) \approx 25 \text{ МПа}$, $m_2 \approx 0.5, \alpha^* = 3^\circ$) и точное экспериментальное определение m_1 в крайне узком диапазоне углов $0^\circ - 3^\circ$ вряд ли возможно. Поэтому удобно упростить зависимость (6), полагая

$$\sigma(\alpha) = \sigma(0^\circ) \text{ при } \alpha \leq \alpha^* \quad (11)$$

Максимальная погрешность критерия (11) при вычислении $\sigma(\alpha)$ по сравнению с (6) при $\alpha = \alpha^*$ составляет всего лишь 2%, что вполне допустимо с учетом разброса экспериментальных данных. Естественно считать α^* - «оптимальным» углом малой разориентации волокон (аналог свилеватой, и потому нерасщепляющейся древесины); при этом прочность вдоль волокон практически не снижается, а сопротивление росту

продольных трещин расщепления возрастает многократно, исключая расщепления материала при циклических нагрузках и вблизи концентраторов напряжений. Зависимость (7) для однонаправленного пластика немонотонна, и наименьшая прочность не соответствует растяжению под 90° к волокнам. Угол $\alpha'_2 = \frac{1}{2} \arctg(-m_2)$, соответствующий минимальной прочности, лежит в диапазоне $45^\circ - 90^\circ$, поскольку параметр m_2 положителен.

Ранее [9, 17] предлагался также квадратичный вариант критерия разрушения поверхности раздела

$$\left(\frac{\sigma_{n2}}{\sigma_2^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n2}}{\tau^*}\right)^2 = 1 \quad (12)$$

Различие в критериях (12) и (7) при обработке экспериментов незначительно. Удобство линейного критерия (4) состоит в простоте расчетных формул и в надежности метода определения констант m_2, c_2 путем проведения прямой линии через опытные точки в координатах $\sigma_{n2} - \tau_{n2}$ (рис. 2,а), рассчитанные через критическое напряжение $\sigma(\alpha)$ по формулам (5). Отметим, что если через те же точки провести эллипс (12), то равенства одинаковых по смыслу величин $\sigma(90^\circ) = \sigma_2^*$, и особенно, $c_2 / m_2 = \tau^*$ не будут выполняться. Таким образом, значение прочности внутрислойного сдвига, определенное при растяжении, зависит от используемого критерия, что необходимо учитывать в расчетах.

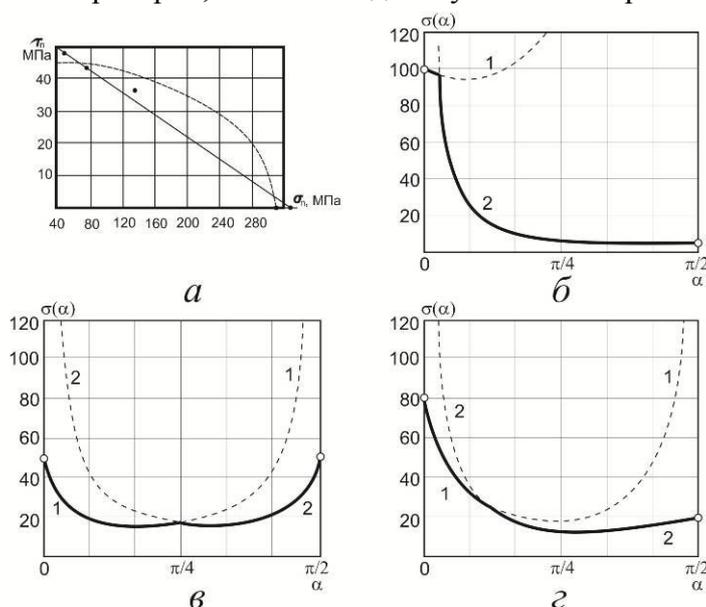


Рис. 2. Предельная кривая для углепластика (0/90) в координатах $\sigma_n - \tau_n$ (а) и зависимости прочности ортогонально армированных композитов от направления вырезки образцов по критериям прочности (б) - кривая 1 и (7).- 2; б) - однонаправленный КМ (0), в) – «равнопрочный» (0/90), г) – (0₄/90₁).

1.3. Критерии циклической прочности монослоя (0)

Простейший, чисто феноменологический, подход к построению критерия разрушения в условиях длительного или циклического нагружения, а также при воздействии различных факторов: температуры, влажности, агрессивной среды, облучения - состоит в замене параметров критерия прочности (4) - c_2 и m_2 - на функционалы от истории нагружения, в частности, на функции от числа циклов N , поскольку вид разрушения при циклическом растяжении однонаправленных композитов такой же, как при квазистатическом. В [15] по результатам испытаний на циклическое растяжение прямоугольных образцов из однонаправленного углепластика, вырезанных под различными углами к направлению армирования, строили для разного числа циклов: $10^4, 10^5, 10^6$ - прямые линии в координатах

$\sigma_{n2} - \tau_{n1}$ (типа изображенной на рис. 2,а), по которым определяли значения параметров для каждого уровня долговечности. На рис. 3,а приведены определенные таким образом значения $m_2(N)$ и $c_2(N)$, которые достаточно точно аппроксимируются следующими функциями

$$c_2(N) = c_2(1 - 0.1 \cdot \lg N); m_2(N) = m_2(1 - 0.19 \sqrt{\lg N}), \quad (13)$$

Подставляя (13) в (7), получаем зависимость прочности однонаправленных углепластиков от направления растяжения и от числа циклов. В многоцикловой области ($N > 10^3$) значение $m_2 = 0.3$ становится практически постоянным, что позволяет получить весьма простое выражение,

$$\sigma(\alpha, N) = \frac{c_2(1 - 0.1 \cdot \lg N)}{\sin^2 \alpha + 0.3 \sin \alpha \cos \alpha}, \quad (14)$$

описывающее, как видно из рис. 3,б, целую серию экспериментальных зависимостей критического числа циклов от приложенных циклических напряжений для разных углов разориентации.

Основной эффект - немонотонные и негладкие зависимости прочности от направления нагружения, описываемые с помощью критериев, поставленных на площадках возможного разрушения, связанных с направлениями укладки волокон. Традиционные тензорно-полиномиальные критерии прочности описывают гладкую предельную поверхность в пространстве напряжений (многомерный эллипсоид), и при этом нет возможности говорить об условиях того или иного механизма разрушения, что является известным недостатком при последовательной схеме послойного анализа, когда в зависимости от вида разрушения монослоя надо либо полностью исключать его из рассмотрения (после разрыва волокон), либо полагать нулем характеристики матрицы (после выполнения условия скола вдоль волокон).

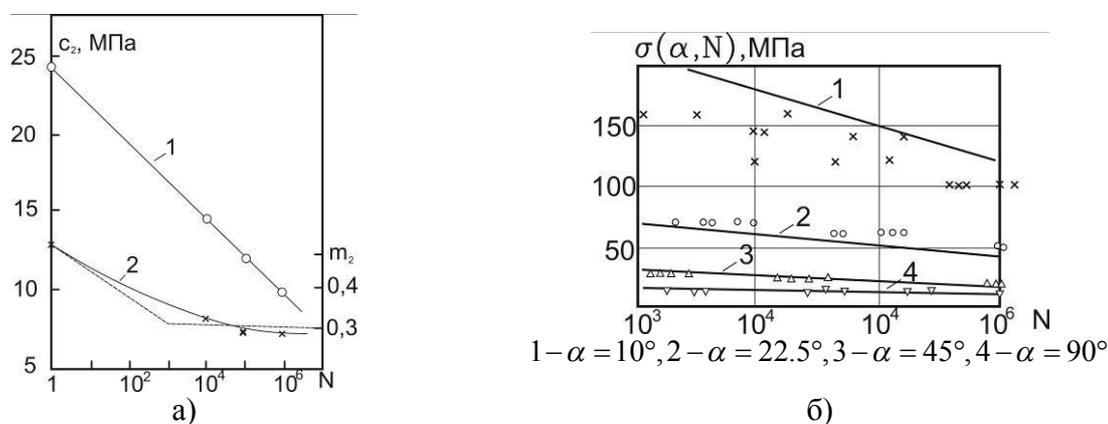


Рис. 3. Зависимости а) параметров (1 – c_2 , 2 – m_2) линейного критерия (4) и б) прочности однонаправленного углепластика (14) от направления растяжения α и от логарифма числа циклов N

2. Двухосное растяжение и кручение косоугольно намотанных труб ($\pm \alpha$)

Вид разрушения намоточных композитных труб отличается от плоских образцов из-за отсутствия "эффекта перерезанных нитей" и из-за переплетения жгутов при намотке (нет четкой слоистой структуры). Поэтому в трубах происходит не скол вдоль волокон, а искажение решетки арматуры (п. 2.2). Меняется и вид критерия прочности, хотя подход формально остаётся таким же.

2.1. Феноменологические критерии прочности труб

На рис. 5 приведены данные из [13] в осях $\sigma_n - \tau_n$ для прочности при растяжении (темные кружки, перестроенные из рис. 4,а) и при кручении (светлые кружки, перестроенные из рис. 4,б) стеклопластиковых труб со схемой намотки волокон ($\pm\alpha$). Формальные выражения для проекции напряжений на плоскость, содержащую направление волокон, для осевого растяжения напряжением $\sigma(\alpha)$:

$$\sigma_n = \sigma(\alpha) \cdot \sin^2 \alpha; \quad \tau_n = \sigma(\alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad (15)$$

для кручения со средним по толщине стенки касательным напряжением $\tau(\alpha)$:

$$\sigma_n = \tau(\alpha) \cdot \sin 2\alpha; \quad \tau_n = \tau(\alpha) \cdot \cos 2\alpha \quad (16)$$

Формальность подхода состоит в том, что при смене угла армирования α мы, по сути, имеем дело с другим материалом, а не просто с изменением направления нагружения, как рассматривалось выше в п. 1.

Точки, соответствующие разрушению при растяжении, на рис. 5 можно аппроксимировать какой-либо кривой второго порядка, для простоты – полуокружностью:

$$\sigma_n^2 + (\tau_n - c_p)^2 = c_p^2, \quad (17)$$

откуда с использованием (15) получается чрезвычайно простая зависимость

$$\sigma(\alpha) = 2 \cdot c_p \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \sigma(45) \cdot \operatorname{ctg} \alpha \quad (18)$$

По смыслу константа $2 \cdot c_p$ равна прочности $\sigma(45)$ на растяжение трубы с намоткой (± 45).

Данные для кручения на рис. 5 также можно аппроксимировать участком эллипса, а для простоты – полуокружностью:

$$(\sigma_n - c_k)^2 + \tau_n^2 = c_k^2 \quad (19)$$

и с подстановкой (16) в (19) получаем

$$\tau(\alpha) = 2 \cdot c_k \cdot \sin 2\alpha = \tau(45^\circ) \cdot \sin 2\alpha \quad (20)$$

В (20) $2 \cdot c_k$ соответствует прочности на кручение трубы с намоткой ($\pm 45^\circ$).

Зависимости (18), (20) (кривые 1 на рис. 4,а, б) вследствие своей очевидной простоты очень удобны для инженерных расчетов и для выбора рациональных углов армирования. Учет ненулевой прочности связующего, существенный для углов намотки, близких к 90° , можно осуществить линейным преобразованием этих зависимостей (кривые 2 на рис. 4,а, б)

$$\sigma(\alpha) = [\sigma(45^\circ) - \sigma(90^\circ)] \times \operatorname{ctg} \alpha + \sigma(90^\circ) \quad (21)$$

$$\tau(\alpha) = [\tau(45^\circ) - \tau(90^\circ)] \times \sin 2\alpha + \tau(90^\circ) \quad (22)$$

Зависимость (21) справедлива при $\alpha > \alpha^* = \arctg(\sigma(0^\circ)/\sigma(45^\circ))$; при $\alpha < \alpha^*$ считаем $\sigma(\alpha) = \sigma(0^\circ)$.

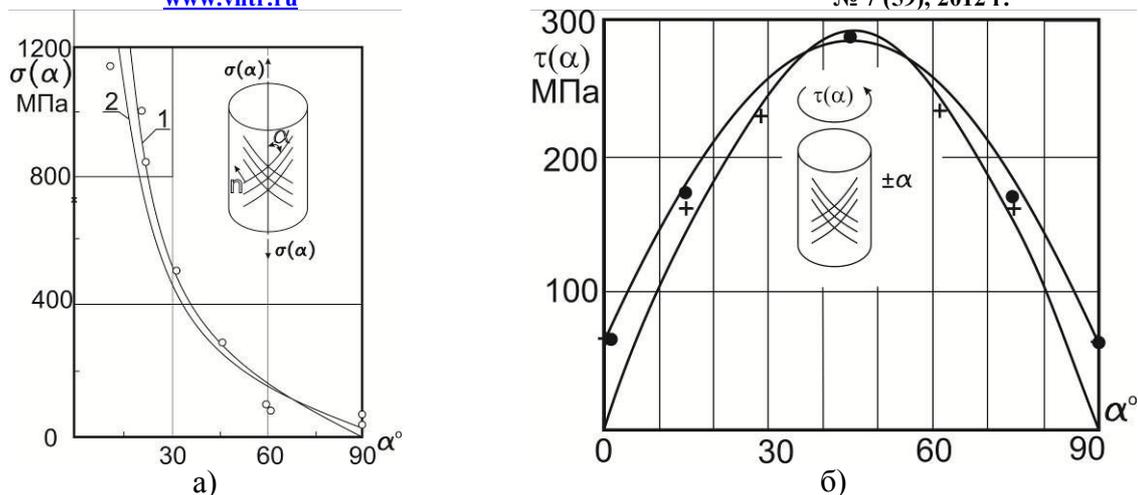


Рис.4. Зависимости прочности а) при растяжении и б) при кручении стеклопластиковых труб от угла намотки волокон $\pm\alpha$

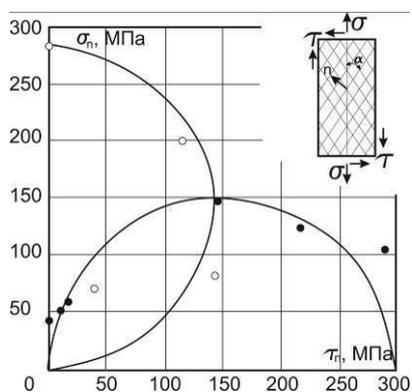


Рис.5. Данные по прочности стеклопластиковых труб в координатах $\sigma_n - \tau_n$ при растяжении (•) и кручении (◦)

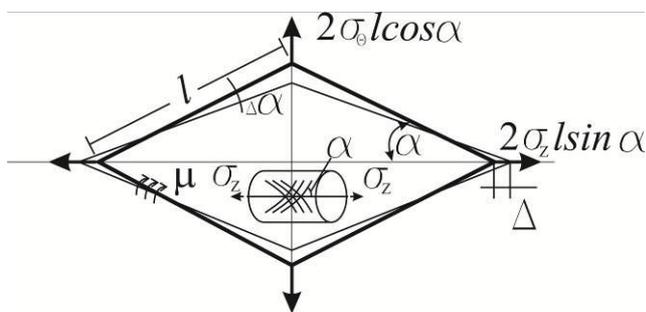


Рис. 6. Схема деформирования элемента косоугольно армированного композита при двухосном растяжении

2.2. Модель ромба из нерастяжимых волокон

В [11] для косоугольно армированной трубы была обоснована модель ячейки материала в виде ромба из нерастяжимых стержней (рис. 6), повороту которых препятствует распределенный момент μ , действующий со стороны матрицы. Сила осевого растяжения пропорциональна длине малой диагонали $P_z = 2 \cdot \sigma_z \cdot l \cdot \sin \alpha$, смещение вершины $\Delta_z = (2 \cdot l \cdot \cos \alpha)' \cdot d\alpha = -2 \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$. Величина суммарного момента, препятствующего повороту стержней, считается пропорциональной площади ромба $M = 2 \cdot \mu \cdot l^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$. Приравняв работу внешней силы работе момента при повороте стержней на угол $d\alpha$, получим $2 \cdot \sigma_z \cdot l^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot d\alpha = 2 \cdot \mu \cdot l^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha$.

Считая, что разрушение соответствует критическому значению μ^* распределенного момента, характеризующему способность сопротивляться искажению решетки, находим выражение $\sigma_z(\alpha) = \mu^* \cdot \text{ctg} \alpha$, в точности совпадающее с формулой (18), которая независимо была получена из обработки экспериментальных данных.

При двухосном растяжении продольные σ_z (осевое нагружение) и окружные σ_θ (внутреннее давление) напряжения, как видно из рис. 6, стремятся исказить решетку в

разных направлениях, что обуславливает (рис. 7) упрочняющий эффект при двухосном растяжении [6] и приводит к зависимости

$$\left| \frac{\sigma_z}{\sigma_z(45^\circ)} \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{\sigma_\theta}{\sigma_\theta(45^\circ)} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \right| = 1 \quad (23)$$

Прямые скобки - обозначение абсолютной величины - говорят о смене знака выражения в зависимости от соотношения между напряжениями, и это приводит к двум параллельным предельным прямым линиям 1, 2 (рис. 7) на плоскости $\sigma_\theta - \sigma_z$, проходящим через точки на осях $\sigma_z(\alpha), \sigma_\theta(\alpha)$, соответствующие действию только осевых или окружных напряжений.

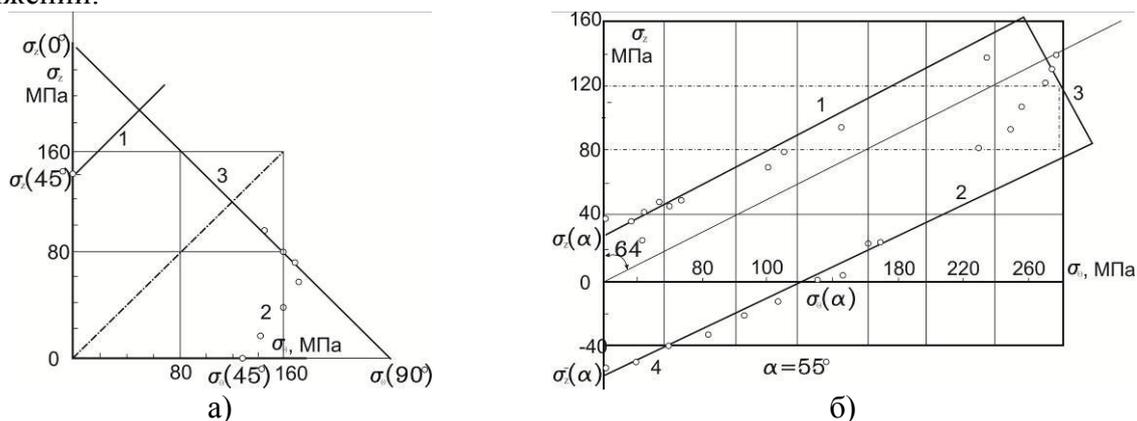


Рис. 7. Экспериментальные данные по прочности стеклопластиковых труб с намоткой ($\pm 45^\circ$)- а) [6], и ($\pm 55^\circ$) – б) [16, 20] при комбинации осевого растяжения и внутреннего давления

Для симметричной намотки ($\pm 45^\circ$) растягивающие и окружные напряжения, казалось бы, равнозначны, но окружные напряжения, например, в баллонах создаются внутренним давлением, и потеря несущей способности определяется не разрывом волокон, а потерей герметичности. Поэтому в реальности экспериментальные значения $\sigma_z(45^\circ)$ и $\sigma_\theta(45^\circ)$ оказываются различными. Если же ради методической простоты пренебречь этим различием, то уравнение (23) чрезвычайно упрощается

$$|\sigma_z \operatorname{tg} \alpha - \sigma_\theta \operatorname{ctg} \alpha| = \sigma_z(45^\circ) \quad (24)$$

и оно описывает две прямые линии 1,2 в плоскости $\sigma_\theta - \sigma_z$ (рис. 7). Прямая 3 соответствует разрыву волокон, когда перекашивание ромба невозможно. Для заданного отношения приложенных напряжений легко указать оптимальный угол намотки, обращающий в ноль разность в прямых скобках. Это означает невозможность перекашивания ромба и перенесение всех усилий только на волокна. Наибольшая прочность соответствует оптимальному углу намотки для заданного отношения приложенных напряжений $\operatorname{tg} \beta = \sigma_\theta / \sigma_z$.

$$\alpha^* = \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg} \beta \cdot \sigma_z(45^\circ) / \sigma_\theta(45^\circ)} \quad (25)$$

Например, в цилиндрической части баллона для сжатого газа («труба с заглушками») окружные напряжения вдвое превышают осевые $\sigma_\theta = 2\sigma_z$, и оптимальный угол намотки имеет известное из «нитяной аналогии» значение $\alpha^* = \operatorname{arctg} \sqrt{2} = 54^\circ 44'$.

Прочность при углах, близких к оптимальному, определяется разрывом волокон, а не перекашиванием ромба, и с достаточной точностью участок 3 на рис. 7 может быть заменен прямой, проходящей через точки на осях $\sigma_z(0^\circ), \sigma_\theta(90^\circ)$, соответствующие нагружению вдоль волокон. Уравнение прямой 3 можно принять в виде

$$\sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha = \sigma_z, \sigma_0 \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_\theta, \sigma_z + \sigma_\theta = \sigma_0 = \sigma_z(0^\circ) \quad (26)$$

Вообще говоря, для приближенного описания зависимостей прочности композитных труб от угла намотки волокон в области $\sigma_z \cdot \sigma_\theta > 0$ достаточно всего двух экспериментов для определения прочности $\sigma_z(45^\circ)$ при растяжении трубы с намоткой ($\pm 45^\circ$) и прочности $\sigma_z(0^\circ)$ на растяжение вдоль волокон. Прочность при окружных напряжениях можно в первом приближении считать равной прочности на растяжение при соответственных углах намотки $\sigma_z(\alpha) = \sigma_\theta(90^\circ - \alpha)$.

Далее через точки $\sigma_z(\alpha)$ и $\sigma_\theta(\alpha)$, оцененные по формулам типа (18), для каждого угла намотки α можно провести прямые линии под углом $\beta = \text{arctg}(\text{tg}^2 \alpha)$ (рис. 7), а используя $\sigma_z(0^\circ)$, построить прямую 3, ограничивающую прочность по условию разрыва волокон. В области осевого сжатия добавляется один экспериментальный параметр $\sigma_z^c(\alpha)$ и уравнение предельной прямой 4 (рис. 7,б) имеет вид

$$-\frac{\sigma_z}{\sigma_z^c(\alpha)} + \frac{\sigma_\theta}{\sigma_\theta(\alpha)} = 1 \quad (27)$$

Как видно из рис. 7, простая модель ячейки волокон, приводящая к кусочно-линейной предельной поверхности, хорошо описывает эксперименты на трубах с различными углами намотки.

При двухосном растяжении труб напряжениями σ_z и σ_θ экспериментальные данные также хорошо аппроксимируются в координатах $\sigma_z - \sigma_\theta$ участком повернутого эллипса, проходящим через точки на осях $\sigma_z(\alpha)$ и $\sigma_\theta(\alpha)$, соответствующие прочностям при одноосном нагружении, и через точку на линии оптимального нагружения $\text{tg} \beta = \text{tg}^2 \alpha$, связанную из (26) с прочностью вдоль волокон $\sigma(0^\circ)$:

$$\sigma_z^2 \cdot t^4 + \sigma_\theta^2 - \sigma_z \cdot \sigma_\theta \left(2t^2 - \frac{\sigma^2(45^\circ) \cdot (1+t^2)^2}{\sigma^2(0^\circ)} \right) = t^2 \cdot \sigma^2(45^\circ) \quad (28)$$

где $\sigma(0^\circ)$, $\sigma(45^\circ)$ – прочностные значения на растяжение труб с намотками (0°) и ($\pm 45^\circ$), $t = \text{tg} \alpha$. Действительно, уравнение повернутого эллипса в осях $\sigma_z - \sigma_\theta$ имеет вид:

$$\frac{\sigma_z^2}{A^2} + \frac{\sigma_\theta^2}{B^2} - \frac{\sigma_z \sigma_\theta}{C^2} = 1$$

При одноосном растяжении ($\sigma_\theta = 0$) $\Rightarrow \sigma_z(\alpha) = \sigma(45^\circ)/t = A$

При чистом внутреннем давлении ($\sigma_z = 0$) $\Rightarrow \sigma_\theta(\alpha) = \sigma(45^\circ) \cdot t = B$

При нагружении в «оптимальном» направлении $\sigma_\theta = \sigma(0^\circ) \sin^2 \alpha = \sigma(0^\circ)/(1+t^2)$;

$$\sigma_z = \sigma(0) \cos^2 \alpha = \sigma(0) t^2 / (1+t^2); \quad \frac{1}{C^2} = \frac{2}{\sigma^2(45^\circ)} - \frac{(1+t^2)^2}{\sigma^2(0^\circ) t^2}.$$

Основной эффект – упрочнение косоугольно армированных труб или сосудов давления при двухосном растяжении, наличие оптимальных углов намотки для данного напряженного состояния можно описать на основе модели ромбической элементарной ячейки. Для симметричной намотки ($\pm \alpha$) при двухосном напряженном состоянии критерий (28) позволяет проводить расчет напряжений и анализ прочности для каждой пары слоев. Это дает большие преимущества по сравнению с традиционным послойным методом, когда напряжения пересчитываются в каждом монослое, уложенном под некоторым углом к выбранной оси детали. Наклонный монослой не обладает упругой симметрией по

отношению к осям детали, а симметричная пара слоев – ортотропна, поэтому расчет по парам слоев значительно надежнее, так как более достоверны данные по прочности намоточных труб, чем данные, полученные на плоских образцах, вырезанных под различными углами к направлению укладки волокон. Изложенные критерии хорошо согласуются с экспериментами и дают возможность простых инженерных оценок критических напряжений и оптимальных схем армирования.

3. Кручение и сжатие с образованием кинка – наклонной полосы сдвига

3.1. Критерий наклонного разрушения при кручении

Некоторые композиты с разориентированным армированием разрушаются при кручении по плоскости, составляющей некоторый угол α с продольной осью z . Ось x направлена в плоскости пластины, ось y – в направлении толщины.

За критерий разрушения можно по аналогии с (9) принять достижение зависящего от направления α критического значения квадратичной комбинации нормальных и касательных напряжений на этой плоскости

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_n}{\tau_*}\right)^2 = C^2(\alpha) \quad (29)$$

Касательные напряжения τ_{yz}^2 и τ_{xz}^2 и выражаемые через них σ_n^2 и τ_n^2 достигают своих наибольших значений на контуре поперечного сечения. Рассматривая межслойные касательные напряжения τ_{yz} , в основном влияющие на разрушение, можно выразить по аналогии с (16) нормальное σ_n и касательное τ_n напряжение:

$$\sigma_n = \tau_{yz} \sin 2\alpha; \tau_n = \tau_{yz} \cos 2\alpha \quad (30)$$

После подстановки выражений (30) в критерий (29) можно найти угол α , соответствующий минимуму касательного напряжения τ_{yz} .

Для иллюстрации примем простую зависимость прочности от угла наклона площадки разрушения: $C^2(\alpha) = C(1 + \sin \alpha)$, т.е. прочность минимальна при межслойном разрушении ($\alpha = 0^\circ$) и максимальна – при разрыве поперек волокон ($\alpha = 90^\circ$). Если принять для примера $\left(\tau^*/\sigma^*\right)^2 = 2$, нахождение наклона площадки разрушения α сведётся к минимизации

функции $f = \tau^* C \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \sin^2 2\alpha}$. Условие $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ приводит к уравнению

$12s^4 + 16s^3 - 4s^2 - 8s + 1 = 0$, корень которого $s = \sin \alpha_0 = 0.12$ и $\alpha_0 = 7^\circ$, что хорошо согласуется с наклоном площадки разрушения при кручении образцов из стеклопластика.

3.2. Схема образования кинка при сжатии

На рис. 12 представлена схема распространенного вида разрушения при сжатии композитов или древесины путем образования полосы сдвига, «кинка» [19] (термин, применяемый уже и в отечественной литературе без кавычек). Часто считают, что сдвиговое разрушение происходит под углом 45° , т.е. вдоль направления наибольших касательных напряжений, однако, учет влияния нормальных и касательных напряжений на плоскости разрушения и зависимости прочности от угла может привести, как видно из п.3.1, к любым углам наклона кинка.

Ниже рассмотрена простая энергетическая модель возникновения кинка под углом α к продольной оси. При повороте волокон в полосе сдвига шириной δ считается, что их несущая способность сохраняется до тех пор, пока они не станут перпендикулярны границе

кинка: предельное состояние показано на рис. 8,б. Работа постоянной приложенной силы $P = \sigma \cdot h \cdot b$ (где b - толщина образца) на перемещении $\Delta = \delta \cdot (1 - \sin \alpha)$ затрачивается на работу разрушения матрицы, пропорциональную объему кинка и удельной работе разрушения G . Приравнявая эти работы: силы и разрушения, получим

$$\sigma \cdot \delta \cdot h \cdot b (1 - \sin \alpha) = G \cdot \delta \cdot b \frac{h}{\sin \alpha} \quad (31)$$

Из условия минимума напряжения $\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = 0$ находится угол, под которым «энергетически выгодно» образование кинка: либо $\alpha = 90^\circ$, что соответствует смятию по торцу, либо $\sin \alpha^* = 1/2$, $\alpha^* = 30^\circ$ (а не 45° , как традиционно считают по аналогии с пластичными металлами).

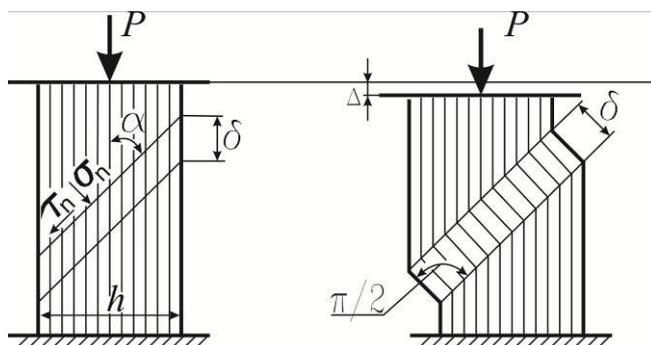


Рис. 8. Схема образования полосы сдвига- кинка - при сжатии.

Основной эффект: Кроме удовлетворения чисто познавательного интереса, определение угла кинка α^* помогает выбрать допустимую длину рабочей части образца на кручение и на сжатие: $> h \cdot \operatorname{ctg} \alpha^*$.

4. Изгиб слоистых балок – 2 вида разрушения

4.1. Нелинейный критерий межслойного разрушения

Испытания на изгиб коротких композитных балок стандартизованы и широко используются для определения условной межслойной сдвиговой прочности, которую принято считать равной наибольшему касательному напряжению в момент разрушения прямоугольных балок:

$$\tau_0 = \frac{3P}{4 \cdot b \cdot h}, \quad (32)$$

Однако, из опытов эта прочность зависит от отношения пролета l к высоте балки h и не может надежно применяться для расчетов реальных изгибаемых композитных элементов. Для объяснения такого эффекта и для получения расчетных зависимостей в [12] был предложен линейный критерий межслойного разрушения:

$$\sigma_x + m \cdot \tau_{xy} = c. \quad (33)$$

где m, c - экспериментально определяемые параметры материала.

Считаем, что межслойное разрушение (рис. 9,а), происходит на расстоянии y_0 от нейтральной оси, где достигает наибольшего значения линейная комбинация касательных τ_{xy} и нормальных изгибных σ_x напряжений, которые вследствие неоднородности композита также дают вклад в межслойное разрушение.

Наиболее опасным оказывается сечение под приложенной нагрузкой, где в балочном приближении распределения напряжений при трехточечном изгибе имеют вид:

$$\tau_{xy} = \frac{3 \cdot P \cdot y}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); \quad \sigma_x = \frac{3 \cdot P \cdot l \cdot y}{b \cdot h^3} \quad (34)$$

Координата y_0 найдется из условия $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ при подстановке (34) в (33)

$$y_0 = \frac{l}{2m} \quad (35)$$

Поскольку разрушение должно начинаться внутри образца, координата $y_0 \leq h/2$, а следовательно, критерий (33) справедлив, пока $l/h \leq m$.

После подстановки (35) в (34) и в (33), с заменой критической силы P на условную сдвиговую прочность (32) получаем согласующуюся с экспериментальными данными (рис. 9) зависимость:

$$\tau_0 = \frac{c \cdot m}{\left[m^2 + \frac{l^2}{h^2} \right]} \quad (36)$$

или для удобства обработки эксперимента – линейную зависимость:

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{m}{c} + \frac{1}{m \cdot c} \cdot \left(\frac{l}{h} \right)^2 \quad (37)$$

На рис. 9,б приведена обработка экспериментальных данных по изгибу стеклопластиковых балок в осях $1/\tau_0 - (l/h)^2$, и видно, что в пределах $(l/h)^2 < m^2$, в которых справедлив критерий (33), данные хорошо ложатся на прямую линию (37).

Константу c можно считать прочностью по нормальным напряжениям при изгибе длинных балок; отношение $l/h = m$ разделяет области разрушения от расслоения и от растяжения. Как видно из рис. 9,б (светлые кружки), при $l/h > m$ прямая линия в координатах $1/\tau_0 - (l/h)$:

$$\tau_0 = \frac{c \cdot h}{2 \cdot l} \quad (38)$$

хорошо согласуется с экспериментом. Зависимости (36) и (38) стыкуются при $l/h = m$. Более того, в этой точке совпадают их производные, эти две кривые касаются друг друга, происходит плавный переход одной зависимости в другую. Гипербола (38) остается всегда выше, чем кривая (36). Это удобно при чисто компьютерной обработке экспериментов. Задав параметрически кривые (38) – для разрушения от нормальных напряжений и (36) – для межслойного разрушения можно, меняя параметр c , «спускать» кривую (38) вплоть до касания с кривой (36). Точка касания определит значения параметров m и c . Предложенный подход дает более точное описание зависимости межслойной прочности от размеров балки, чем традиционный критерий $\tau_0 = \tau_0^*$ (штриховая линия на рис. 9,а) и позволяет рассчитывать несущую способность композитных элементов, подверженных действию комбинации изгибающих моментов и перерезывающих сил.

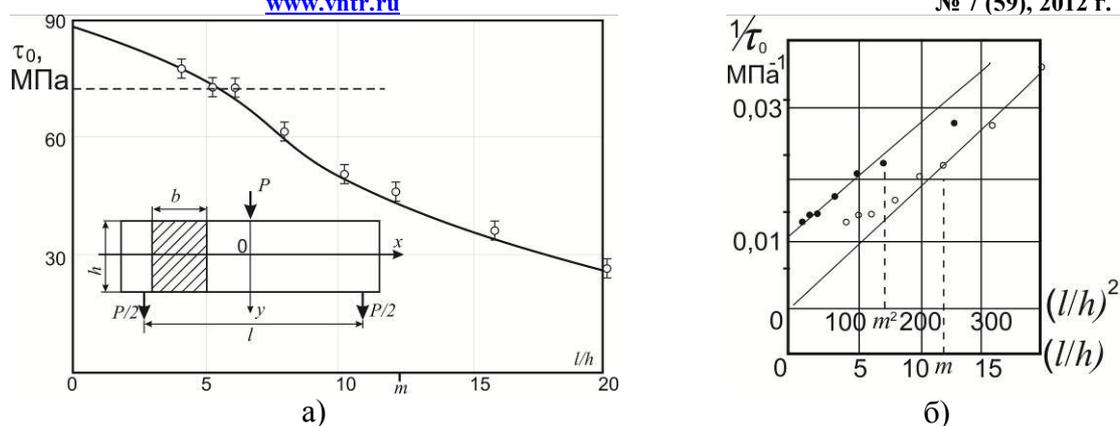


Рис. 9. Схема испытаний а) и зависимости условной сдвиговой прочности τ_0 от отношения пролета балки l к его высоте h для однонаправленного стеклопластика – а) и те же экспериментальные данные в координатах $1/\tau_0 - (l/h)^2$ (●) и $1/\tau_0 - (l/h)$ (○)- б).

4.2. Межслойная прочность при циклическом изгибе

По аналогии с подходом, примененным в п. 1.3, для описания циклической межслойной прочности можно заменить параметры критерия (33) m и c на функции от числа циклов $m(N)$, $c(N)$. По результатам испытаний на циклический изгиб коротких балок из углепластика в [14] была показана параллельность предельных прямых в координатах

$\frac{1}{\tau_0(N)} - \left(\frac{l}{h}\right)^2$ (рис. 10,б), что говорит о независимости произведения $m(N) \cdot c(N) = m(1) \cdot c(1)$

от числа циклов. В качестве кривой Вёлера для изгибной прочности $c(N)$ можно принять полученное при растяжении тех же углепластиков уравнение

$$c(N) = c(1) \cdot (1.04 - 0.035 \cdot \lg N) \quad (39)$$

В результате, изменение условной межслойной прочности τ_0 (32) в зависимости от числа N циклов и от длины образца описывается на основании лишь результатов статических испытаний и независимых экспериментов на циклическое растяжение:

$$\tau_0(N, l/h) = \frac{c(1) \cdot m(1)}{m^2(1) \cdot (1.04 - 0.035 \cdot \lg N)^{-2} + \left(\frac{l}{h}\right)^2} \quad (40)$$

Обработка данных по формуле (40) приведена на рис. 10,а, и расхождение с экспериментом не превышает 7%. Возможна и обратная процедура – оценка кривой усталости для растяжения по данным циклических испытаний коротких образцов, что приводит к экономии материала и к снижению необходимой мощности испытательного оборудования, а также к упрощению крепления образцов, в том числе, при температурных испытаниях.

Основной эффект – зависимость условной сдвиговой прочности от пролета балки для образцов данной толщины - ставит под сомнение корректность её определения при стандартных испытаниях на изгиб коротких балок с использованием формулы (32). Критерий, учитывающий совместное влияние нормальных и касательных напряжений, позволяет описать этот эффект и получить гладкую зависимость критической нагрузки от длины балки. Для изгиба криволинейных образцов или сегментов колец подобный подход описан в [10].

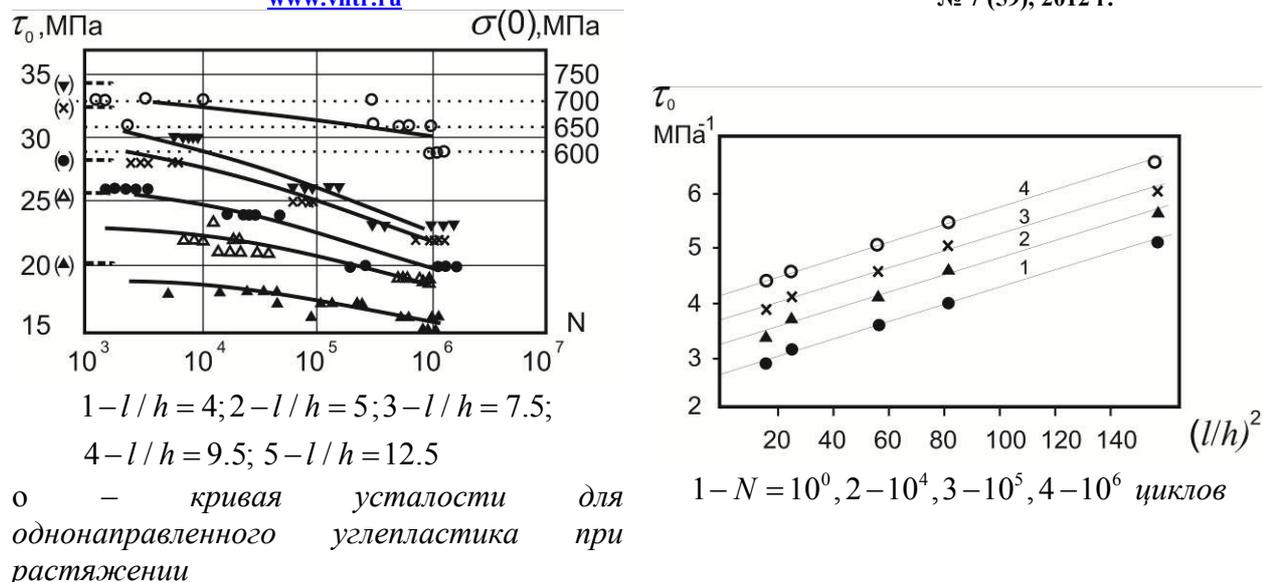


Рис. 10 - Зависимости условной межслойной прочности от числа циклов – а) и $\frac{1}{\tau_0}$ от $\left(\frac{l}{h}\right)^2$ при различном числе циклов N - б).

Выводы. Критерии прочности, учитывающие направленный характер разрушения волокнистых композитов, позволяют более правильно интерпретировать экспериментальные данные и рассчитывать на прочность композитные элементы конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-08-00259-а).

Литература

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов// Библиотека расчетчика. М.: Машиностроение, 1984, 264 с.
2. Ашкенази Е.К. Анизотропия машиностроительных материалов. Л.: Машиностроение, 1969, 111 с.
3. Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Копнов В.А., Поспелов А.Д., Синюков А.М. Сопротивление стеклопластиков. М.: Химия, 1968, 304 с.
4. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971, 240 с.
5. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1967, 398 с.
6. Мартиросян М.М. Упрочнение ориентированного стеклопластика при двухосном растяжении// Механика полимеров, 1976, № 6, с. 1025-1029.
7. Махмутов И.М., Полилов А.Н. Критерий прочности для ортогонально армированных композитов с полимерной матрицей// Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1976, № 5, с. 160-169.
8. Неупругие свойства композиционных материалов// Новое в зарубежной науке. Серия: Механика. Вып. 16. М.: Мир, 1978, 296 с.
9. Полилов А.Н. Критерий разрушения поверхности раздела в однонаправленных композитах// Известия АН СССР, Механика твёрдого тела, 1978, № 2, с.116-119.
10. Полилов А.Н. Определение прочности при изгибе криволинейных образцов// Машиноведение, 1984, № 1, с.54-60.
11. Полилов А.Н. Схема расчёта прочности косоугольно армированных композитов при плоском напряженном состоянии// Механика композитных материалов, 1980, № 2, с. 221-226.

12. Полилов А.Н., Хохлов В.К. Расчётный критерий прочности композитных балок при изгибе// *Машиновение*, 1979, № 2, с. 53-57.
13. Работнов Ю.Н., Данилова И.Н., Полилов А.Н., Соколова Т.В., Карпейкин И.С., Вайнберг М.В. Исследование прочности намоточных эпоксидных угле- и стеклопластиков при кручении, растяжении и поперечном изгибе// *Механика полимеров*, 1978, № 2, с.219-225.
14. Работнов Ю.Н., Когаев В.П., Полилов А.Н., Стрекалов В.Б. Критерий межслойной прочности углепластиков при циклических нагрузках// *Механика композитных материалов*, 1982, № 6, с. 983-986.
15. Работнов Ю.Н., Когаев В.П., Полилов А.Н., Стрекалов В.Б., Думанский А.М. Усталостная прочность однонаправленных углепластиков при растяжении под углом к направлению армирования//*Механика композитных материалов*, 1985, №1, с.44-47.
16. Eckold G.C., Leadbetter D., Soden P.D., Griggs P.R. Lamination theory in the prediction of failure envelopes for filament wound materials subjected to biaxial loading// *Composites*, 1978, v.9, No.4, p.243-246.
17. Hashin Z., Rotem A., A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials// *Journal of Composite Materials*, 1973, v.7, No.5, p. 448-464.
18. Narayanaswami R. Evaluation of the tensor polynomial and Hoffman strength theories for composite materials// *Journal of Composite Materials*, 1977, v.11, No.5, p.366-377.
19. Parry T.V., Wroski A.S. Kinking and tensile, compressive and interlaminar shear failure in carbon-fiber-reinforced plastic beams tested in flexure// *J.Mater.Science*, 1981, v.16, No.5, p. 439-450.
20. Soden P.D., Leadbetter D., Griggs P.R., Eckold G.C. The strength of a filament wound composites under biaxial loading// *Composites*, 1978, v.9, No. 4, p.247-250.
21. Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials// *J. Composite Materials*, 1971, v.5, No.1, p.58-67.
22. Полилов А.Н.Татусь Н.А. Критерии прочности полимерных волокнистых композитов, описывающие некоторые экспериментально наблюдаемые эффекты// *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2008, № 3, с. 103-110.

Поступила: 23.05.12.