

УДК 539.3:621.891

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СМАЗАННОГО КОНТАКТА ПРИ КАЧЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ШАРА ПО ЖЁСТКОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

© Михаил Яковлевич Пановко

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки**Институт машиноведения им. А.А.Благонравова Российской академии наук**[mpanovko@yandex.ru](mailto:mpanovko@yandex.ru)*

**Аннотация.** Рассматривается задача о точечном упругогидродинамическом (УГД) контакте, образуемом при качении деформируемого шара по жёсткому полупространству со смазкой. Математическая модель задачи, формулируемая с учётом массы шара, сводится к системе нестационарных нелинейных интегродифференциальных уравнений и неравенств с начальными и краевыми условиями. Вычислительный алгоритм решения задачи основывался на методе Ньютона и был применён для определения реакции системы шар – смазочная плёнка как на возмущение начальных условий, так и на возмущение внешней нагрузки.

**Ключевые слова:** Упругогидродинамическая смазка, точечный контакт, численное моделирование.

**1. Введение.** Задачи об упругогидродинамической (УГД) смазке сосредоточенных контактов (подобные контакты имеют место в шарикоподшипниках и зубчатых передачах) в подавляющем числе случаев формулируются в предположении о равенстве реакции смазочного слоя (плёнки) внешней нагрузке. При этом контактирующие тела рассматриваются как безмассовые и соответственно исключаются из анализа силы инерции. В работах [1-3] показано, что учёт сил инерции позволяет расширить класс получаемых решений и исследовать нестационарные процессы в зоне контакта. Настоящая работа посвящена изучению колебательных процессов в зоне точечного контакта при качении деформируемого шара заданной массы, на который действует вертикальная сила, по жёсткому полупространству со смазкой. Разработан численный метод решения системы нестационарных нелинейных интегродифференциальных уравнений и неравенств с начальными и краевыми условиями, описывающих распределения давления и толщины смазочной плёнки в зоне точечного контакта, а также движения деформируемого шара в вертикальном направлении. Показано, что отклик системы шар-смазочный слой на возмущение начальных условий имеет вид затухающих колебаний и установившихся колебаний при синусоидальном изменении внешней нагрузки. Полученные решения свидетельствуют о влиянии смазки и инерции взаимодействующих тел на параметры контакта.

**2. Постановка задачи.** Схема контактирующих тел показана на рис. 1. В области контакта вводится подвижная система координат, ось  $z$  которой проходит через центр шара массой  $m_b$ , а плоскость  $xy$  совпадает с границей жёсткого полупространства  $z=0$ . Полупространство описывается координатами:  $|x| < \infty$ ,  $|y| < \infty$ ,  $z \leq 0$ . Предполагается, что контактирующие поверхности являются гладкими. Задана линейная скорость поверхности шара  $\mathbf{v}(v_x, 0)$ ; смазочный материал, вовлекаемый в зазор между поверхностями, обладает свойствами несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости и находится в изотермических условиях; к шару приложена внешняя сила  $Q$ , вызывающая его упругую деформацию в зоне смазанного точечного контакта. Волновым движением в шаре пренебрегается. Предполагается квазистатичность деформации. Физические свойства шара и зависимость

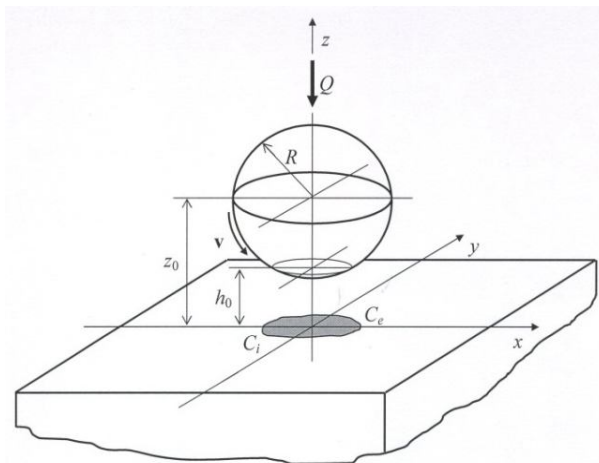


Рис. 1 Схема контакта

вязкости смазочной плёнки от давления полагаются известными. Часть границы области контакта – входная  $C_i$  – задаётся; остальная часть границы – выходная (свободная)  $C_e$ , отделяющая область смазки от области кавитации, – определяется в процессе решения задачи. В общем случае скорость  $\mathbf{v}(v_x, 0)$ , внешняя сила  $Q$ , расположение входной границы  $C_i$  могут изменяться во времени.

Закономерности нестационарного движения деформируемого шара в направлении оси  $z$  можно оценить по изменению во времени расстояния  $z_0(t)$  между центром шара, радиус которого  $R$ , и границей полупространства  $z=0$

$$z_0(t) = R + h_0(t) - \frac{2}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad (1)$$

Здесь  $h_0(t)$  – толщина смазочной плёнки в центре контакта;  $t$  – время;  $\xi, \eta$  – декартовы координаты;  $p(\xi, \eta, t)$  – давление;  $1/E^* = (1-\nu^2)/(2E)$ , где  $E$  и  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона шара;  $S$  – область контакта. Интегральный член в выражении (1) определяет вертикальную компоненту упругой деформации шара в центре контакта. Величиной

$$\delta(t) = z_0(t) - R = h_0(t) - \frac{2}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad (2)$$

оценивается смещение центра шара в направлении оси  $z$ . Уравнение движения шара в направлении оси  $z$  записывается в виде

$$M(p) = m_b \frac{d^2}{dt^2} \left( h_0(t) - \frac{2}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) - \iint_S p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + Q(t) = 0 \quad (3)$$

Для представления системы уравнений и неравенств, описывающих распределения давления и толщины смазочной плёнки, а также движения шара в вертикальном направлении, с начальными и краевыми условиями в безразмерной форме вводятся следующие безразмерные переменные

$$(x', y', \xi', \eta') = (x, y, \xi, \eta) / a_H, t' = t / t_0, p' = p / p_H, t_0 = 2a_H / |\mathbf{v}|, h' = h / h_0(t), \mathbf{v}' = \mathbf{v} / |\mathbf{v}|, \mu' = \mu / \mu_0, H_0(t) = 2Rh_0(t) / a_H^2, \delta'(t) = 2R\delta(t) / a_H^2, V = 24\mu_0 |\mathbf{v}| R^2 / p_H a_H^3, \omega' = 2a_H \omega / |\mathbf{v}|,$$

$$Q_0' = Q_0 p_H, W = \pi m_b v^2 / 12 P_0 R, f(t) = Q(t) / P_0, d(0) = 4RD(0) / (a_H |\mathbf{v}|),$$

$$a_H = (3P_0 R / (2E^*))^{1/3}, p_H = (3P_0 E^{*2} / (2\pi^3 R^2))^{1/3}, a_H / p_H = \pi R / E^*, P_0 = 2\pi p_H a_H^2 / 3$$

Здесь  $x, y, \xi, \eta$  – декартовы координаты;  $t$  – время;  $t_0$  – характерное время процесса;  $p(x, y, t)$  – давление;  $p_H$  – максимальное герцевское давление;  $a_H$  – полуось герцевского контакта для сферических тел;  $h(x, y, t)$  – толщина смазочной плёнки;  $h_0(t)$  – толщина смазочной плёнки в центре контакта;  $H_0(t)$  – безразмерная толщина смазочной плёнки в начале координат;  $\mu$  – вязкость смазочной плёнки;  $\mu_0$  – вязкость смазочной плёнки при давлении окружающей среды;  $\omega$  – частота;  $V$  – нагрузочно-скоростной параметр;  $Q_0$  – пьезокоэффициент вязкости смазочной плёнки;  $\delta$  – смещение центра шара в направлении оси  $z$ ;  $Q(t)$  – внешняя нагрузка;  $P_0$  – внешняя нагрузка в стационарной задаче;  $D(0)$  – значение скорости центра шара в направлении оси  $z$  в начальный момент времени  $t=0$ . В стационарном случае  $f(t)=1$ .

Система уравнений и неравенств с начальными и краевыми условиями, описывающая точечный смазанный контакт шара с полупространством, в безразмерной форме имеет следующий вид (штрихи далее опущены)

$$L(p; H_0) = \nabla \cdot \left( H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \mathbf{v} h \right) - V \frac{\partial h}{\partial t} - V \frac{h}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

$$h(x, y, t) = 1 + \frac{x^2 + y^2}{H_0(t)} + \frac{4}{\pi^2 H_0(t)} \iint_S G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (5)$$

$$M(p; H_0) = W \frac{d^2}{dt^2} \left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) - \iint_S p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \frac{2\pi}{3} f(t) = 0 \quad (6)$$

$$\left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right)_{t=0} = H_0^0 - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p^0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right)_{t=0} = d(0) \quad (8)$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x, y), \quad H_0(0) = H_0^0, \quad p|_C = 0 \quad (9)$$

$$L(p; H_0) = 0, p > 0 \quad \text{в зоне смазки; } p = 0, L(p; H_0) < 0 \quad \text{в зоне кавитации} \quad (10)$$

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y), \quad G(x, y, \xi, \eta) = 1 / \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - 1 / \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \mu = \mu(p)$$

Здесь  $p^0(x, y)$  – давление в начальный момент времени  $t=0$ ;  $h_0^0$  – толщина смазочной плёнки в центре контакта в начальный момент времени  $t=0$ ;  $C = C_i \cup C_e$  – граница области

контакта  $S$ , где  $C_i$  – входная граница,  $C_e$  – выходная граница области контакта. Значения  $p^0(x, y)$  и  $H_0^0$  определяются из решения стационарной задачи.

Система уравнений (4)-(10) является нестационарной нелинейной интегродифференциальной системой, включающей уравнение Рейнольдса (4), уравнение для определения толщины смазочной плёнки (5), уравнение движения шара в направлении оси  $z$  (6), начальные и краевые условия для давления и толщины смазочной плёнки (7)-(9). Для определения местоположения выходной границы  $C_e$  используются условия дополнителности (10). Обоснование применимости условий дополнителности для решения задач об УГД контактах подробно описано в работе [4].

В системе (4)-(10) заданными считаются входная граница  $C_i$ ; нагрузочно-скоростной параметр  $V$  (для тяжело нагруженного контакта  $V \ll 1$ ,  $Q_0 \gg 1$ ); вектор скорости  $\mathbf{v}(v_x, 0)$ ; зависимость вязкости от давления  $\mu = \mu_0 \exp(Q_0 p)$  с заданным пьезокоэффициентом вязкости смазочной плёнки  $Q_0$ ; начальные условия  $\delta(0)$ ,  $d\delta/dt|_{t=0} = d(0)$ ,  $p^0(x, y)$ ,  $H_0^0$ ; давление на границе области контакта  $p|_C$ ; параметр  $W$ ; функция  $f(t)$ .

Решение задачи представляется распределениями давления  $p(x, y, t)$  и толщины смазочной плёнки  $h(x, y, t)$ , местоположением выходной границы  $x_e(y, t)$ , безразмерной толщиной смазочной плёнки в начале координат  $H_0(t)$ . Результаты решения задачи используются для вычисления смещения центра шара  $\delta(t)$  по формуле

$$\delta(t) = H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad (11)$$

С учётом выражения для  $\partial h / \partial t$ , полученного после дифференцирования по  $t$  уравнения (5), уравнение Рейнольдса (4) может быть записано в следующем виде

$$L_1(p; H_0) = \nabla \cdot \left( H_0^3 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - H_0 V \mathbf{v} h \right) - V \frac{\partial H_0}{\partial t} - V \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 0 \quad (12)$$

Уравнения (6) и (12) с учётом приведенных выше начальных и краевых условий (7)-(9) используются для вывода конечноразностных уравнений численного решения УГД задачи.

**3. Численный метод.** Расчётная область, включающая область контакта  $S$ , где  $p > 0$ , и область кавитации, где  $p = 0$ , в плоскости  $x, y$  задается в виде прямоугольника  $\{x, y : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$  и покрывается неравномерной разнесённой декартовой сеткой с системой узлов  $(x_i, y_j), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ . Давление определяется в узлах  $(x_i, y_j)$ , толщина смазочной плёнки – в узлах  $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ . После интегрирования уравнения (12) по области  $\Delta S_{ij}$ , занимаемой расчётной ячейкой  $(i, j)$  внутри контура  $(l_{ij})$ , получаем

$$L_1(p; H_0) = \int_{(l_{ij})} \left[ H_0^3 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) - H_0 V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h \right] dl - V \left[ \frac{\partial H_0}{\partial t} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right] \Delta S_{ij} = 0 \quad (13)$$

В условиях дополнителности (10) оператор  $L(p; H_0)$  заменяется на  $L_1(p; H_0)$ . Проинтегрировав уравнение (6) один раз по времени на интервале  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  получаем

$$M_1(p; H_0) = W \frac{d}{dt} \left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right)_{t_{n+1}} - W \frac{d}{dt} \left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right)_{t_n} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \iint_S p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \frac{2\pi}{3} f(t) \right) dt = 0 \quad (14)$$

Алгоритм решения системы уравнений и неравенств, описывающих УГД контакт, основан на методе Ньютона с использованием неявной схемы при аппроксимации нестационарных уравнений. Уравнения (13), (14), линеаризованные около решения  $(p(x, y, t_{n+1}))_k^{n+1}$ ,  $(H_0(t_{n+1}))_k^{n+1}$ , где  $n$  – номер временного шага,  $k$  – номер итерации на текущем временном шаге, используются для построения конечноразностной схемы. Система разностных уравнений для итерации  $(k + 1)$  на временном шаге  $(n + 1)$  имеет следующую структуру

$$\begin{pmatrix} (a_{qr})_{mm} & (b_q)_m \\ (c_r)_m^T & -W \end{pmatrix} \Big\|_k^{n+1} \begin{pmatrix} (\Delta p_r)_m \\ \Delta H_0 \end{pmatrix} \Big\|_{k+1}^{n+1} = - \begin{pmatrix} (L_1(p_r; H_0))_m \\ M_1(p_r; H_0) \end{pmatrix} \Big\|_k^{n+1} \quad (15)$$

Здесь элементами матрицы Якоби порядка  $(m + 1)$  являются полная квадратная матрица  $(a_{qr})_{mm}$  порядка  $m$ , вектор-столбец  $(b_q)_m$ , вектор-строка  $(c_r)_m^T$  ( $q, r = 1, \dots, m$ ), параметр  $W$ . Значение  $m$  равно числу узлов сетки, в которых определяются компоненты вектор-столбца приращений давления  $(\Delta p_r)_m$ , и зависит от местоположения выходной границы  $C_e$ .

Один шаг итерационного процесса состоит в решении разностных уравнений (15) относительно приращений  $\Delta H_{0,k+1}^{n+1}(t_{n+1})$ ,  $\Delta p_{k+1}^{n+1}(x_i, y_j, t_{n+1})$  методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента, вычислении  $H_{0,k+1}^{n+1} = H_{0,k}^{n+1} + \Delta H_{0,k+1}^{n+1}$ ,  $p_{k+1}^{n+1} = p_k^{n+1} + \Delta p_{k+1}^{n+1}$ , вычислении  $h_{k+1}^{n+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, t_{n+1})$  по соотношению (6) и определении выходной границы  $x_{e,k+1}^{n+1}(y_j, t_{n+1})$ . Интеграл в (5) вычислялся по кубатурной формуле для сингулярных интегралов [5]. Проверка условий дополнителности (10) осуществляется в каждом узле расчётной сетки после решения системы (15). Узлы области смазки, которые не удовлетворяют условию  $p > 0$ , помещаются в область кавитации, а узлы области кавитации, в которых нарушается условие  $L_1(p; H_0) < 0$ , помещаются в область смазки. Процедура решения системы (15) и проверки принадлежности узлов соответствующим областям осуществляется в итерационном цикле. Итерационный процесс продолжался до достижения требуемой относительной точности решения  $\varepsilon$ , т.е.

$$\max \left( \left| H_{0,k+1}^{n+1} / H_{0,k}^{n+1} - 1 \right|, \left| p_{k+1}^{n+1} / p_k^{n+1} - 1 \right|, \left| h_{k+1}^{n+1} / h_k^{n+1} - 1 \right|, \left| x_{e,k+1}^{n+1} / x_{e,k}^{n+1} - 1 \right| \right) < \varepsilon$$

После выполнения условий по  $\varepsilon$  осуществляется переход на новый шаг по времени.

**4. Численные результаты.** Изложенный выше вычислительный алгоритм был применён для анализа реакции системы шар – смазочный слой как на возмущение начальных условий, так и возмущение внешней нагрузки. Численное моделирование осуществлялось на сетке  $40 \times 40$  при  $V = 0,1$  и  $Q_0 = 5$ . Вектор скорости качения имел компоненты  $v_x = 1$ ,  $v_y = 0$ . Шаг по времени задавался постоянным и равным  $\Delta t = 0,2$ .

Решение стационарной задачи было получено на основе стационарного варианта описанного выше численного метода. Результаты решения этой задачи представлены распределениями давления  $p^0(x, y)$  и толщины смазочной плёнки  $h^0(x, y)$  в зоне контакта на рис. 2 а, б соответственно, а также линиями уровня этих распределений на рис. 3 а, б. Безразмерные значения толщины смазочной плёнки в центре контакта и смещения центра шара равнялись соответственно  $H_0^0 = 0,1761$  и  $\delta(0) = 1,793$ .

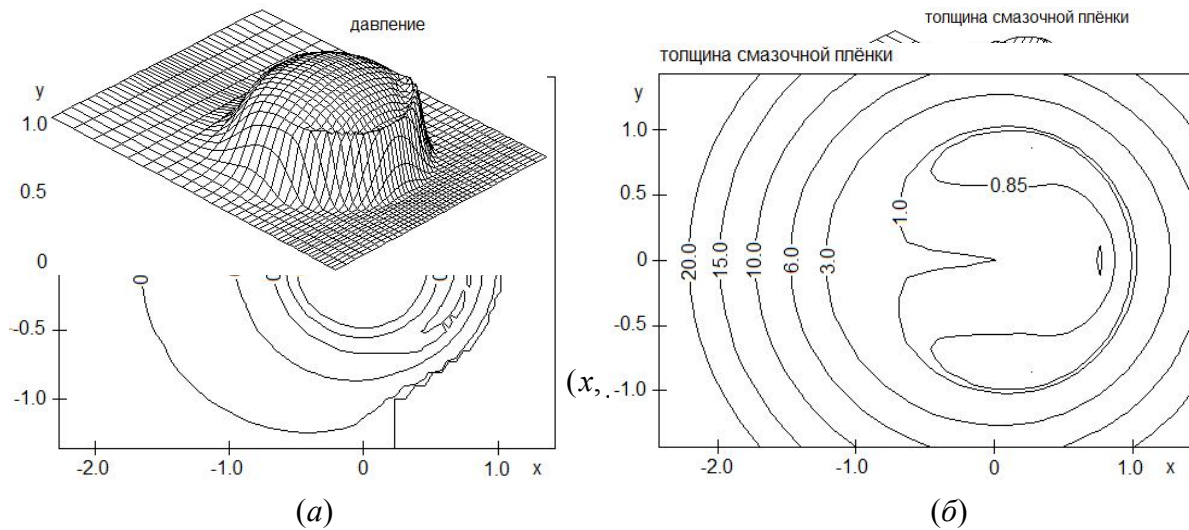
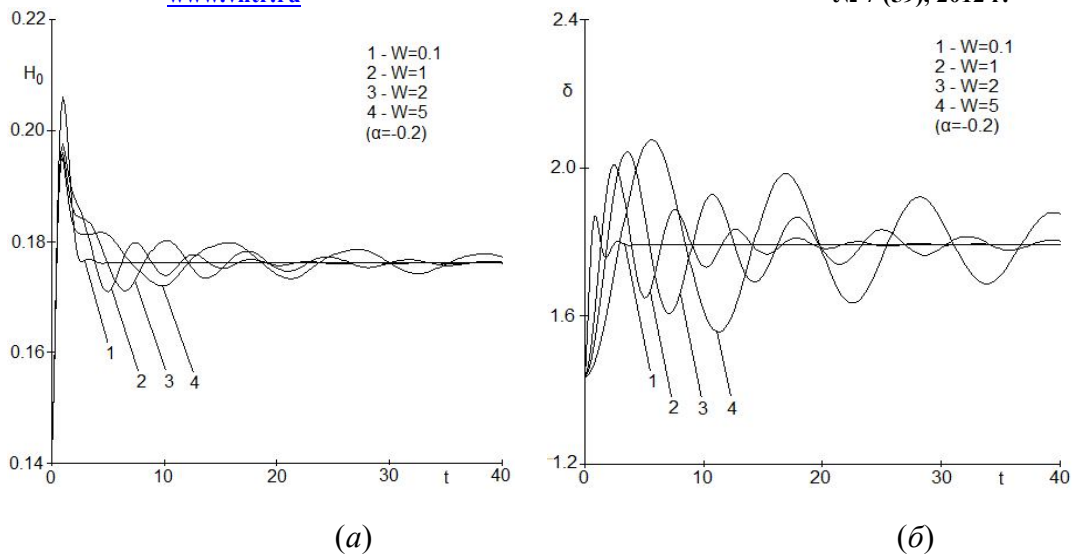


Рис. 3 Линии уровня распределений  $p^0(x, y)$  и  $h^0(x, y)$  в зоне контакта

**4.1.** Влияние возмущения начальных условий на поведение во времени системы шар-смазочный слой рассматривалось для случая, в котором  $\tilde{\delta}(0) = (1 + \alpha)\delta(0)$ ,  $d\delta/dt|_{t=0} = d(0) = 0$ ,  $Q(t)/P_0 = f(t) = 1$ . Здесь  $\tilde{\delta}(0)$  – возмущённое смещение центра шара,  $\alpha$  – задаваемый коэффициент. Представленные ниже результаты расчётов были получены при  $\alpha = -0,2$ . Исходя из формулы для расчета  $\delta(0)$  (см. (7)), в вычислительном алгоритме  $\tilde{\delta}(0)$  моделировалось начальными условиями в виде

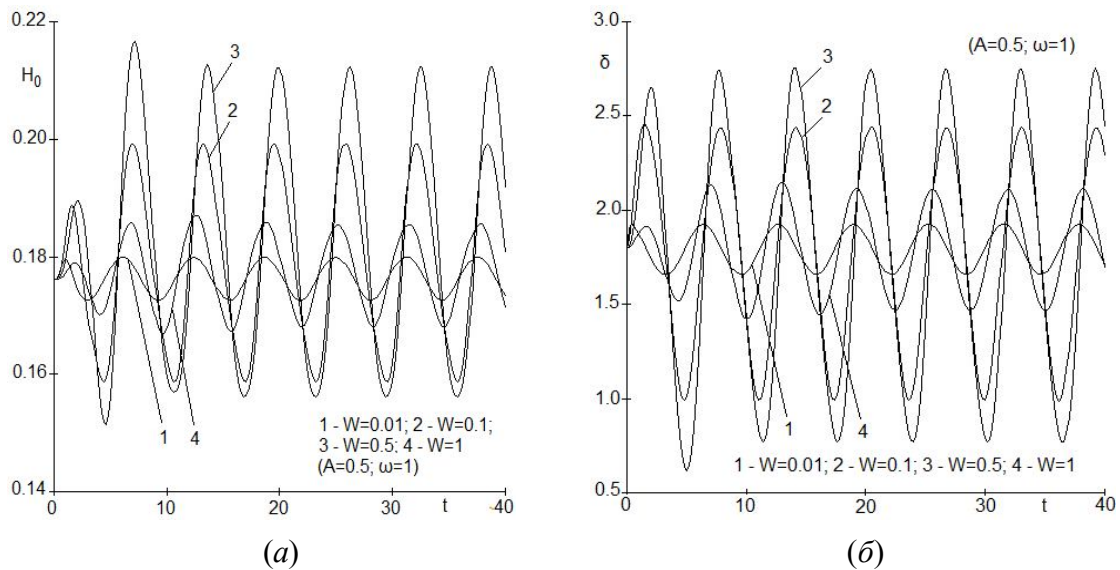
$$\tilde{H}_0^0 = (1 + \alpha)H_0^0, \quad \tilde{p}^0(x, y) = (1 + \alpha)p^0(x, y)$$

Характер изменения  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$  во времени показан соответственно на рис. 4 а, б для ряда значений параметра  $W$ . Поскольку  $(z_0(t) - R) < 0$ , то для наглядности  $\delta(t)$  представлено в виде  $|\delta(t)|$ . Из графиков следует, что  $\delta(0) = \tilde{\delta}(0)$  вызывает затухающие колебания  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$  около соответствующих стационарных значений. При этом с ростом  $W$  наблюдается увеличение времени затухания колебаний и периода колебаний.



**Рис. 4** Влияние возмущения начального смещения на изменение во времени  $H_0$  и  $\delta$  при различных значениях параметра  $W$

**4.2.** Влияние возбуждающей силы  $2\pi(1 + A \sin(\omega t)) / 3$  на систему шар-смазочный слой рассматривалось как в случае, когда  $A = 0,5$ ,  $\omega = 1,0$ ,  $W = var$ , так и в случае, когда  $A = 0,5$ ,  $W = 1,0$ ,  $\omega = var$ . В качестве начального условия использовалось решение стационарной задачи  $H_0^0$ ,  $p^0(x, y)$ . Скорость смещения в начальный момент времени  $d\delta / dt|_{t=0} = d(0) = 0$ .



**Рис. 5** Влияние возмущающей силы на изменение во времени  $H_0$  и  $\delta$  при различных значениях параметра  $W$

На рис. 5 а, б представлены расчётные зависимости  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$  для ряда значений параметра  $W$  при фиксированных значениях амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$  возбуждающей силы. Из графиков следует, что по завершении переходного режима зависимости  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$  имеют вид установившихся периодических колебаний, амплитуда которых имеет немонотонную зависимость от параметра  $W$ . Период колебаний, как видно, не зависит от  $W$ .

На рис. 6 а, б представлены зависимости  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$  для ряда частот  $\omega$  возбуждающей силы при фиксированных значениях амплитуды  $A$  и параметра  $W$ .

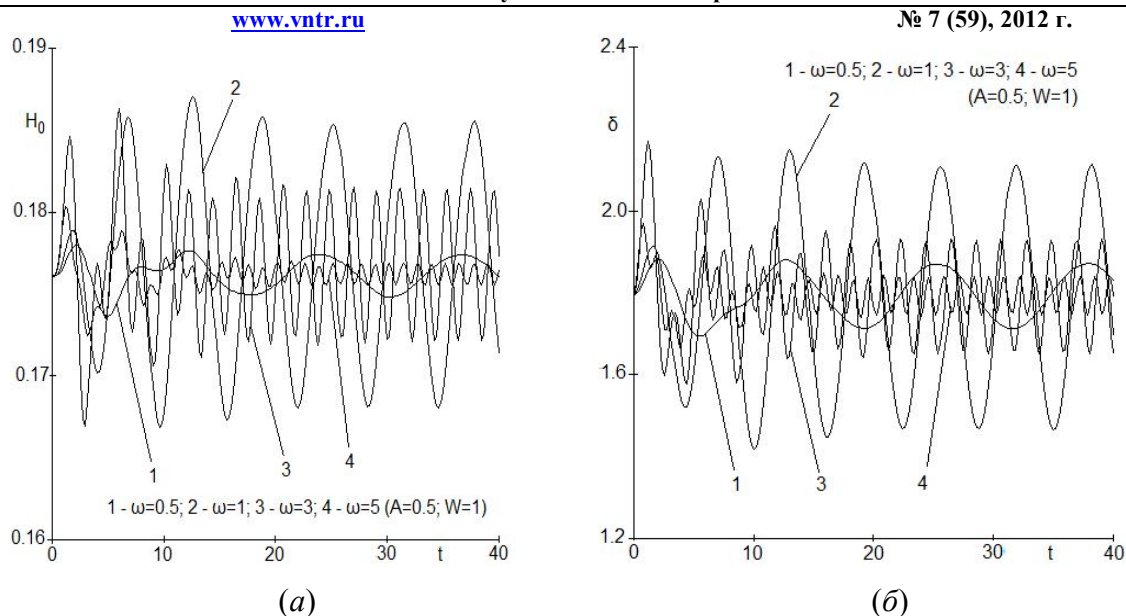


Рис. 6 Влияние частоты возмущающей силы  $\omega$  на изменение во времени  $H_0$  и  $\delta$

Как следует из этого рисунка, амплитуда установившихся периодических колебаний характеризуется немонотонной зависимостью от частоты возбуждающей силы  $\omega$  при прочих равных условиях.

**5. Выводы.** Полученные решения сформулированной выше задачи демонстрируют значительное влияние смазочной плёнки, а также массы упругого шара на его колебания. Описанная выше модель и численный метод её решения могут быть применены для анализа влияния на параметры смазанного контакта различных нестационарных внешних условий (например, приложенной нагрузки, скорости).

### Литература

1. Кудиш И.И., Пановко М.Я. Колебания деформируемого цилиндра при его качении по жёсткому полупространству со смазкой // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 5. С. 755-776.
2. Wijnant Y.H., Venner C.H. Analysis of an EHL circular contact incorporating rolling element vibration // Elastohydrodynamics '96, Fundamentals and Application in Lubrication and Traction. Amsterdam: Elsevier, 1997. P. 445-456.
3. Kudish I.I. On formulation of a non-steady lubrication problem for a non-conformal contact // Tribol. Trans. 1999. V. 42. № 1.
4. Oh K.P. The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // Trans. ASME. J. Tribol. 1984. V. 106. № 1. P. 88-95.
5. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Поступила: 20.05.12.