

УДК 621.0, 621.8

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОТОРА ДЖЕФКОТТА-ЛАВАЛЯ С УЧЕТОМ ЕГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПРИ КОНТАКТЕ И НЕСООСНОСТИ СО СТАТОРОМ*

© Андрей Николаевич Никифоров

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им.

А.А. Благоднарова Российской академии наук

n.andre@mail.ru

Аннотация. В статье исследуются переходные движения системы «ротор-статор» при внезапной разбалансировке ротора и их контакте, в том числе сопровождающиеся эффектом проскальзывания ротора, а также при несоосности ротора и статора в состоянии статического равновесия вследствие неизбежных неточностей изготовления и сборки, когда номинальная скорость вращения ротора может быть ниже и выше критической, а крутящий момент имеет стандартную для роторных агрегатов характеристику. Получено, что в течение нескольких долей секунды может возникнуть как сравнительно безопасный, так и недопустимый режим контактной работы ротора с огромной динамической нагрузкой, действующей на ротор и статор. Обсуждается развитие системных процессов во времени, а также влияние величины дисбаланса, скорости вращения и коэффициента восстановления на критические значения коэффициента трения скольжения, приводящие к опасным чистой обкатке и обкатке с проскальзыванием ротора по статору.

Ключевые слова: Ротор, вал, статор, математическая модель, удар (соударение), виброударное и безотрывное (непрерывно-контактное) движение, скольжение, обкатка, проскальзывание.

1. Введение

Поперечные перемещения (колебания) вращающихся роторов стеснены, в той или иной степени, малыми зазорами между ротором и ограничивающими статорными узлами, к которым могут быть отнесены подшипники скольжения, щелевые уплотнения, ограничительные кольцевые втулки неподвижного корпуса и ограничительные подшипники качения. Выбор радиальных зазоров при падении давления в системе смазки, внешнем возмущающем воздействии, прохождении критических скоростей, потере динамической устойчивости или разбалансировке ротора может стать причиной вредоносного виброударного или быстро следующего за ним непрерывно-контактного движения ротора со стремительным истиранием его и статорных поверхностей, которое в англоязычной научно-технической литературе известно как «full annular rub» [1].

В том числе возможен чрезвычайно опасный случай с гигантской нагрузкой на контактирующие поверхности. Это связано с тем, что из-за действия сил сухого трения ротор начинает прецессировать со значительной угловой скоростью в сторону, противоположную вращению. При этом линейная скорость движения ротора в точке контакта относительно ограничивающей поверхности $V = \omega r + \Omega \delta$, где соответственно ω и Ω – угловая скорость вращения и прецессии ротора, r – радиус ротора, δ – радиальный зазор, за очень короткое время может обратиться в нуль, и начнется качение (обкатка) ротора по ограничивающим статорным поверхностям [2,3]. За рубежом данный режим движения принято называть «backward rolling» [1,4]. При обкатке центр ротора движется по окружности радиуса δ в противоположную вращению сторону со скоростью $\omega r / \delta$, т. е. частота прецессии ротора:

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-08-00500-а

$$\Omega_{\text{обк}} = -\omega r / \delta,$$

а любая эксцентричная точка ротора описывает гипотрохоиды с независимым от ω числом петель $n=r/\delta$, что равно числу прецессий (полных оборотов центра) ротора за один его оборот. При этом нагрузка на контактирующие поверхности $N=m\delta\Omega_{\text{обк}}^2$ достигает громадных значений, так как ω – велика, а $r \gg \delta$.

Однако, как показали Йон-Сан Чои и Л.Я. Банах путем вычислительных и натуральных экспериментов [1,5], идеальное качение ротора без скольжения по статору реализуется при сравнительно небольших числах оборотов. С увеличением ω развивается проскальзывание ротора в сторону вращения, поэтому $n < r/\delta$, а также скорость самовозбуждающейся обратной прецессии становится меньше $\omega r/\delta$ и зависимой от ω , дисбаланса a и собственной частоты ротора $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Кроме того, она не остается постоянной, а оказывается периодической функцией времени. Именно этим объясняется быстрое истирание контактирующих поверхностей, а также интенсивная вибрация всей экспериментальной установки при «backward slipping» [1] или обратном скольжении ротора по статору. Приближенное аналитическое выражение для частоты прецессии ротора при обратном скольжении выводится, например, в [5]:

$$\Omega_{\text{oc}} = \omega(A-1) - A\varepsilon\omega \cos(A\omega t),$$

$$\text{где } A = \frac{4\sqrt{(1-\omega_0/\omega)^2 + 2a/\delta}}{b+4}, \quad \varepsilon = \frac{b}{b+4}, \quad b = \frac{4a/\delta}{(1-\omega_0/\omega)^2 + 2a/\delta}.$$

Отсюда также видно, что сбалансированный ротор ($a=0$) при действии сил сухого трения о статор совершает обратную прецессию с частотой собственных колебаний $\Omega_{\text{oc}} = -\omega_0$. Такой случай неоднократно отмечен в классической литературе [6].

Г. Блэк в [7] одним из первых посредством математической модели объясняет, что вероятность появления обратной прецессии ротора вследствие контакта со статором возрастает, когда сила сухого трения доминирует по сравнению с силой дисбалансного возмущения.

В работе [4] делается похожий вывод о том, что коэффициент трения скольжения является главным параметром, которым управляется появление режимов: обкатка, обратное, а также прямое синхронное скольжение ротора по статору от англ. «forward synchronous slipping». В последнем случае ротор все время остается прижатым к статору одним и тем же местом, а его центр делает полный оборот за время одного оборота ротора, двигаясь все время в направлении вращения [8]. Ф.Ф. Эрих с соавтором отыскивали аналитические решения для такого движения и получили, что оно случается, когда коэффициент трения сравнительно мал, а предшествующие этому режиму удары слабые. При прямом синхронном скольжении ротора по статору наблюдается сильное истирание контактирующих поверхностей, хотя и не такое значительное как при обратном скольжении [9].

Ф.Ф. Эрих также описывает соответственно в [10, 11] субсинхронное и хаотическое движение неуравновешенного ротора, вызванное его эксцентричной установкой относительно статора и локальным задеванием последнего при каждом обороте. Установлено, что ротор имеет тенденцию к перескокам с частотой собственных колебаний (ω_0), когда он вращается с угловой скоростью $\omega = n\omega_0$, где n - целое число [10]. При этом вибрационный отклик ротора в переходной зоне на полпути между смежными зонами субгармонического отклика имеет все характеристики хаотического поведения – переход от субгармонического к хаотическому отклику сопровождается бифуркациями (увеличением количества) траекторий, которым может следовать ротор, а также колебаниями частоты вращения, что подтверждено экспериментально на турбомашине, работающей на скорости между $8\omega_0$ и $9\omega_0$ [11].

А. Мышинска [12] проанализировала физику виброударного движения ротора по статору и оценила влияние изменения зазора между ними на широкий круг системных параметров.

Многие авторы, как например та же А. Мышинска [13-15], сообщают, что задевание ротором статора приводит к хаотическим и почти хаотическим вибрациям ротора, когда влияние соударений, трения, несоосности, а также анизотропии (несимметричности) в системе «ротор-статор» велико.

В [16] исследуется влияние инерционных характеристик ротора и статора, величины силы трения между ними и нелинейности радиальной и поперечной изгибной жесткости турбинных лопаток на динамику системы. Выявлено три принципиально разных типа движения ротора: с систематическими ударами, постоянным контактом (безотрывное) и почти хаотическими соударениями. Движения наблюдались именно в таком порядке при возрастании скорости вращения, что хорошо согласуется с опытными данными работы [5], а также с численными исследованиями [17].

Весьма интересна статья Хайнца Улбриха [18], посвященная аналитическому определению условий существования и устойчивости для движений ротора Джеффкотта с периодическим, квазипериодическим и непрерывным касанием статора. Другое не менее полезное аналитическое исследование [19], выполненное на простой математической модели и объясняющее экспериментальные результаты, посвящено влиянию сухого трения, дисбаланса, внутреннего трения ротора и жесткости уплотнения на процесс перехода прямой прецессии ротора к обратной вследствие контакта с уплотнением.

Позднее А. Мышинска делает обширный обзор литературы по теме кругового контактного истирания, возникающего в роторных машинах [20].

Важно отметить также литературный обзор [21], представляющий различные подходы к моделированию ударных и контактных процессов, происходящих в роторных системах. Вместе с тем наиболее широко используются соответственно модель удара с коэффициентом восстановления [22] и контактная модель «сила-вдавливание» [23]. Здесь нельзя не отметить Р. Битти [24], который предложил математическую модель для контактных сил, популярную до сих пор, а также разработал несколько рекомендаций по диагностике задевания ротором корпуса путем теоретического моделирования и лабораторных опытов.

В последнее время появилось множество работ, например [25-27], посвященных моделированию и исследованию виброударного движения ротора в подшипниках скольжения с учетом нелинейных гидродинамических сил масляного слоя. Их особенностью является отыскание периодических, квазипериодических и хаотических вибраций с систематическими и прерывистыми ударами ротора о подшипник в зависимости от системных параметров. По сути, все разработанные модели представляют собой частный случай исходной системы «ротор-статор». В роторных машинах существует достаточное количество ситуаций и мест (сечений), где нет никаких гидродинамических сил. Модели с нелинейными масляными силами в контактных зонах непригодны для изучения скольжения и уж тем более обкатки ротора по ограничивающим поверхностям. Такие силы предотвращают их появление, что давно и неоднократно определено экспериментально.

Таким образом, в научно-технической литературе имеется достаточно большое число публикаций, затрагивающих моделирование и динамический анализ контактного взаимодействия ротора со статором. Однако существующие расчетные модели разработаны для определенных (частных) случаев поведения ротора. С их помощью можно исследовать либо безударные и виброударные, либо безотрывные движения ротора по статору (прямое синхронное скольжение и обкатку), в том числе с эффектом проскальзывания, что, кстати, в англоязычных научных трудах широко обсуждается как «backward rolling with slipping». Другими словами отсутствует общая математическая модель пригодная для изучения всех этих режимов движения ротора.

В качестве исключения можно лишь отметить работу [28], где сделана сравнительно удачная попытка построения многорежимной расчетной модели «ротор Джеффкотта-Лавала – статор». Недостатки предложенной модели состоят в том, что не рассмотрена возможность проскальзывания ротора при возникновении его обкатки по статору, а также не учтены важные с практической точки зрения силовые факторы. Например такие как: нагрузка от веса ротора, имеющая место при его горизонтальной установке; крутящий момент на роторе, действующий при его разгоне-торможении; несоосность ротора и статора в состоянии статического равновесия, вследствие неизбежных неточностей изготовления и сборки.

2. Математическая модель ротора Джеффкотта-Лавала с учетом его проскальзывания при контакте и несоосности со статором

Общая всережимная и многопараметрическая математическая модель «симметричный, однодисковый, гибкий ротор – жесткозакрепленный статор» может быть построена с использованием вращающейся с ротором (точнее с вектором его неуравновешенности \overline{RG}) системы координат $Ouvz$ (рис.1). Тогда в качестве обобщенных координат достаточно взять линейные q_1, q_2 и угловое q_3 перемещения ротора.

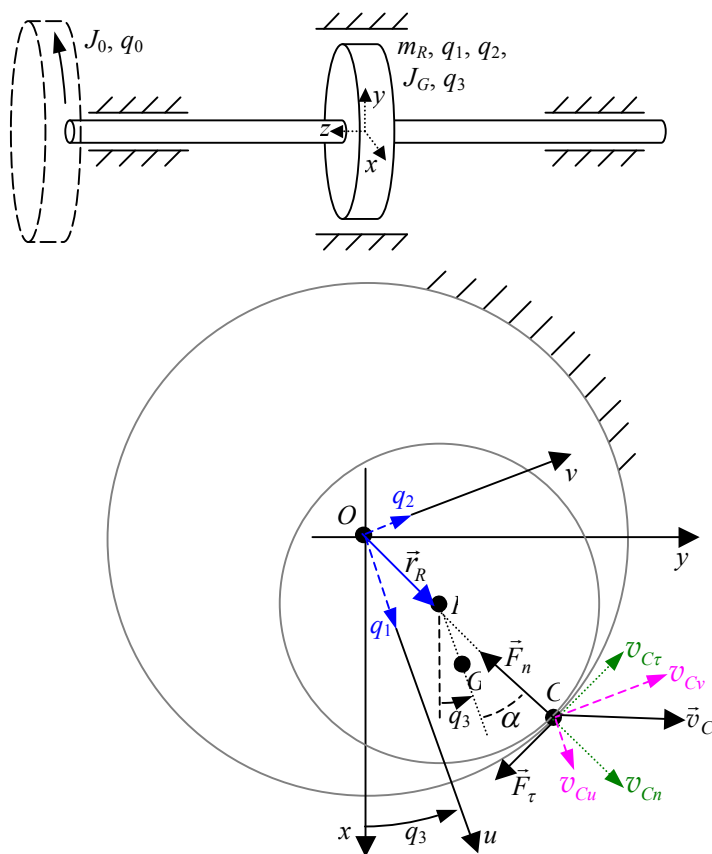


Рис.1. Система «симметричный, гибкий ротор – жесткозакрепленный статор»

Вектор абсолютной скорости центра R определяется суммой векторов \vec{r}_R – переносной скорости центра ротора во вращающейся системе координат и $\overline{r_R \dot{q}_3}$ – относительной скорости центра ротора, обусловленной вращением системы Ouv вокруг начала координат O :

$$\vec{v}_R = \vec{r}_R + \overline{r_R \dot{q}_3} = \dot{q}_1 \vec{u} + \dot{q}_2 \vec{v} + q_1 \dot{q}_3 \vec{v} - q_2 \dot{q}_3 \vec{u}, \quad (1)$$

где \vec{u} и \vec{v} – единичные векторы.

При этом, так как движение ротора во вращающейся системе координат является криволинейно поступательным (переносным), то все точки ротора имеют одинаковую скорость движения относительно начала координат O в системе $Ouvz$. Это позволяет найти важные с точки зрения роторной динамики скорости точек G и C (т. G располагается на линии параллельной оси ротора и проходящей через его центр масс, а т. C принадлежит линии контакта):

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= \vec{r}_R + \overline{OG} \times \dot{q}_3 = \vec{r}_R + \overline{r_R} \dot{q}_3 + \overline{RG} \times \dot{q}_3 = \dot{q}_1 \vec{u} + \dot{q}_2 \vec{v} + q_1 \dot{q}_3 \vec{v} - q_2 \dot{q}_3 \vec{u} + a \dot{q}_3 \vec{v} \\ \vec{v}_C &= \vec{r}_R + \overline{OC} \times \dot{q}_3 = \vec{r}_R + \overline{r_R} \dot{q}_3 + \overline{RC} \times \dot{q}_3 = \dot{q}_1 \vec{u} + \dot{q}_2 \vec{v} + q_1 \dot{q}_3 \vec{v} - q_2 \dot{q}_3 \vec{u} + (r \cos \alpha) \dot{q}_3 \vec{v} - (r \sin \alpha) \dot{q}_3 \vec{u}'\end{aligned}$$

где $a = RG$ и $r = RC$ - дисбаланс и радиус ротора.

Отсюда и из (1) легко найти скалярные величины, т.е. проекции абсолютных скоростей центров R , G и точки C :

$$\begin{aligned}v_{Ru} &= \dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_3 & v_{Gu} &= \dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_3 & v_{Cu} &= \dot{q}_1 - (q_2 + r \sin \alpha) \dot{q}_3 \\ v_{Rv} &= \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_3 & v_{Gv} &= \dot{q}_2 + (q_1 + a) \dot{q}_3 & v_{Cv} &= \dot{q}_2 + (q_1 + r \cos \alpha) \dot{q}_3\end{aligned}\quad (2)$$

Уравнения движения для любой упругой колебательной системы целесообразно выводить, применяя метод Лагранжа. Удобство этого способа в том, что число составленных дифференциальных уравнений движения равно числу степеней свободы, т.е. числу обобщенных координат. Уравнения движения для каждой из обобщенных координат получаются по Лагранжу из дифференцирования кинетической энергии T :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.\quad (3)$$

Кинетическая энергия твердого тела определяется как сумма кинетической энергии его поступательного движения (вместе с центром масс) и кинетической энергии его вращательного движения (вокруг центра масс). Для рассматриваемой системы выражение кинетической энергии складывается из кинетических энергий ротора и привода:

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{q}_0^2 + \frac{1}{2} m_R (v_{Gu}^2 + v_{Gv}^2) + \frac{1}{2} J_G \dot{q}_3^2,\quad (4)$$

где m_R - масса и J_R - полярный (осевой) момент инерции ротора, $J_G \approx J_R$ - момент инерции ротора относительно оси, параллельной оси ротора и проходящей через его центр масс G , \dot{q}_0 - угловая скорость и J_0 - полярный момент инерции привода.

Подстановка (2) в (4) дает кинетическую энергию системы, выраженную через принятые обобщенные координаты (здесь и далее вместо параметра J_G используется J_R):

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{q}_0^2 + \frac{1}{2} m_R \left[(\dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_3)^2 + (\dot{q}_2 + (q_1 + a) \dot{q}_3)^2 \right] + \frac{1}{2} J_R \dot{q}_3^2.$$

Отсюда можно найти следующие производные кинетической энергии:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) &= m_R (\ddot{q}_1 - q_2 \ddot{q}_3 - \dot{q}_2 \dot{q}_3), & \frac{\partial T}{\partial q_1} &= m_R [\dot{q}_2 \dot{q}_3 + (q_1 + a) \dot{q}_3^2], \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) &= m_R [\ddot{q}_2 + (q_1 + a) \ddot{q}_3 + \dot{q}_1 \dot{q}_3], & \frac{\partial T}{\partial q_2} &= m_R (-\dot{q}_1 \dot{q}_3 + q_2 \dot{q}_3^2), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) &= J_R \ddot{q}_3 + m_R [q_2^2 \ddot{q}_3 + 2q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (q_1 + a) \ddot{q}_2 + (q_1 + a)^2 \ddot{q}_3 + 2(q_1 + a) \dot{q}_1 \dot{q}_3], \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_0} \right) &= J_0 \ddot{q}_0.\end{aligned}$$

Подстановка этих производных в уравнения Лагранжа (3) позволяет составить уравнения движения рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} m_R [\ddot{q}_1 - q_2 \ddot{q}_3 - 2\dot{q}_2 \dot{q}_3 - (q_1 + a) \dot{q}_3^2] = Q_1, \\ m_R [\ddot{q}_2 + (q_1 + a) \ddot{q}_3 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 - q_2 \dot{q}_3^2] = Q_2, \\ [J_R + m_R ((q_1 + a)^2 + q_2^2)] \ddot{q}_3 + m_R [(q_1 + a) \ddot{q}_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2(q_1 + a) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3] = Q_3, \\ J_0 \ddot{q}_0 = Q_0. \end{cases} \quad (5)$$

Обобщенные силы/моменты Q_i для соответствующих линейных и угловых перемещений q_i определяются следующими выражениями (рис.2):

$$\begin{aligned} Q_1 &= -k_R q_1 - d_R v_{Ru} + m_R g \cos q_3 - F_n \cos \alpha + F_\tau \sin \alpha, \\ Q_2 &= -k_R q_2 - d_R v_{Rv} - m_R g \sin q_3 - F_n \sin \alpha - F_\tau \cos \alpha, \\ Q_3 &= d_R v_{Ru} q_2 - d_R v_{Rv} q_1 - m_R g [(q_1 + a) \sin q_3 + q_2 \cos q_3] - M_C + \tilde{k}_R (q_0 - q_3), \\ Q_0 &= M_0 - \tilde{k}_R (q_0 - q_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Тригонометрические множители составляющих контактной силы F_n и F_τ представляют собой отношения вида:

$$\cos \alpha = \frac{q_1}{r_R}, \quad \sin \alpha = \frac{q_2}{r_R}, \quad \text{где } r_R = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \text{ - радиальное смещение ротора.} \quad (7)$$

Как видно, суммируются важные для практики статические и динамические нагрузки. Силы поперечной упругости ротора $k_R q_1, k_R q_2$, где $k_R = 48EI/l^3$ - жесткость ротора на изгиб. Силы внешнего трения, пропорциональные абсолютным скоростям (2) ротора $d_R v_{Ru}, d_R v_{Rv}$, где d_R - коэффициент вязкого сопротивления «фиктивного» из-за заземления опор [31] и (или) специального демпфера в середине пролета ротора. Сила тяжести ротора $m_R g$. Нормальная F_n и касательная F_τ составляющие, а также момент M_C контактной силы, действующие на ротор при выборе радиального зазора δ . Крутящий момент привода M_0 . Моменты сил угловой упругости вала $\mp \tilde{k}_R (q_0 - q_3)$ [32], где $\tilde{k}_R \approx 1.6EI/l$ - жесткость вала ротора на кручение на участке между диском и опорой со стороны привода [31].

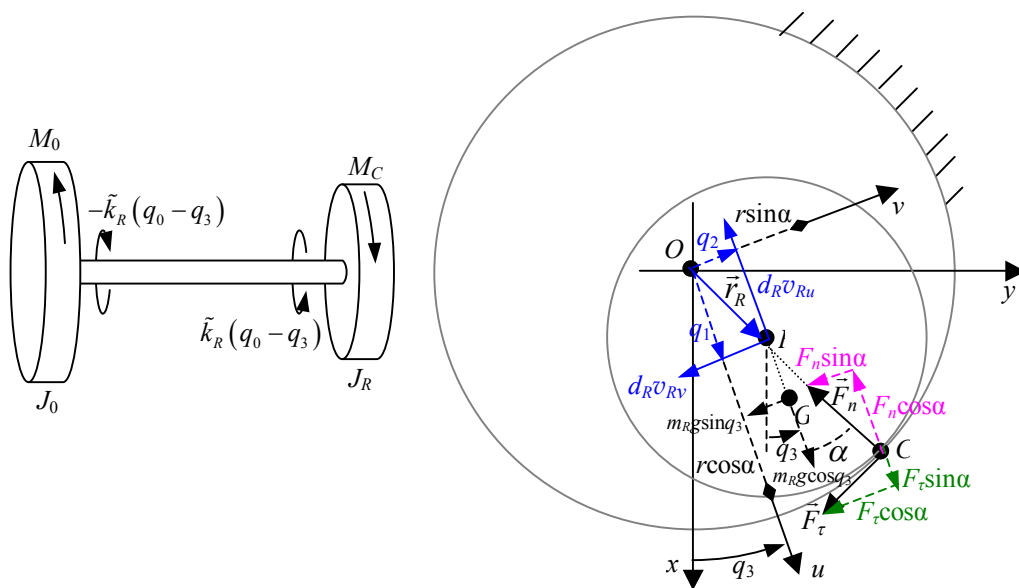


Рис.2. Силы и моменты в исследуемой роторной системе

На практике M_0 зависит от угловой скорости привода \dot{q}_0 . Эта зависимость обычно задается в виде совместной характеристики двигателя (крутящий момент M_1) и ротора (момент сопротивления, связанный с рабочей нагрузкой M_2):

$$M_0 = M_1 - M_2 = M_n (2 - \dot{q}_0 / \omega_n) - M_n (\dot{q}_0 / \omega_n)^2, \quad (8)$$

где M_n, ω_n – номинальные значения крутящего момента и угловой скорости.

Исходя из рис.2, момент контактной силы вокруг начала отсчета O определяется формулой: $-M_C = (F_n \cos \alpha - F_\tau \sin \alpha)(q_2 + r \sin \alpha) - (F_n \sin \alpha + F_\tau \cos \alpha)(q_1 + r \cos \alpha)$, или с учетом (7) как:

$$M_C = F_\tau (r_R + r). \quad (9)$$

Нормальную контактную силу целесообразно задать по Ривину [23], т. е. в линейном виде, так как радиусы контактирующих поверхностей (ротора и статора) близки и формула Герца работает не очень достоверно. При этом в случае непрямого (косого) удара касательную составляющую контактной силы обычно вычисляют по закону Кулона. В настоящей работе используются зависимости в более общей форме:

$$F_n = k_C \Delta + d_C \dot{\Delta}, \quad F_\tau = \mu(t_C) F_n, \quad \mu(t_C) = \begin{cases} \mu_0 \rightarrow t_C \approx 10^{-4} \text{ с} \\ \mu \rightarrow t_C \gg 10^{-4} \text{ с} \end{cases}, \quad (10)$$

где $\Delta = r_R - \delta$ – радиальная деформация, $\dot{\Delta}$ – ее скорость, t_C – длительность контакта ротора и статора по сравнению с обычным промежутком времени, в течение которого длится удар двух твердых тел (10^{-4} с), μ_0 – коэффициент трения покоя, μ – коэффициент трения скольжения.

При этом, если в состоянии статического равновесия имеется начальное поперечное отклонение центра ротора от центра статора (от т.О), то это может быть учтено путем рассмотрения неравномерного (эксцентрического) зазора:

$$\delta = \delta_0 - x_0 \cos(q_3 + \alpha), \quad (11)$$

где x_0 – величина несоосности ротора относительно статора, δ_0 – величина радиального зазора при концентричном положении ротора в статоре.

Коэффициенты упругого k_C и вязкого d_C сопротивлений контактных поверхностей можно выразить при помощи широко употребляемых в классической теории удара коэффициента восстановления e и длительности удара во времени τ [22]:

$$e = \exp\left(\frac{-\pi\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right), \quad \eta = \frac{d_C}{2\sqrt{k_C m_R}}, \quad \frac{2\pi}{T_{\text{imp}}} = \sqrt{\frac{k_C}{m_R}}, \quad T_{\text{imp}} = 2\tau. \quad (12)$$

Изменение коэффициента трения в (10) – необходимое математическое условие для правдоподобного моделирования эффекта проскальзывания ротора при задевании статора. Эвристический смысл такой процедуры в том, что при отдельных ударах ротора о статор «путь трения», а следовательно и «скорость трения» $v_{\text{тр}} = S_{\text{тр}}/t_C$ близки к нулю, напротив, при безотрывном движении (прямом скольжении и обкатке) ротора по статору они велики. Вместе с тем известно, что коэффициент трения скольжения в действительности – в случае реальных материалов – зависит от скорости скольжения одного из них по другому.

В частности, русский ученый Грановский Г.И. [33] получил экспериментальные кривые вида (рис.3), а инженерный справочник DPVA.info [34] дает следующее представление об упомянутых относительных величинах при повышении скорости (табл.1). Немецкий ученый Франке, обработав данные, полученные ранее Пуаре, Боше и Гальтоном, предложил эмпирическую формулу: $\mu = \mu_0 e^{-cv}$, где μ_0 – коэффициент трения покоя, $v_{\text{отн}}$ – относительная скорость, c – константа. Также известен закон Томлинсона, в соответствии с которым коэффициент трения скольжения обратно пропорционален корню кубическому из

модуля относительной скорости: $\mu = \mu_0 / \sqrt[3]{v_{отн}}$. Отсюда, из-за изменения скорости скольжения ротора по статору от почти нулевых до больших значений, вытекает необходимость учета изменения параметра μ в (10).

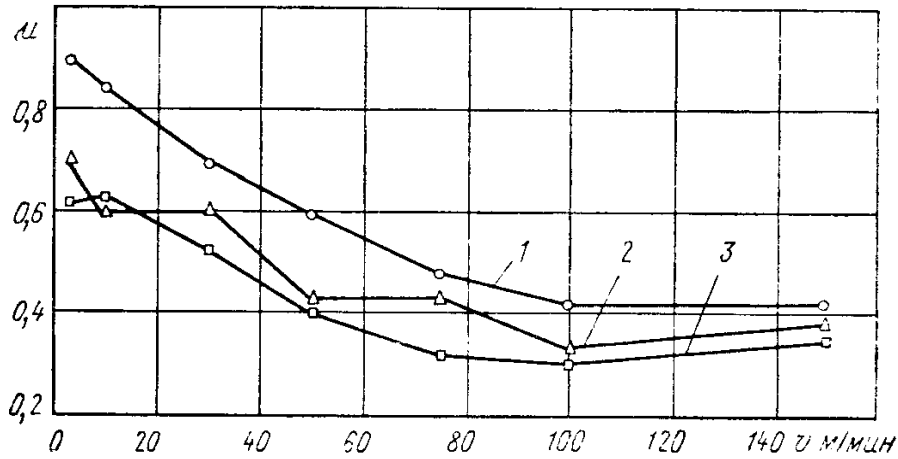


Рис.3. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения при сухом трении сплава Т15К6 по сталям аустенитного класса

Таблица №1. Зависимость коэффициента трения скольжения различных материалов по стали от скорости

Материал	v, м/с					
	50	100	200	300	400	500
Висмут	0,12	0,07	0,04	-	-	-
Сурьма	0,25	0,18	0,14	0,1	0,07	-
Сталь нержавеющая	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04
Медь	0,23	0,17	0,12	0,09	0,08	0,07
Карбид титана	0,22	0,16	0,11	0,08	0,06	0,05
Оксид алюминия	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11	0,1
Сталь10	0,05	0,035	0,03	0,025	0,022	0,02

Для установления неизвестной $\dot{\Delta}$ и направления действия силы F_τ в точке C необходимо знать проекции ее абсолютной скорости v_C соответственно на нормаль v_{Cn} и касательную $v_{C\tau}$, т. е. соответственно относительную радиальную и тангенциальную скорость ротора в точке контакта (рис.1):

$$\dot{\Delta} = \dot{r}_R = v_{Cn} = \dot{q}_1 \cos \alpha + \dot{q}_2 \sin \alpha . \tag{13}$$

Сила F_τ направлена противоположно скорости $v_{C\tau}$ (рис.1). Это условие выполняется, если следующее скалярное произведение отрицательно:

$$\begin{aligned} \vec{F}_\tau \cdot \vec{v}_C &= ((F_\tau \sin \alpha) \vec{u} + (-F_\tau \cos \alpha) \vec{v})(v_{Cu} \vec{u} + v_{Cv} \vec{v}) = \\ &= v_{Cu} F_\tau \sin \alpha - v_{Cv} F_\tau \cos \alpha < 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Если это условие нарушается, то касательная составляющая контактной силы должна быть с обратным знаком:

$$F_{\tau} = -F_{\tau}.$$

Условиями отсутствия контакта между ротором и статором, т. е. условиями равенства нулю силы F_n и, соответственно, F_{τ} и M_C являются:

$$\Delta \leq 0 \text{ или } F_n \leq 0. \quad (15)$$

Здесь необходимо пояснить, когда $F_n \leq 0$, контакт по сути теряется. Это условие отражает тот факт, что силовое взаимодействие ротора и статора оканчивается уже в финальной стадии удара, т. е. уже до момента времени, когда условие $\Delta \leq 0$ выполняется.

Переход от перемещений q_1, q_2 к перемещениям центра ротора R вдоль осей неподвижной системы координат можно выполнить по формулам:

$$x_R = q_1 \cos q_3 - q_2 \sin q_3,$$

$$y_R = q_1 \sin q_3 + q_2 \cos q_3.$$

Координаты центра ротора x_R, y_R связаны с координатами центра масс ротора x_G, y_G соотношениями:

$$x_G = x_R + a \cos q_3, \quad y_G = y_R + a \sin q_3.$$

Полученная совокупность уравнений (5) совместно с выражениями (6-13) и условиями (14-15) является обобщенной математической моделью и описывает контактную динамику системы «ротор - статор» с учетом проскальзывания и несоосности ротора в статоре.

Решение этих уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка привело к следующим численным результатам.

3. Численный анализ движения ротора без проскальзывания при контакте и несоосности со статором

Одной из причин, из-за которой нормально функционирующий ротор может коснуться статорной поверхности, является его внезапная разбалансировка. При этом возможно возникновение опасного обратного скольжения или качения (обкатки) ротора по статору.

Аналитический обзор научно-технической литературы показывает, что установлением таких движений управляют три безразмерные величины: коэффициент трения скольжения μ , отношение номинальной частоты вращения к критической f_n/f_0 и отношение эксцентриситета ротора к радиальному зазору a/δ . Кроме того, как выяснилось в ходе пробных вычислительных экспериментов, к ним можно добавить и коэффициент восстановления e . Поэтому для численного анализа процессов, протекающих во времени в системе «ротор-статор» после разбалансировки, эти безразмерные величины ниже варьируются в возможных на практике пределах. Значения всех остальных необходимых параметров исследуемой системы полагаются фиксированными (табл.2).

Таблица №2. Фиксированные и варьируемые параметры исследуемой системы «ротор-статор»

Наименование	Обозначение	Величина
Масса ротора	m_R	10 кг
Номинальная частота вращения	f_n	100 Гц
Критическая частота вращения	$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_R}{m_R}}$	25...125 Гц
Номинальный крутящий момент	M_n	100 Нм
Радиус ротора в контактном сечении статора $P_{отр}$	r	50 мм

Осевой момент инерции ротора	$J_R = m_R r^2 / 2$	0.0125 кг·м ²
Радиальный зазор	δ	2.5 мм
Эксцентриситет ротора	a	0.83...7.5 мм
Приведенный коэффициент вязкого трения	d_R	10 Нс/м
Коэффициент восстановления	e	0.6...0.9
Длительность контакта	τ_C	10 ⁻⁴ с
Коэффициент трения скольжения	μ	0.05...0.5

Во всех параметрических исследованиях была обыграна (смоделирована) одна и та же ситуация: сбалансированный ротор, нагруженный моментной характеристикой (2), стремительно за 0.15 секунды разгоняется до номинальной частоты 100 Гц, а затем при $t=0.15$ с подвергается разбалансировке до величины неуравновешенности a .

На рис.4 и 5 показано изменение частоты вращения, нормальной контактной силы и траектории движения ротора во времени при различных значениях коэффициента μ , когда $f_n/f_0=0.8$, $a/\delta=1$, $e=0.9$. Кроме того, на рис.6 представлен частотный спектр каждого роторного движения при этих параметрах.

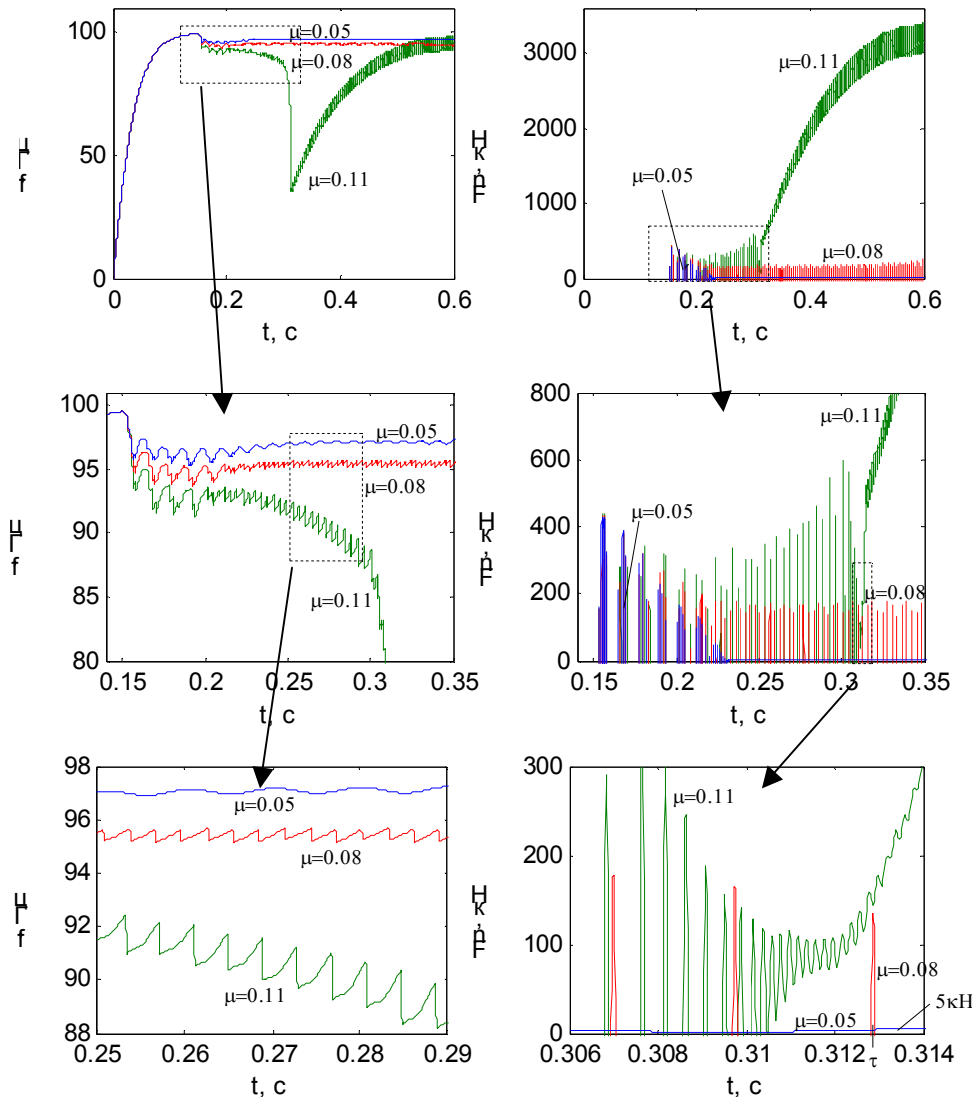
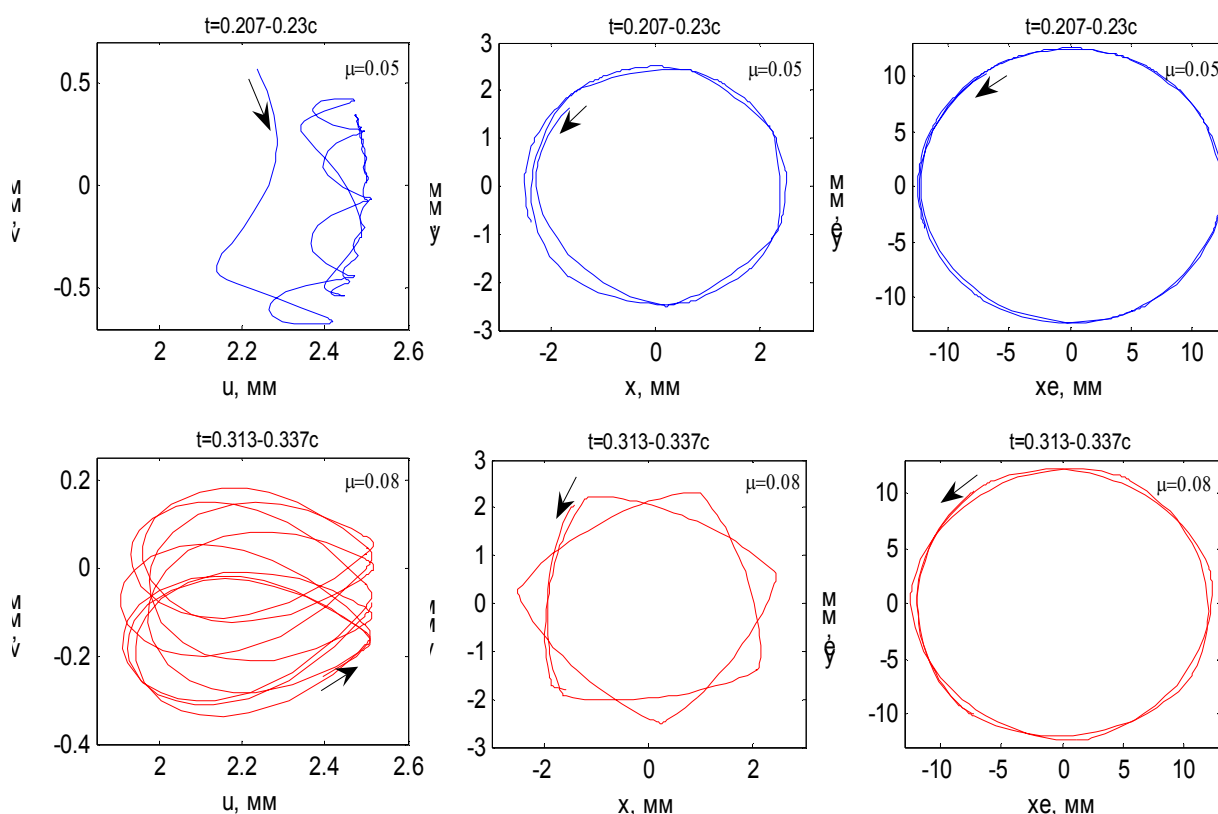


Рис.4. Изменение частоты вращения f и нормальной контактной силы F_n между ротором и статором во времени t в зависимости от коэффициента трения скольжения μ

Как видно из рисунков после разбалансировки ротора, при $\mu=0.05$ возникает серия отдельных соударений в промежутке времени 0.15-0.23 с. Затем устанавливается безотрывное движение ротора по статору с пониженной из-за контактного трения до 97 Гц частотой вращения и малой контактной нагрузкой $F_n \approx 5 \text{ кН}$, которые незначительно изменяются по гармоническому закону. Установлено, что синусоидальная пульсация этих параметров обусловлена воздействием силы веса и в случае вертикального ротора отсутствует. Анализируя траекторию центра ротора во вращающейся системе координат на интервале $t=0.207-0.23 \text{ с}$, видно, что после серии соударений радиальные (поперечные) колебания ротора постепенно затухают и его центр начинает двигаться по дуге радиуса δ , стремясь к новому после разбалансировки, фиксированному положению равновесия, возникающему при контакте, с координатами $u=2.5 \text{ мм}$, $v=0$. Если рассматривать это же движение в неподвижной системе координат, то центр ротора постепенно начинает просто перемещаться по окружности радиуса δ с определенной угловой скоростью Ω без каких либо радиальных колебаний $x=\delta \cos \Omega t$, $y=\delta \sin \Omega t$. В одном направлении с центром ротора начинает двигаться по круговой орбите и любая эксцентрическая точка ротора, в частности G , C , а также смещенная на 10 мм с координатами $x_e=x+0.01 \cos q_3$, $y_e=y+0.01 \sin q_3$. Это понятно, поскольку анализ спектра во временной области $t>0.23 \text{ с}$ показывает, что частота прецессии $\Omega=\omega=2\pi f$, а $q_3=\omega t$. Таким образом, при $\mu=0.05$ возникает прямое синхронное скольжение ротора по статору.



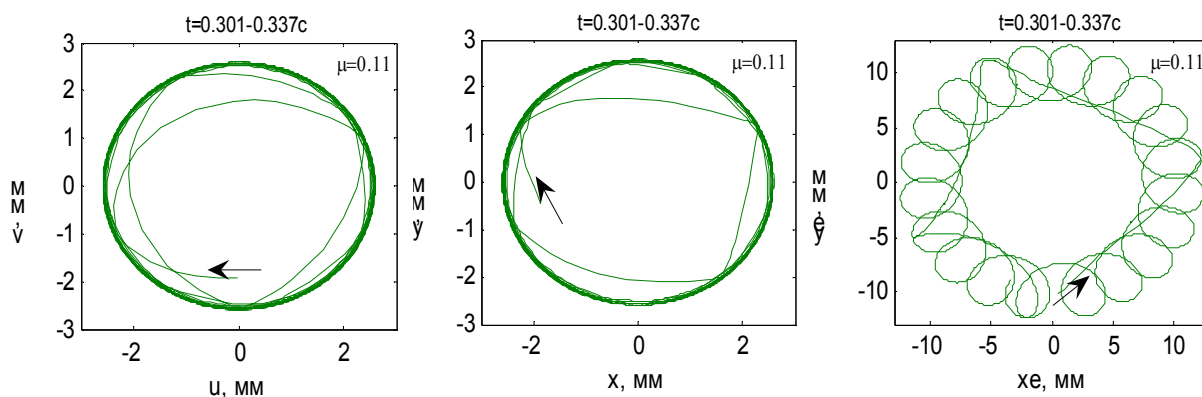


Рис.5. Траектория центра ротора во вращающейся (слева) и неподвижной системах координат, а также эксцентрической, смещенной на 10 мм оси ротора в неподвижной системе координат (справа) в зависимости от t и μ

При $\mu=0.08$ возникает непрекращающееся во времени виброударное движение ротора по статору с систематическими ударами между ними. При этом скорость вращения уменьшается до 95 Гц, а нормальная контактная сила многократно увеличивается до $F_n \approx 180$ кН. Почти вертикальные участки осциллограммы $f(t)$ соответствуют падению скорости вращения при каждом ударе, а наклонные вправо – ее восстановлению за счет крутящего момента. Траектория центра ротора в координатах u, v воспроизводит форму капли, острый кончик которой соответствует моменту столкновения ротора со статором. Кроме того, так как относительное движение ротора во вращающейся системе координат представляет собой криволинейное поступательное движение, то все точки ротора имеют одинаковые скорости, ускорения и подобные траектории. Орбитальное движение центральной роторной точки в координатах x, y на временном отрезке $t=0.313-0.337c$ показывает, что за один полный оборот центра ротора случается три соударения. Эксцентрическая точка ротора с координатами x_e, y_e движется синхронно с центром ротора, но ее 3-х ударное движение получается «сглаженным», из-за того что амплитуда ударных радиальных колебаний ротора $r_R = \sqrt{x^2 + y^2} \ll 10$ мм. Спектральный анализ движения этой точки при $t > 0.337c$ показывает, что периодические удары ротора о статор возбуждают вторую гармонику частоты вращения $2f$. Здесь видна явная корреляция с ранее полученным результатом – с 4-х ударным режимом движения ротора в плавающем уплотнительном кольце, в частотном спектре которого присутствует гармоника $3f$ [30]. Можно сделать вывод, что если в спектре ударных колебаний ротора имеется гармоника с порядком nf , то число ударов за один оборот ротора равно $n+1$.

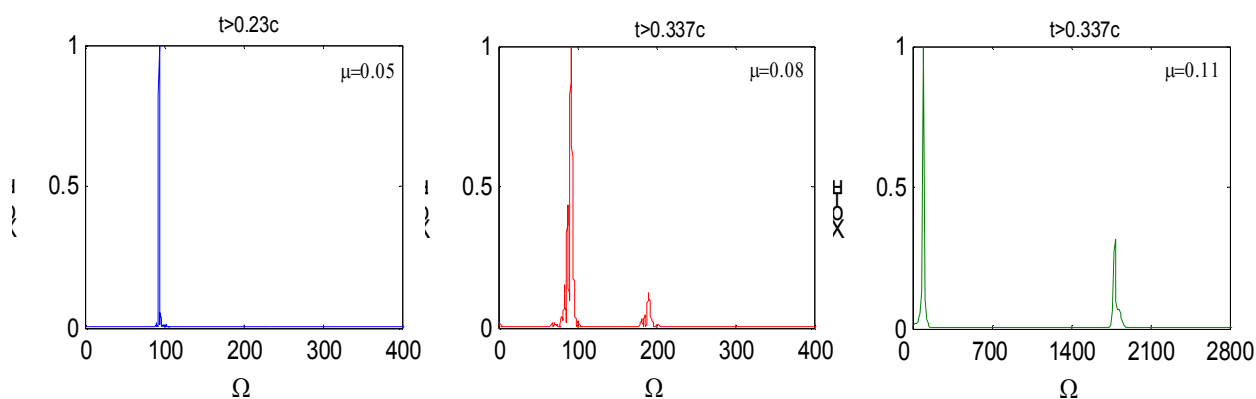


Рис.6. Частотный спектр движения эксцентрической оси ротора при заданных t и μ

При $\mu=0.11$ после серии отдельных соударений в промежутке времени 0.15-0.32 с возникает непрерывно-контактное движение ротора по статору при очень глубоком падении скорости вращения со 100 до 35 Гц, причем за очень короткий период времени с 0.3 по 0.315 с. Вариация нормальной контактной силы в данном коротком временном интервале показывает, что период следования ударов здесь быстро уменьшается перед «слиянием» их в непрерывный контакт. Далее скорость вращения нарастает приблизительно с ускорением первоначального разгона за счет крутящего момента. В то же время сила F_n достигает громадной величины ≈ 3200 кН, что в несколько раз превышает нормальную контактную силу при отдельных соударениях. Траектории центра ротора в системах координат $Ouvz$ и $Oxuz$ на интервале времени $t=0.301-0.337$ с иллюстрируют явную особенность – ротор начинает прецессировать по кругу радиуса δ в обратном направлении. При этом введенная в рассмотрение эксцентрическая точка после четырех столкновений ротора со статором, что видно по резкому изменению курса движения, тоже начинает двигаться в противоположную сторону, описывая характерные гипотрохоиды с числом петель $n=20$. Из частотного спектра следует, что сложное движение эксцентрической точки ротора представляет собой бигармоническую прецессию с частотой обкатки $f_{обк} \approx 1800$ Гц и частотой вращения $f \approx 90$ Гц. Таким образом, при $\mu=0.11$, $f_n/f_0=0.8$, $a/\delta=1$, $e=0.9$ и параметрах табл.2 возникает классическая обкатка ротора по статору.

Из полученных результатов очевидно, что существует определенное значение коэффициента μ , меньше которого в системе «ротор-статор» реализуется сравнительно безопасное прямое скольжение ротора, а в случае его превышения в системе возможны недопустимые виброударное движение и обкатка ротора. Поэтому соответствующий предел разумно обозначить как критический коэффициент трения скольжения $\mu_{кр}$. Так для системы «ротор-статор» с рассмотренными параметрами $\mu_{кр}=0.07$.

В табл.3 представлены значения $\mu_{кр}$, рассчитанные при $e=0.6$ и параметрах табл.2, в зависимости от двух других безразмерных величин f_n/f_0 и a/δ , которые наиболее существенно влияют на установление того или иного контактного режима движения ротора по статору.

Таблица №3. Критические значения коэффициента трения скольжения $\mu_{кр}$

	$f_n/f_0=0.8$	$f_n/f_0=1.25$	$f_n/f_0=2$	$f_n/f_0=4$
$a/\delta=1/3$	0.4	0.37	0.29	0.26
$a/\delta=1/2$	0.34	0.35	0.28	0.28
$a/\delta=1$	0.25	0.26	0.29	0.3
$a/\delta=2$	0.24	0.31	0.35	0.39
$a/\delta=3$	0.29	0.39	0.41	0.42

Аналогичный расчет для вертикального ротора, т. е. без членов с множителем tg в выражениях (1), приводит к почти тем же самым результатам, как в табл.2. Наибольшее расхождение в значениях достигает лишь 6%.

Полученные расчетные данные позволяют сделать ряд выводов:

- при малой неуравновешенности ротора ($a/\delta < 1/2$) с нарастанием скорости вращения величина $\mu_{кр}$ уменьшается;
- при средней неуравновешенности ротора ($1/2 < a/\delta < 1$) величина $\mu_{кр}$ слабо зависит от скорости вращения;
- при большой неуравновешенности ротора ($a/\delta > 1$) величина $\mu_{кр}$ уменьшается с убыванием скорости вращения;
- чем больше коэффициент восстановления относительной скорости при ударе e для материалов ротора и статора, тем меньше величина $\mu_{кр}$, причем e очень существенно изменяет $\mu_{кр}$;

- критические коэффициенты трения скольжения для горизонтального и вертикального ротора равны между собой ($\mu_{кр}^{г/р} = \mu_{кр}^{в/р}$).

4. Численный анализ движения ротора с проскальзыванием при контакте и несоосности со статором

Наиболее показательные результаты частных расчетов с принятыми параметрами исследуемой роторной системы (табл.2), когда возникает обкатка с проскальзыванием ротора по статору при их соосности и условиях, что:

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 = 0.11 & \text{если } t_c \approx 10^{-4} \text{ с} \\ \mu = 0.05 & \text{если } t_c \gg 10^{-4} \text{ с} \end{cases}, \quad \frac{x_0}{\delta_0} = 0,$$

а также когда, напротив, имеется несоосность и отсутствует проскальзывание ротора в статоре при условиях, что:

$$\frac{x_0}{\delta_0} = 0.25, \quad \mu = \text{const} = 0.05,$$

представлены соответственно на рис.7 и 8.

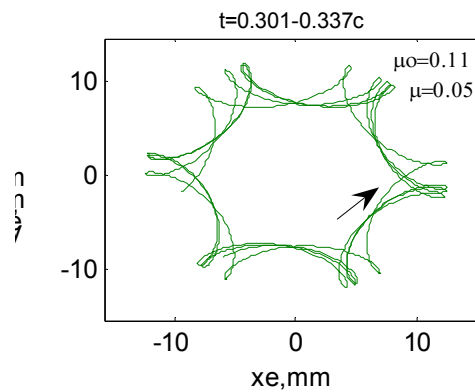


Рис.7. Траектория эксцентрической, смещенной на 10 мм оси ротора в неподвижной системе координат в случае $\mu = \mu(t_c)$ и $x_0 = 0$

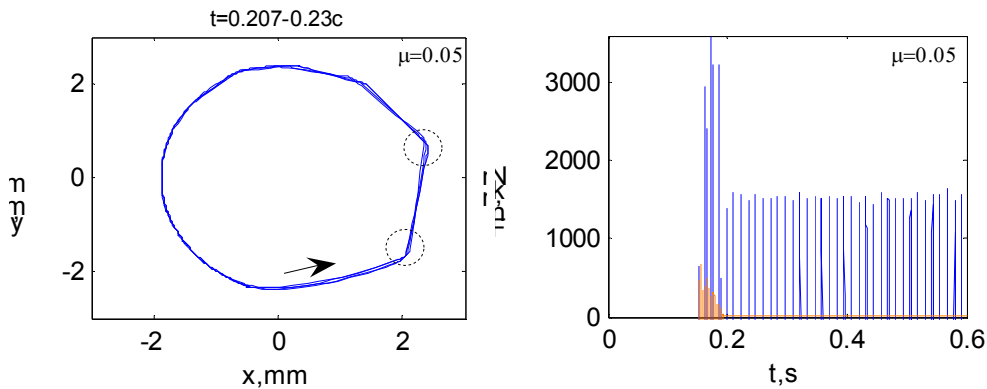


Рис.8. Траектория центра ротора в неподвижной системе координат в случае $\mu = \text{const}$ и $x_0 = 0.25\delta_0$, а также сравнение изменения нормальной контактной силы F_n между ротором и статором во времени t со случаем $x_0 = 0$ (оранж.)

Как видно из сопоставления рис.7 с 5, эффект проскальзывания приводит к уменьшению числа петель с 20 до 6. В свою очередь рис.8 показывает, что круговая траектория ротора искажается – появляется прямолинейный участок, начало и конец которого отмечены пунктирными кружками. Эти точки свидетельствуют о существовании прерывистого прямого скольжения ротора по статору с двумя сильными ударами между

ними в процессе каждого оборота ротора. Количественно о силе ударов позволяет судить график $F_n = F_n(t)$. Таким образом можно заключить, что несоосность ротора со статором приводит к расширению области существования виброударных режимов в исследуемой системе.

Литература

1. Y.S. Choi, Dynamics of rotor rub in annular clearance with experimental evaluation, *KSME Journal*, Vol. 8, No. 4, pp. 404-413, 1994.
2. Денисов Г.Г., Неймарк Ю.И., Сандалов В.М., Цветков Ю.В. Об обкате ротора по жесткому подшипнику // *Механика твердого тела*, № 6, 1973.
3. Олимпиев В.И. Об обкатке неуравновешенного гибкого ротора по статору // *Машиноведение*, № 1, 1976.
4. Y.S. Choi, Investigation on the whirling motion of full annular rotor rub, *Journal of Sound and Vibration* 258 (2002) 191-198.
5. Банах Л.Я. Некоторые явления, возникающие при движении вала в подшипнике с зазором // *Машиноведение*, № 1, 1965. С. 70-77.
6. Тимошенко С.П. Теория колебаний в инженерном деле // Физматгиз, Москва, 1959
7. H.F. Black, Interaction of a whirling rotor with a vibrating stator across a clearance annulus, *Journal of Mechanical Engineering Science* Vol.10, No.1 (1968) pp. 1-12.
8. F.F. Ehrich, J.J. O'Connor, Stator whirl with rotors in bearing clearance, *Journal of Engineering for Industry* 89 B (3) (1967) 381-390.
9. Шитиков Б.В. Динамическая балансировка роторов. Трансжелдориздат, 1951.
10. F.F. Ehrich, Subharmonic vibration of rotors in bearing clearance, *ASME*, paper No. 66-MD-1 (1966).
11. F.F. Ehrich, Some observations of chaotic vibration phenomena in high-speed rotordynamics, *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 113 (1991) 50-57.
12. A. Muszynska, Partial lateral rotor to stator rubs, *Proceedings of the 3rd international conference on vibrations in rotating machinery, Institute of Mechanical Engineering, York, UK, 1984*, pp. 327-335.
13. A. Muszynska, Chaotic vibrations of rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs, *Nonlinear Vibrations, ASME, DE-Vol.54* (1993) 187-194.
14. P. Goldman and A. Muszynska, Chaotic behavior of rotor/stator systems with rubs, *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 116 (1994) 692-701.
15. A. Muszynska, P. Goldman, Chaotic responses of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs, *Chaos, Solitons & Fractals* 5 (1995) 1683-1704.
16. F.K. Choy, J. Padovan, J.C. Yu, Full rubs, bouncing and quasi chaotic orbits in rotating equipment, *Journal of the Franklin Institute* 327 (1990) 25-47.
17. F. Chu, Z. Zhang, Bifurcation and chaos in rub-impact Jeffcott rotor system, *Journal of Sound and Vibration* 210 (1998) 1-18.
18. J. Jiang and H. Ulbrich, Stability analysis of sliding whirl in nonlinear Jeffcott rotor with cross-coupling stiffness coefficients, *Nonlinear Dynamics* 24 (2001) 269-283.

19. J.J. Yu, P. Goldman, D.E. Bently and A. Muszynska, Rotor/seal experimental and analytical study on full annular rub, *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 124 (2002) 340–350.
20. A. Muszynska, Rotor-to-stationary part rubbing contact in rotating machinery, *Rotordynamics*, CRC Press, 2005, pp. 555-710 (Chapter 5).
21. S. Faik, H. Wittman, Modeling of impact dynamics: a literature survey, *International ADAMS User Conference*, 2000, pp. 1-11.
22. R.M. Brach, *Mechanical Impact Dynamics: Rigid Body Collisions*, Wiley, New York, 1991.
23. E. Rivin, *Stiffness and Damping in Mechanical Design*, Marcel Dekker, New York, 1999.
24. R. Beatty, Differentiating rotor response due to radial rubbing, *Transactions of the ASME, J. Vib. Acous. Stress Reliab. Des.* 107 (1985) 151–160.
25. C. Fulei, Z. Zhengsong, Periodic, quasi-periodic and chaotic vibrations of a rub-impact rotor system supported on oil film bearings, *International Journal of Engineering Science*, Vol.35, No.10-11 (1997) 963-973.
26. X. Shen, J. Jia, M. Zhao, Numerical analysis of a rub-impact rotor-bearing system with mass unbalance, *Journal of Vibration and Control*, Vol.13, No.12 (2007) 1819-1834.
27. S.H. He, P.H. Zhang, X.Y. Wu, Dynamic behaviors of a rotor-bearing system under base-transferred shock excitations considering journal-bearing clearance, *Applied Mechanics and Materials*, Vols.29-32 (2010) 703-708.
28. O. Grāpis, V. Tamužs, N.-G. Ohlson, J. Andersons, Overcritical high-speed rotor systems, full annular rub and accident, *Journal of Sound and Vibration* 290 (2006) 910-927.
29. А.Н. Никифоров, Моделирование виброударных режимов работы механической пары «ротор – уплотнительное кольцо» // Вестник научно-технического развития, №11 (39), 2010. С.26-37.
30. Banakh L., Nikiforov A., Panovko G. Vibroimpact Motion of Rotor taking into account Friction at the Contact. Proceedings of 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference «ENOC 2008», Saint-Petersburg (Russia). URL: <http://lib.physcon.ru/?item=1605> (дата обращения: 18.01.2010).
31. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.:АН СССР, 1959, 247 с.
32. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машгиз, 1957. 336 с.
33. Макаров А. Д. Износ и стойкость режущих инструментов. М., «Машиностроение», 1966, 264 с.
34. <http://www.dpva.info/Guide/GuidePhysics/Frication/SlidingFriction5/>

Поступила: 13.04.12.