

УДК 534.1

ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ, ПРОДОЛЬНО-ИЗГИБНЫЕ И ПРОДОЛЬНО-КРУТИЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЯХ

© Владимир Иванович Ерофеев

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН, Нижний Новгород, Россия
erf04@sinn.ru

Аннотация. В настоящей работе изучаются интенсивные связанные изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные упругие волны, распространяющиеся в прямолинейных стержнях

Непрерывное увеличение быстродействия и удельной мощности машин и механизмов, забота о снижении веса конструкции при сохранении ее надежности в работе, а также широкое внедрение в современную технику новых композиционных материалов требуют более полного исследования реального напряженно-деформированного состояния. Для этого часто оказывается недостаточно классических линейных теорий и необходимо рассматривать теории более высоких приближений, учитывающих, в частности, геометрическую и физическую нелинейности.

Нелинейные искажения, возникающие при распространении интенсивных изгибных волн, могут накапливаться с течением времени и при определенных условиях приведут к сильному укручению волновых фронтов и существенному изменению всего волнового процесса. Это, в свою очередь, может вызвать появление больших напряжений, необратимых деформаций в материале и привести к локальной потере устойчивости. Интерес к изучению нелинейных волновых процессов связан с возможностью возникновения даже в простых элементах упругих конструкций специфических нелинейных режимов. С одной стороны, эффекты формирования нелинейных волн с большими градиентами напряжений и деформаций оказываются нежелательными, поскольку могут приводить к разрушению или пластическому течению материала, но, с другой стороны, - они могут быть полезными и найти применение в технологиях обработки материалов, в дефектоскопии и технической диагностике.

1. Изгибно-крутильные волны

Уравнения динамики. Рассмотрим прямолинейный стержень, отнесенный к декартовой системе координат (x, y, z) , имеющий круговое или кольцевое поперечное сечение. При таких формах сечения можно не учитывать депланацию даже при конечных углах закручивания [1].

Система уравнений, описывающих взаимодействие изгибных и крутильных колебаний стержня с учетом геометрической нелинейности, имеет вид [2]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 2c_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\theta^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} r_y^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2c_m^2 I_y}{I_\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta}{\rho I_\rho} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 + c_m^2 \theta^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \\ &- \frac{2c_m^2}{r_\rho^2} \theta^3 - \frac{2c_m^2}{r_\rho^2} \theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - c_m^2 \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2. \end{aligned} \right. \quad (1.1)$$

Здесь $w(x,t)$ – поперечное перемещение частиц срединной линии стержня; $\theta(x,t)$ – угол поворота его поперечного сечения; $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны в материале; $c_s = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны (стержневая скорость); $c_m = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$; E – модуль Юнга; λ, μ – константы Ламе; ρ – плотность материала; r_y и r_ρ – осевой и полярный радиусы инерции, соответственно, определяемые соотношениями: $r_{y,\rho} = \sqrt{I_{y,\rho}/F}$; где $I_y = \iint_F z^2 dF$ – осевой момент инерции; $I_\rho = \iint_F (y^2 + z^2) dF$ – полярный момент инерции; F – площадь поперечного сечения стержня; $\beta = (\frac{\lambda}{2} + \mu) \iint_F (y^2 + z^2) dF$.

Здесь и далее предполагаем, что стержень является бесконечным. Такая идеализация допустима, если на границах стержня находятся оптимальные демпфирующие устройства, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. В [3, 4] на основе точных решений модельных задач для упругих систем обосновано существование согласованных концевых гасителей различных видов колебаний, не дающих отраженных возмущений в системе. Это позволяет рассматривать модель стержня (1.1) без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по стержню, рассматривать как бегущие упругие волны.

Нелинейная изгибная волна в закрученном стержне. Будем полагать, что угол поворота сечения стержня состоит из постоянной составляющей и малых динамических пульсаций:

$$\theta(x,t) = \theta_0 + \tilde{\theta}(x,t), \quad (1.2)$$

где $\theta_0 \gg \tilde{\theta}$.

Это позволяет линеаризовать второе уравнение системы (1.1) относительно $\tilde{\theta}$ и рассматривать его отдельно от первого уравнения. Первое же уравнение системы, остается нелинейным, оно будет описывать распространение интенсивной изгибной волны в закрученном стержне:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 2c_m^2 \theta_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2c_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3. \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.3) ищем в классе стационарных волн $W = \frac{dw}{d\xi}$, где $\xi = x - Vt$ –

"бегущая" координата, $V = const$ – скорость волны.

Уравнение (1.3) сведется к уравнению Дуффинга

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + m_1 W + m_2 W^3 = 0. \quad (1.4)$$

$$\text{Здесь } m_1 = \frac{2c_m^2}{c_s^2 r_y^2} \left(\frac{V^2}{2c_m^2} - \theta_0^2 \right), m_2 = -\frac{2c_m^2}{c_s^2 r_y^2}.$$

О возможности существования нелинейных стационарных изгибных волн можно судить по знакам коэффициентов m_1 и m_2 , при этом второй коэффициент всегда отрицателен, а знак первого коэффициента определяется величиной угла закручивания θ_0 .

При малых углах закручивания ($\theta_0 < \frac{V}{2c_m}$) $m_1 > 0$. На фазовой плоскости $(W, \frac{dW}{d\xi})$ уравнения (1.4) точка $(0,0)$ является устойчивым положением равновесия типа "центр", а точка $(\pm \sqrt{-\frac{m_1}{m_2}}, 0)$ – неустойчивыми положениями равновесия типа "седло". Фазовый портрет приведен на рис.1.1, он показывает, что в стержне могут существовать как периодические стационарные волны (им соответствуют движения по фазовой траекториям вокруг положения равновесия), так и уединенная стационарная волна (движение по сепаратрисе, идущей из "седла" в "седло").

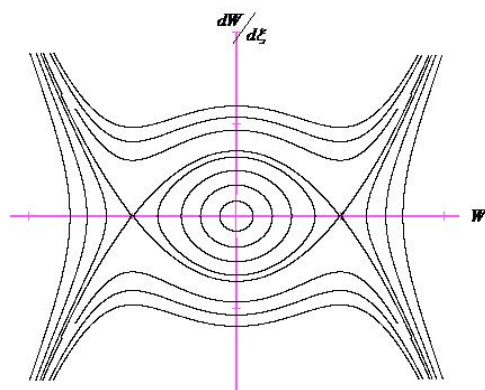


Рис.1.1. Фазовый портрет уравнения Дуффинга

Периодическая волна описывается эллиптическим синусом, форма которого близка к меандру:

$$W = A \operatorname{sn}(K\xi, s), \tag{1.5}$$

$$\text{Здесь } A \text{ – амплитуда волны; } K = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2 A^2}{2}} \text{ – волновое число; } s^2 = -\frac{m_2 A^2}{2m_1 + m_2 A^2} \text{ –}$$

модуль эллиптической функции, изменяющийся в интервале $0 \leq s^2 \leq 1$.

Через параметры исходной задачи амплитуда (A) и волновое число (K) связаны соотношением:

$$A = \sqrt{\left(\frac{V^2}{2c_m^2} - \theta_0^2 \right) \left(\frac{2s^2}{1+s^2} \right)}, \tag{1.6}$$

$$K = \sqrt{\frac{2c_m^2 \left(\frac{V^2}{2c_m^2} - \theta_0^2 \right)}{c_0^2 r_y^2} \left(\frac{1}{1+s^2} \right)}, \tag{1.7}$$

Примечательно, что отношение амплитуды стационарной волны к волновому числу является величиной постоянной

$$\frac{A}{K} = r_y \sqrt{\frac{E}{(\lambda + \mu)}} \cdot s = const, \quad (1.8)$$

определяемой модулями упругости и радиусом инерции поперечного сечения стержня.

Уединенная стационарная волна имеет форму перепада (кинка) и описывается гиперболическим тангенсом

$$W(\xi) = A_c th(\xi / \Delta), \quad (1.9)$$

где

$$A_c = \sqrt{\frac{V^2}{2c_m^2} - \theta_0^2}, \quad (1.10)$$

– амплитуда волны,

$$\Delta = \sqrt{\frac{c_s^2 r_y^2}{c_m^2 \left(\frac{V^2}{2c_m^2} - \theta_0^2 \right)}} \quad (1.11)$$

– ее ширина.

Заметим, что произведение амплитуды уединенной волны на ее ширину является постоянной величиной

$$A_c \Delta = r_y \sqrt{\frac{E}{(\lambda + \mu)}} = const, \quad (1.12)$$

При $s = 1$ выражения (1.8) и (1.12) тождественны, что очевидно, поскольку при этом значении эллиптический синус вырождается в гиперболической тангенс [5].

С увеличением угла закручивания θ_0 амплитуды стационарных волн (1.6) и (1.10) уменьшаются, ширина волны (1.11) растет, а значение волнового числа (1.7) уменьшается.

При больших углах закручивания $\theta_0 > \frac{V}{2c_m}$ (коэффициент $m_l < 1$) в фазовом портрете уравнения Дуффинга отсутствуют замкнутые фазовые траектории. Нелинейных стационарных волн в этом случае не существует.

Нелинейная крутильная волна в погнутом стержне. Считаем, что стержень имеет статическую погибь W_0 , тогда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = W_0 + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}, \quad (1.13)$$

где $W_0 \gg \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}$ и система (1.1) сводится к одному нелинейному уравнению, описывающему распространение интенсивной крутильной волны

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \left(c_\tau^2 + 2c_m^2 \frac{I_y}{I_\rho} W_0^2 \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{2c_m^2}{r_\rho^2} W_0^2 \theta = \\ & = \frac{3\beta}{\rho I_\rho} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + c_m^2 \theta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + c_m^2 \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2c_m^2}{r_\rho^2} \theta^3 \end{aligned} \quad (1.14)$$

В этом уравнении можно пренебречь нелинейностями при старших производных, т.е. в правой части занулить два первых слагаемых, их вклад по сравнению с двумя другими нелинейными слагаемыми является малым в достаточно широком частотном диапазоне.

Введем далее в (1.14) безразмерную величину $z = x/r_\rho$ и безразмерное время $\tau = c_\tau t/r_\rho$, что при $\frac{c_m^2}{c_\tau^2} \approx 3$ позволит преобразовать это уравнение к виду:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + 6W_0^2 \theta + 6\theta^3 + 6\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 = 0 \quad (1.15)$$

От известного в теории волн нелинейного уравнения Клейна – Гордона [6] уравнение (1.15) отличается наличием последнего слагаемого. Отыскивая решение в классе стационарных волн $\theta = \theta(\eta)$, где $\eta = z - V\tau$, приходим к уравнению в обыкновенных производных

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + mW_0^2 \theta + m\theta^3 + m\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 = 0 \quad (1.16)$$

наличием последнего слагаемого отличающегося от уравнения Дуффинга.

Здесь $m = \frac{6}{(V^2 - 1)}$. Знак этого параметра определяется величиной скорости V .

Стационарные волны могут существовать лишь при $V > 1$ (в размерных переменных единице соответствует C_τ), т.е. при условии, что нелинейная волна движется по стержню быстрее, чем линейная. Эти волны могут быть только периодическими. Фазовый портрет уравнения (1.16) приведен на рис. 1.2.

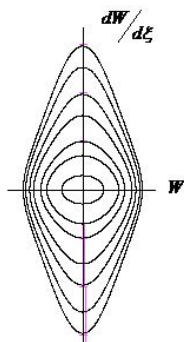


Рис. 1.2. Фазовый портрет нелинейного осциллятора.

На рис.1.3 показаны зависимости волнового числа нелинейной стационарной волны K от ее амплитуды при различных значениях погнби W_0 . Волновое число увеличивается с ростом амплитуды волны. На графике эти зависимости лежат тем выше, чем больше погнбь стержня.

При $A \leq 0,5$ и $mW_0^2 \leq 0,1$ справедлива приближенная формула

$$K = \sqrt{\frac{2mW_0^2 + A^2}{2 - A^2}} \quad (1.17)$$

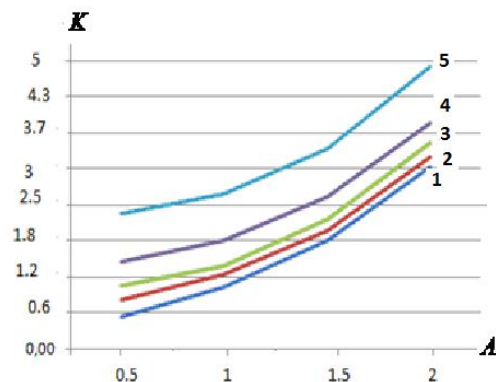


Рис. 1.3. Зависимость волнового числа нелинейной стационарной волны от ее амплитуды при различных значениях погиби : 1 – $mW_0^2 = 0,1$; 2 – $mW_0^2 = 0,5$; 3 – $mW_0^2 = 1$; 4 – $mW_0^2 = 2$; 5 – $mW_0^2 = 5$.

На рис.1.4 показана зависимость волнового числа от начальной погиби, полученная при численном моделировании уравнения (1.16) и полученная по формуле (1.17) при $A = 0,5$. Эти зависимости хорошо совпадают при $0,1 \leq mW_0^2 < 10$.

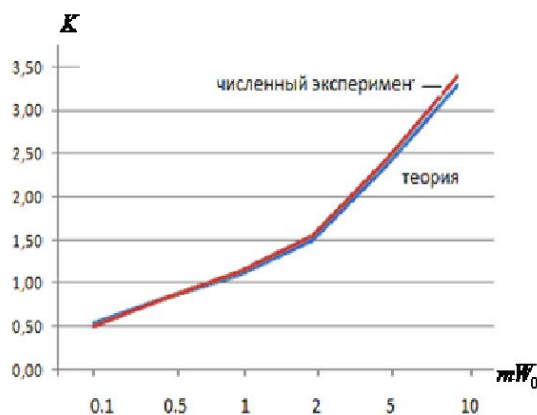


Рис. 1.4. Зависимость волнового числа от начальной погиби.

При $mW_0^2 < 1$ существует частное аналитическое решение уравнения (1.16):

$$\theta(\eta) = \sqrt{1 - mW_0^2} \sin \eta \quad (1.18)$$

2. Продольно-изгибные волны

Система уравнений, описывающих взаимодействие изгибных и продольных колебаний стержня с учетом геометрической нелинейности, имеет вид [7]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c_o^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_o^2 r_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = c_o^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{c_o^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right] \quad (2.2)$$

Здесь $u(x, t)$ – продольные, а $w(x, t)$ – поперечное перемещение частиц срединной линии стержня; $c_o = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения линейных продольных возмущений (стежневая скорость); E – модуль Юнга; ρ – плотность материала; $r_y = \sqrt{J_y/F}$ – осевой радиус инерции; $J_y = \iint_F z^2 dF$ – осевой момент инерции; F – площадь поперечного сечения стержня.

Из (2.1) и (2.2) видно, что продольные и изгибные волны в стержне взаимодействуют лишь в нелинейном приближении. При этом нелинейные слагаемые входят в уравнения (2.1) и (2.2) несимметрично: продольные волны воздействуют на изгибные волны параметрическим образом, а изгибные волны служат нелинейным источником для продольных волн.

Взаимодействие квазигармонических продольных и изгибных волн исследовано в [7].

Рассмотрим случай распространения по стержню интенсивных вибраций, когда уже нельзя ограничиться изучением квазигармонических процессов, а необходимо учитывать широкополостность нелинейных продольно-изгибных волн.

Решение уравнений (2.1), (2.2) будем искать в классе стационарных волн

$$u = u(\xi), w = w(\xi), \tag{2.3}$$

где $\xi = x - Vt$ – «бегущая» координата, $V = const$ – скорость волны.

Из уравнения (2.1) при подстановке (2.3) определится связь между продольным и поперечным перемещениями:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{c_o^2}{2(V^2 - c_o^2)} \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.2) при подстановке (2.3) и с учетом соотношения (2.4) сведется к уравнению Дуффинга:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + m_1\theta + m_2\theta^3 = 0 \tag{2.5}$$

Здесь $\theta = dw/d\xi$ – угол поворота поперечного сечения стержня; $m_1 = \frac{v^2}{c_o^2 r_y^2}$,
 $m_2 = -\frac{1}{2r_y^2 \left(1 - \frac{c_o^2}{V^2} \right)}$.

О возможности существования нелинейных стационарных продольно-изгибных волн можно судить по знакам коэффициентов m_1 и m_2 , при этом первый коэффициент всегда положителен, а знак второго коэффициента определяется величиной отношения c_0/V .

Если $V > c_0$, то есть, если нелинейная волна распространяется по стержню быстрее, чем линейные возмущения, то $m_2 < 0$. На фазовой плоскости уравнения $\left(\theta, \frac{d\theta}{d\xi}\right)$ (2.5) точка $(0,0)$ является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка $\left(\pm \sqrt{-\frac{m_1}{m_2}}, 0\right)$ – неустойчивыми положениями равновесия типа «седло». Фазовый портрет показывает, что в стержне могут существовать как периодические стационарные волны (им соответствуют движения по фазовой траекториям вокруг положения равновесия), так и уединенная стационарная волна (движение по сепаратрисе, идущей из «седла» в «седло»).

Периодическая волна описывается эллиптическим синусом, форма которого близка к меандру:

$$\theta = A \operatorname{sn}(K\xi, s). \quad (2.6)$$

Здесь A – амплитуда волны; $K = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2 A^2}{2}}$ – волновое число; $s^2 = \frac{m_2 A^2}{2m_1 + m_2 A^2}$ – модуль эллиптической функции, изменяющейся в интервале $0 \leq s^2 \leq 1$.

Через параметры исходной задачи амплитуда и волновое число выражаются следующими соотношениями:

$$A = \frac{2V}{c_0} \sqrt{\left(1 - \frac{c_0^2}{V^2}\right) \left(\frac{s^2}{1+s^2}\right)}, \quad (2.7)$$

$$K = \frac{V}{c_0 r_y} \sqrt{\frac{1}{1+s^2}} \quad (2.8)$$

Уединенная стационарная волна имеет форму перепада (кинка) и описывается гиперболическим тангенсом:

$$\theta(\xi) = A^{(c)} \operatorname{th}(\xi/\Delta), \quad (2.9)$$

где

$$A^{(c)} = \sqrt{2} \cdot \frac{V}{c_0} \sqrt{\left(1 - \frac{c_0^2}{V^2}\right)} \quad (2.10)$$

– амплитуда волны,

$$\Delta = \frac{c_o}{V} r_y \sqrt{2} \quad (2.11)$$

– ее ширина.

Если $V < c_o$, то есть, если линейные возмущения распространяются по стержню быстрее, чем нелинейная волна, то $m_2 > 0$.

На фазовой плоскости уравнения (2.5) в этом случае точка $(0,0)$ является единственным устойчивым положением равновесия. Это положение равновесия типа «центр». В стержне могут существовать только периодические стационарные волны. Они описываются эллиптическим косинусом

$$\theta = A \operatorname{cn}(K\xi, s). \quad (2.12)$$

Амплитуда (A) и волновое число (K) определяются соотношениями:

$$A = 2 \frac{V}{c_o} \sqrt{(c_o^2 - 1) \left(\frac{s^2}{1 - s^2} \right)} \quad (2.13)$$

$$K = \frac{V}{c_o r_y} \sqrt{\frac{1}{1 - s^2}} \quad (2.14)$$

Если срединная линия стержня является нерастяжимой, то $u=0$ и рассматриваемая стационарная волна становится чисто изгибной. Она будет описываться уравнением

Дуффинга (2.5) с коэффициентами $m_1 = \frac{V^2}{c_o^2 r_y^2}$, $m_2 = -\frac{1}{2r_y^2}$, первый из которых всегда положителен, а второй – всегда отрицателен.

Нелинейная изгибная стационарная волна может быть как периодической, так и уединенной. Периодическая волна описывается эллиптическим синусом (2.6). Ее амплитуды (A) и волновое число (K) описываются соотношениями:

$$A = \frac{2V}{c_o} \sqrt{\frac{s^2}{1 + s^2}}, \quad (2.15)$$

$$K = \frac{V}{c_o r_y} \sqrt{\frac{1}{1 + s^2}} \quad (2.16)$$

Примечательно, что отношение амплитуды стационарной волны к волновому числу является величиной постоянной,

$$\frac{A}{K} = 2r_y s = \text{const}, \quad (2.17)$$

определяемой только радиусом инерции поперечного сечения стержня.

Уединенная волна описывается гиперболическим тангенсом (2.9). Ее амплитуда ($A^{(c)}$) и ширина (Δ) описываются соотношениями

$$A^{(c)} = \sqrt{2} \frac{V}{c_o}, \quad (2.18)$$

$$\Delta = \sqrt{2} r_y \frac{c_o}{V}. \quad (2.19)$$

Заметим, что произведение амплитуды уединенной волны на ее ширину является постоянной величиной

$$A^{(c)} \Delta = 2r_y = \text{const}. \quad (2.20)$$

При $s=1$ выражения (2.17) и (2.20) тождественны, что очевидно, поскольку при этом значении эллиптический синус выражается в гиперболический тангенс. Для стержня кругового поперечного сечения осевой радиус инерции равен половине радиуса. Соотношение (2.20) в этом случае можно переписать в виде $2A^{(c)}\Delta = d$, где d – диаметр стержня.

Определим, как соотносятся между собой параметры нелинейных стационарных волн, распространяющихся в растяжимом и нерастяжимом стержнях. Для этого сравним соотношения (2.7) и (2.15), (2.8) и (2.16), (2.10) и (2.18), (2.11) и (2.19).

Получим:

$$\frac{A_{\text{раст.}}}{A_{\text{нераст.}}} = \frac{A_{\text{раст.}}^{(c)}}{A_{\text{нераст.}}^{(c)}} = \sqrt{1 - \frac{c_o^2}{V^2}}, \quad \frac{K_{\text{раст.}}}{K_{\text{нераст.}}} = 1, \quad \frac{\Delta_{\text{раст.}}}{\Delta_{\text{нераст.}}} = 1. \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что амплитуды нелинейных продольно-изгибных стационарных волн (как периодических, так и уединенных) всегда меньше, чем соответствующие амплитуды нелинейных изгибных стационарных волн. Эта разница тем заметней, чем больше скорость нелинейной волны отличается (превышает) от скорости линейных возмущений. Отношение длины стационарной периодической волны, распространяющейся в растяжимом стержне к длине стационарной периодической волны, распространяющейся в нерастяжимом стержне, всегда равно единице. Единице равны и отношения ширин уединенных стационарных волн, распространяющихся в растяжимом и нерастяжимом стержнях.

3. Продольно-крутильные волны

Во многих технологических и производственных процессах (например, при бурении, глубоком сверлении [8]) приходится сталкиваться с крутильно-продольными волнами, распространяющимися в инструменте. Задача при этом может быть сведена к изучению динамики упругого стержня, совершающего связанные колебания. Как известно, в линейном приближении продольные и крутильные колебания стержня не влияют друг на друга [1], а для описания их взаимодействия следует учитывать геометрическую и физическую упругие нелинейности.

Математическая модель, описывающая продольные и крутильные волны конечной амплитуды, распространяющиеся в стержне, была предложена в [2]. Пренебрежем в полученных там уравнениях деформацией поперечного сечения стержня, как правило, не характерной для стержней кругового или кольцевого профилей поперечного сечения [1]; пренебрежем, кроме того, кинетической энергией радиальных движений частиц стержня и потенциальной энергией сдвиговых деформаций, существенных лишь при изучении вибраций высокой частоты. Уравнения динамики рассматриваемой системы примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\alpha}{\rho} R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\lambda}{\rho} \theta^2 \right], \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\alpha}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{2\lambda F}{\rho J_p} \theta \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $u(x,t)$ – продольное перемещение частиц срединной линии; $\theta(x,t)$ – угол поворота поперечного сечения в своей плоскости; ρ – плотность материала; F – площадь поперечного сечения стержня; J_p – полярный момент инерции; $R = \sqrt{J_p/F}$ – полярный радиус инерции (для цилиндрического стержня $R = r/\sqrt{2}$, где r – радиус); $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость, с которой распространялась бы продольная волна при отсутствии крутильных возмущений; $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость, с которой распространялась бы продольная волна при отсутствии продольных возмущений; $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ – модуль Юнга; $\alpha = \frac{E}{2} + \frac{\nu_2}{2} + \nu_3$ – коэффициент, характеризующий физическую нелинейность (при этом геометрическая нелинейность определяется, как известно, нелинейной связью компонент тензора деформаций и вектора перемещений); λ, μ – константы Ламе второго порядка; ν_2, ν_3 – константы Ламе третьего порядка (их численные значения для различных материалов можно найти в [9]).

Заметим, что нелинейные слагаемые входят в уравнения динамики (3.1) несимметрично: продольные волны воздействуют на крутильные параметрическим образом, а крутильные волны служат источником продольных волн.

Если динамическое кручение представляет собой процесс распространения малых вибраций $\tilde{\theta}(x,t)$ на фоне статической закрутки θ_0 , то угол поворота поперечного сечения стержня можно представить в виде суммы:

$$\theta(x,t) = \theta_0 + \tilde{\theta}(x,t). \quad (3.2)$$

Пользуясь (3.2), линеаризуем систему (3.1), приводя ее к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{4\lambda}{\rho} \theta_0 \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} &= -\frac{2\lambda F}{\rho J_p} \theta_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Будем искать решение системы (3.3) в виде бегущих гармонических волн

$$u, \tilde{\theta} \sim e^{i(\omega t - kx)} \quad (3.4)$$

(здесь ω – круговая частота; $k = 2\pi/\Lambda$ – волновое число, Λ – длина волны), которые должны удовлетворять следующему дисперсионному уравнению

$$\omega^4 - (c_0^2 + c_\tau^2)k^2\omega^2 - \theta_0^2 \frac{8\lambda^2 F}{\rho^2 J_p} k^2 + c_0^2 c_\tau^2 k^4 = 0 \quad ; \quad (3.5)$$

из него следует, что частоты продольно-крутильных волн определяются соотношениями

$$\omega = \sqrt{\frac{(c_0^2 + c_\tau^2)}{2} k^2 \pm \sqrt{\frac{(c_0^4 + c_\tau^4)}{2} k^4 + \theta_0^2 \frac{8\lambda^2}{\rho^2 R^2} k^2}}, \quad (3.6)$$

а фазовые скорости этих волн – соотношениями

$$v_\phi = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{(c_0^2 + c_\tau^2)}{2} k^2 \pm \sqrt{\frac{(c_0^4 + c_\tau^4)}{2} k^4 + \theta_0^2 \frac{8\lambda^2}{\rho^2 R^2} k^2}}. \quad (3.7)$$

Оценим предельные значения частоты (3.6) и фазовой скорости (3.7) в длинноволновом ($k \rightarrow 0$) и коротковолновом ($k \rightarrow \infty$) диапазонах. В длинноволновом диапазоне

$$\omega \approx \sqrt{\frac{2\sqrt{2\lambda}\theta_0 k}{\rho R}}, \quad (3.8)$$

$$v_{\phi} \approx \sqrt{\frac{2\sqrt{2\lambda}\theta_0}{\rho Rk}} \quad (3.9)$$

То есть, частота волны растет пропорционально \sqrt{k} , а фазовая скорость уменьшается пропорционально $1/\sqrt{k}$. При фиксированном значении k частота волны и ее скорость увеличиваются пропорционально $\sqrt{\theta_0}$. Соотношения (3.8), (3.9) справедливы, если $\frac{Rk}{\theta_0} < 1$,

при их выводе учитывалось, что $\sqrt{\frac{(c_0^4 + c_{\tau}^4)\rho^2}{16\lambda^2}} \sim 1$. Заметим, что в длинноволновом диапазоне действительные значения частоты есть только при знаке "плюс" перед внутренним радикалом в (3.6), при знаке "минус" действительных значений частоты нет.

В коротковолновом диапазоне

$$\omega \approx k \sqrt{\frac{c_0^2 + c_{\tau}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{c_0^4 + c_{\tau}^4}{2}}}, \quad (3.10)$$

$$v_{\phi} \approx \sqrt{\frac{c_0^2 + c_{\tau}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{c_0^4 + c_{\tau}^4}{2}}}, \quad (3.11)$$

то есть ни частота, ни фазовая скорость при $k \rightarrow \infty$ от угла закручивания θ_0 не зависят. Действительные частоты имеются при любом знаке под внутренним радикалом. Заметим, что $v_{\phi}(0) > v_{\phi}(\infty)$.

Будем искать решение системы (3.1) в виде бегущих стационарных волн:

$$u = u(\xi), \quad \theta = \theta(\xi), \quad (3.12)$$

где $\xi = x - Vt$, V – скорость стационарной волны. Соотношения (3.12) сведут (3.1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (V^2 - c_0^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\alpha}{\rho} R^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 + \frac{2\lambda}{\rho} \theta^2 \right], \\ (V^2 - c_{\tau}^2) \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{2\alpha}{\rho} \frac{du}{d\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right) - \frac{2\lambda F}{\rho J_p} \theta \frac{du}{d\xi}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Первое из уравнений (3.13) можно один раз проинтегрировать (постоянную интегрирования без потери общности считаем равной нулю). Это даст соотношение, связывающее между собой u и θ .

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{V^2 - c_0^2} \left[\frac{\alpha}{\rho} R^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 + \frac{2\lambda}{\rho} \theta^2 \right]. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) во второе уравнение системы (3.13), после некоторых преобразований и упрощений получим уравнение

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + m_1\theta \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 + m_2\theta^3 = 0, \quad (3.15)$$

где

$$m_1 = \frac{4\alpha\lambda}{\rho^2 V^4 \left(\frac{c_0^2}{V^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{c_\tau^2}{V^2} \right)}, \quad m_2 = \frac{4\lambda^2}{\rho^2 R^2 V^4 \left(1 - \frac{c_0^2}{V^2} \right) \left(1 - \frac{c_\tau^2}{V^2} \right)}.$$

Уравнение (3.15) имеет ограниченные решения лишь в случае, когда оба его коэффициента положительны ($m_1 > 0, m_2 > 0$). Это возможно, если $c_\tau > V$ или $V > c_0$, т.е. если нелинейная волна движется медленнее, чем любые линейные возмущения или, наоборот, нелинейная волна движется быстрее, чем любые линейные возмущения (напомним, что $\alpha < 0$ для большинства металлов и их сплавов, а $c_0 > c_\tau$).

На фазовой плоскости $\left(\theta, \frac{d\theta}{d\xi} \right)$ точка с координатами $(0;0)$ является устойчивым положением равновесия типа "центр" (рис. 3.1). Движения по фазовым траекториям периодические, следовательно, и нелинейные стационарные продольно-крутильные волны являются периодическими. Рисунок выполнен при $m_1 = m_2 = 1$. При изменении значений параметров m_1 и m_2 качественный вид фазового портрета системы не изменяется.

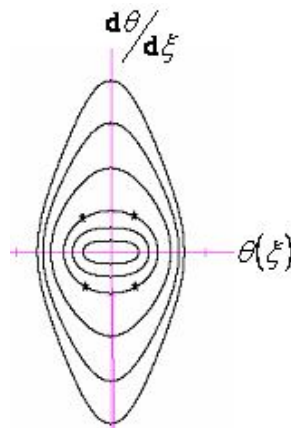


Рис. 3.1. Фазовый портрет нелинейного осциллятора.

Прямое численное моделирование уравнения (3.15) показало, что с увеличением параметра m_1 (это возможно при уменьшении скорости V или увеличении параметра нелинейности $|\alpha|$) длина стационарной волны Λ (пространственный период) уменьшается.

Зависимость длины волны от m_1 при $m_2 = 1$ и постоянной амплитуде $a_0 = 1$ показана на рис. 3.2.

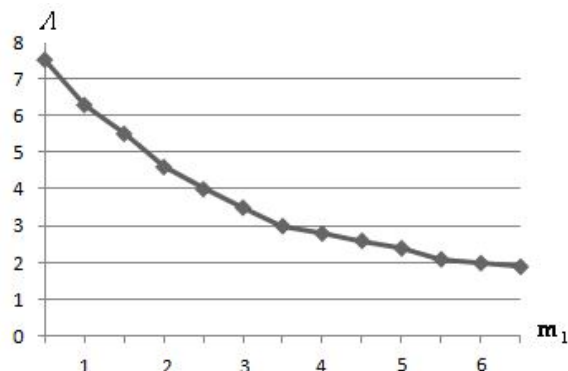


Рис. 3.2. Зависимость длины волны от коэффициента m_1

При увеличении амплитуды колебаний длина волны уменьшается, что показано на рис. 3.3.

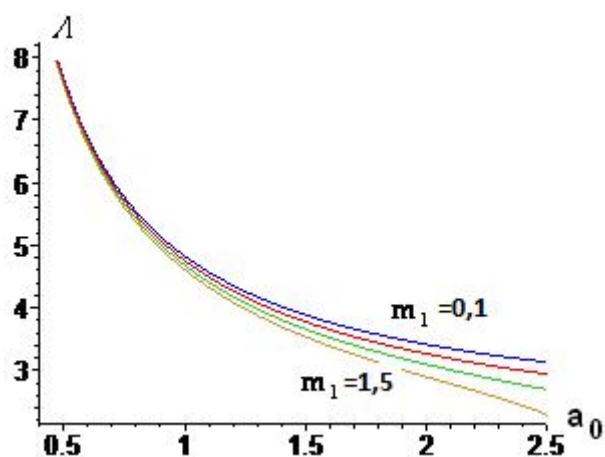


Рис. 3.3. Зависимость длины волны от амплитуды.

Существует частное аналитическое решение уравнения (3.15):

$$\theta(\xi) = a_0 \sin k\xi, \quad (3.16)$$

где $k = \sqrt{m_2 / m_1}$ – волновое число; $a_0 = 1 / \sqrt{m_1}$ – амплитуда.

Соотношению (3.16) на рис.3.2 и рис.3.3 соответствуют точки с координатами (1; 6,28) при $m_1 = m_2 = 1$. А на фазовом портрете (рис.3.1) эта траектория помечена «звездочками». Заметим, что при гармоническом законе изменения угла поворота (3.16) продольное перемещение может быть только постоянным: $u(\xi) = const$.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 11-08-97066-р_поволжье).

Литература

1. Вибрации в технике. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение, 1999. 504с.
2. Ерофеев В.И., Потапов А.И., Солдатов И.Н. Нелинейные волны в упругих телах с пространственной дисперсией. Монография / Горьковский ун – т. Деп. в ВИНТИ 25.07.86. № 5440 – В86. 224с.
3. Весницкий А.И., Милосердова И.В. Волновые методы борьбы с вибрациями // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998, №3. С. 16 – 25.
4. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. Нижний Новгород: изд-во «Наш дом». 2010. 248с.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342с.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622с.
7. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. - 208 с.
8. Юнин Е.К. Введение в динамику глубокого бурения. М.: Либроком, 2009. 168 с.
9. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

Поступила: 03.04.12.