УДК 534.1

Вынужденные почти периодические колебания ударного осциллятора

В.Ш. Бурд

Аннотация. Рассматривается движение демпфированного ударного осциллятора под действием бигармонической силы. Исследованы условия существования и устойчивости почти периодических резонансных режимов.

Ключевые слова: ударный осциллятор, переменные импульс-фаза, сингулярно возмущенные системы, метод усреднения, резонансные почти периодические режимы.

1 Введение

Дается корректное описание резонансных почти периодических режимов в виброударной системе с одной степенью свободы.

Для изучения выбрана модель с упругим ударом и вязким трением. Такая модель обсуждалась в [1], [4].

Наше изучение основывается на комбинации метода усреднения на бесконечном интервале [9] и методов теории сингулярных возмущений [3].

Мы исследуем поведение консервативной виброударной системы с одной степенью свободы под действием малого бигармонического возмущения. Эта задача сводится к изучению двумерной системы с быстро вращающейся фазой и медленно изменяющимися коэффициентами.

Периодические возмущения гладких двумерных систем с быстро вращающейся фазой и медленно изменяющимися коэффициентами были изучены в [12]. В этой работе установлены условия близости решений точных и усредненных уравнений на конечном асимптотически большом временном интервале. Резонансные почти периодические колебания в таких системах исследованы в [2,9].

Недавно много внимания было сфокусировано на изучении динамики нелинейных систем под действием внешней бигармонической силы с различными частотами [см., например, 7,8,10,11].

2 Консервативный ударный осциллятор

Изложим необходимые для дальнейшего сведения и обозначения из книги [1].

Рассмотрим линейный осциллятор

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0.$$

Установим в точке $x = \Delta$ неподвижный ограничитель и будем предполагать, что по достижении координатой x значения Δ в системе происходит мгновенный упругий удар, так что если $x = \Delta$ в момент времени t_α, то выполняется соотношение

$$\dot{x}(t_\alpha - 0) = -\dot{x}(t_\alpha + 0). \tag{1}$$

При наличии зазора, когда $\Delta > 0$, эллипсы, соответствующие линейной системе, “разрезаются"вертикальной прямой $x = \Delta$ и истинным траекториям соответствуют их левые части. Если уровень энергии в линейной системе недостаточен для выхода на уровень $x = \Delta$, происходят линейные колебания с частотой Ω. При наличии соударений частота колебаний $\omega > \Omega$ и с увеличением энергии возрастает, но не может быть больше значения 2Ω, так что

$$\Omega < \omega < 2\Omega, \quad \Delta > 0. \tag{2}$$

При натяге $\Delta < 0$ частота колебаний ω удовлетворяет неравенству

$$2\Omega < \omega < \infty, \quad \Delta < 0. \tag{3}$$

При $\Delta = 0$ получаем эллипс, “разрезанный"точно пополам. Поэтому для всех значений энергии изображающая точка проходит любую фазовую траекторию за одно и то же время с удвоенной скоростью 2Ω, так что

$$\omega = 2\Omega, \quad \Delta = 0. \tag{4}$$

Условие (1) говорит о том, что изменение импульса Φ_0 в окрестности момента удара t_α имеет вид

$$J = \dot{x}_- - \dot{x}_+ = 2\dot{x}_-, \quad \dot{x}_- > 0,$$

где $\dot{x}_\alpha = \dot{x}(t_\alpha \mp 0)$.

Результирующая сила оказывается локализованной при $t = t_\alpha$. Поэтому

$$\Phi_0 \left|_{t=t_\alpha}\right. = J\delta(t - t_\alpha) \tag{5}$$

причем

$$\int\limits_{t_\alpha - 0}^{t_\alpha + 0} \Phi_0 dt = J.$$

Удары происходят периодически, когда $t_\alpha = t_0 + \alpha T$, где α - целое число, а T - период между ударами, вычисляемый при помощи равенства $T = 2\pi\omega^{-1}$ и (1)-(4). Поэтому при $\infty < t < \infty$ получаем T-периодическое продолжение (5)

$$\Phi_0 = J\delta_T(t - t_0),$$

где $\delta_T(t)$ - T - периодическая δ-функция.

Под решением уравнения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0 \tag{6}$$

можно понимать T-периодическую функцию $x(t)$, которая, будучи подставленной в это уравнение, обращает его в верное (в смысле теории обобщенных функций) равенство вида

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + J\delta_T(t - t_0) = 0,$$

где t_0 - произвольная постоянная, и для всех $\alpha = 0, \pm 1, \dots$

$$x(t_0 + \alpha T) = \Delta, \quad J = 2\dot{x}_-(t_0 + \alpha T).$$

При этом выполняются ограничения

$$x(t) \le \Delta, \quad \dot{x}_- > 0.$$

а периоды колебаний в зависимости от знака Δ соответствуют частотным диапазонам (2)-(4).

Для аналитического описания решения положим $t_0 = 0$. Тогда при $0 \le t < T_0$ решение уравнения (6) имеет вид

$$x(t) = -J\kappa[\omega_0(J)(t - t_0), \omega_0(J)], \quad \kappa(t, \omega_0) = \frac{1}{2\Omega}\frac{\cos[\Omega(t - T_0/2)]}{\sin(\Omega T_0/2)} = \frac{\omega_0}{2\pi\Omega^2} + \frac{\omega_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\omega_0 t}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2}, \quad J(\omega_0) = -2\Omega\Delta\tan\frac{\Omega T_0}{2}, \quad J \ge 0,$$

причем третье соотношение определяет здесь при $\Delta \ne 0$ гладкую зависимость $\omega_0(J)$, а при $\Delta = 0$ получаем $\omega_0 = 2\Omega$.

Найденное представление следует продолжить по периодичности. Получим

$$\kappa(t, \omega_0) = \frac{\omega_0}{2\pi\Omega^2} + \frac{\omega_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\omega_0 t}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2}.$$

Геометрические условия удара приводят к частотным интервалам (2)-(4). Отметим, что в случае $\Delta = 0$, решение $x(t)$ при $0 \le t < \pi/\Omega$ имеет вид

$$x(t) = -\frac{J}{2\Omega}\sin\Omega t,$$

причем J - произвольная постоянная, не зависящая от частоты.

3 Возмущенный ударный осциллятор

Теперь рассмотрим возмущенный ударный осциллятор

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = \varepsilon[f(t, \tau) - \gamma\dot{x}], \tag{7}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $\tau = \varepsilon t$ - медленное время, $\gamma > 0$ - постоянная. Функция $\Phi_0(x, \dot{x})$ описывает силу удара.

Будут рассматриваться возмущения двух типов. Первое бигармоническое возмущение - это сумма двух малых периодических сил с близкими частотами. Соответствующее возмущение имеет вид

$$f(t, \tau) = a_1 \sin\nu t + a_2 \sin(\nu t + \Gamma\tau),$$

где $a_1,\ a_2,\ \nu,\ \Gamma$ - положительные числа. Возмущающая функция $f(t,\tau)$ может быть записана в форме

$$f(t,\tau) = E(\tau)\sin(\nu t + \beta(\tau)), \quad \tau = \varepsilon t, \tag{8}$$

где

$$E(\tau) = \sqrt{a_1^2 + 2a_1a_2\cos\Gamma\tau + a_2^2}, \quad \cos\beta(\tau) = \tfrac{a_1+a_2\cos\Gamma\tau}{E(\tau)},$$
$$\sin\beta(\tau) = \tfrac{a_2\sin\Gamma\tau}{E(\tau)}.$$

Функция (8) периодическая по t с периодом $2\pi/\nu$ и периодическая по τ с периодом $2\pi/\Gamma$. Функция $E(\tau)$ строго положительная, если $a_1 \neq a_2$, что и будет предполагаться. Следовательно, функция $f(t,\varepsilon t)$ является почти периодической функцией с двумя базисными частотами.

Второе возмущение - это бигармоническая сила с очень различающимися частотами. Эта сила имеет вид

$$f(t,\tau) = A\sin(\nu t + \theta) + B\sin\Gamma\tau, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{9}$$

где A, B, ν, Γ, θ - вещественные постоянные.

Положим $\psi = \omega_0(J)t$ и преобразуем уравнение (7) в систему в переменных J,ψ (импульс-фаза) сделав замену

$$\begin{aligned} x &= -J\kappa[\psi,\omega_0(J)], \\ \dot{x} &= -J\omega_0(J)\kappa_\psi[\psi,\omega_0(J)], \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\kappa[\psi,\omega_0(J)] = \kappa(\psi,J) = \omega_0(J)^{-1}\left[\frac{1}{2\pi\Omega_0^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{\Omega_0^2 - k^2}\right], \quad \Omega_0 = \frac{\Omega}{\omega_0(J)}.$$

Из теории рядов Фурье (см., например, [12, глава 4] следует, что функция $\kappa_\psi[\psi,\omega_0(J)]$ имеет конечные разрывы в точках $\psi = 2l\pi$, где l - целое число, и непрерывна во всех остальных точках. Кроме того, функция $\kappa_\psi[\psi,\omega_0(J)]$ дифференцируема во внутренних точках интервалов $[2\pi l, 2\pi(l+1)]$. Ряд Фурье функции $\kappa_\psi[\psi,\omega_0(J)]$ имеет вид

$$-\omega_0(J_{pq})^{-1}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin k\psi}{\Omega_0^2 - k^2}.$$

Следовательно, замена (10) не является гладкой в точках $\psi = 2l\pi$. В новых переменных удар происходит, когда $\psi = 2l\pi$. После замены (10) получим систему

$$\begin{aligned} \tfrac{dJ}{dt} &= -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t,\tau) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\psi,J)]\kappa_\psi(\psi,J), \\ \tfrac{d\psi}{dt} &= \omega_0(J) - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t,\tau) + J\omega_0(J)\kappa_\psi(\psi,J)](-J\kappa(\psi,J))_J. \end{aligned} \tag{11}$$

Детальный вывод системы (11) содержится в книге [1, глава 2]. Система (11) - это система с быстро вращающейся фазой. Правые части системы периодические по ψ и имеют конечные разрывы в точках $\psi = 2l\pi$. Зависимости $\omega_0(J)$ имеют вид

$$\omega_0(J) = \tfrac{\pi\Omega}{\pi - \arctan[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta > 0, \quad \Omega < \omega_0 < 2\Omega,$$
$$\omega_0(J) = -\tfrac{\pi\Omega}{\arctan[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta < 0, \quad 2\Omega < \omega_0 < \infty,$$
$$\omega_0 = 2\Omega = const, \quad \Delta = 0.$$

Система (11) - это система с двумя медленными переменными J, τ и двумя быстрыми переменнными ψ, t.

Существование и устойчивость стационарных резонансных режимов в таких системах будет исследоваться.

4 Построение усредненных уравнений

Мы используем метод усреднения на бесконечном интервале (см. [9]). Основная проблема, возникающая при применении метода усреднения - это выбрать подходящие замены переменных, которые дают возможность исключить быстрые переменные из уравнений движения с заданной точностью и затем разделить быстрые и медленные движения. В случае бигармонического возмущения возникают дополнительные трудности по сравнению со случаем периодического возмущения.

Пусть J_{pq} является решением уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = \frac{q}{p}\nu.$$

где p, q - взаимно простые целые числа. Сделав замену $\psi = \varphi + \frac{q}{p}\nu t$, мы преоблазуем систему (11) в систему

$$\begin{array}{l} \frac{dJ}{dt} = -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t,\tau) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)]\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0(J) - \frac{q}{p}\nu - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t,\tau) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)]\times \\ (-J\kappa(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J))_J. \end{array} \tag{12}$$

Точка $J = J_{pq}$ представляет собой резонансную точку в системе (12).

Будем предполагать, что резонанс невырожденный, т.е.

$$\left.\frac{d\omega_0}{dJ}\right|_{J=J_{pq}} = \omega_0'(J_{pq}) \neq 0. \tag{13}$$

Исследуем поведение решений системы (12) в $\mu = \sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной точки J_{pq}. Сделаем замену

$$J = J_{pq} + \mu z$$

и разложим правую часть системы (12) по степеням параметра μ. В результате получим систему

$$\begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = \mu F_0(t,\tau,\varphi,J_{pq}) + \mu^2 F_1(t,\tau,\varphi,J_{pq})z + O(\mu^3), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \mu\omega_0'(J_{pq})z + \frac{1}{2}\mu^2\omega_0''(J_{pq})z^2 + \mu^2 G_0(t,\tau,\varphi,J_{pq}) + O(\mu^3) \end{array} \tag{14}$$

где

$$F_0(t,\tau,\varphi,J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})[f(t,\tau) + \gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J + pq)]\times$$
$$\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq}),$$

$$F_1(t,\tau,\varphi,J_{pq}) = -4\frac{d}{dJ}\Big\{\omega_0(J)[f(t,\tau) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J)]\times$$
$$\left.\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J)\Big\}\right|_{J=Jpq}.$$

$$G_0(t,\tau,\varphi,J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})J_{pq}^{-1}[f(t,\tau)+\gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\kappa_\psi(\varphi+\tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq})]\times$$
$$(-\kappa(\varphi+\tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq}) - J_{pq}\kappa_J(\varphi+\tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq}).$$

Система (14) содержит только одну быструю переменную t. Теперь сделаем стандартную замену метода усреднения для того чтобы исключить быструю переменную из правой части системы (14) с точностью до членов порядка μ^2. Эта замена ищется в виде

$$z = \xi + \mu u_1(\eta,t,\tau) + \mu^2 u_2(\eta,t,\tau)\xi, \quad \varphi = \eta + \mu^2 v_2(\eta,t,\tau),$$

где функции $u_i(\eta,t,\tau)$, $(i=1,2)$, $v_2(\eta,t,\tau)$ - периодические по t, τ с периодом $2\pi/\nu$ и $2\pi/\Gamma$ соответственно.

После замены получим систему

$$\begin{aligned} \tfrac{d\xi}{dt} &= \mu f_0(\eta,\tau) + \mu^2 f_1(\eta,\tau)\xi + O(\mu^3),\\ \tfrac{d\eta}{dt} &= \mu\omega_0'(J_{pq})\xi + \tfrac{1}{2}\mu^2\omega_0''(J_{pq}))\xi^2 + \mu^2 g_0(\eta,\tau) + O(\mu^3), \end{aligned} \tag{15}$$

где $f_0(\eta,\tau)$, $f_1(\eta,\tau)$, $g_0(\eta,\tau)$ определяются как средние значения по t:

$$\begin{aligned} f_0(\eta,\tau) &= \tfrac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu} F_0(t,\tau,\eta,J_{pq})dt,\\ f_1(\eta,\tau) &= \tfrac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu} F_1(t,\tau,\eta,J_{pq})dt,\\ g_0(\eta,\tau) &= \tfrac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu} G_0(t,\tau,\eta,J_{pq})dt. \end{aligned}$$

Функции $u_i(\eta,t,\tau)$, $(i=1,2)$, $v_2(\eta,t,\tau)$ определяются как периодические решения по t с нулевым средним значением из уравнений

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u_1}{\partial t} &= F_0(t,\tau,\eta,J_{pq}) - f_0(\eta,\tau),\\ \tfrac{\partial u_2}{\partial t} &= F_1(t,\tau,\eta,J_{pq}) - u_{1\eta}(\eta,t,\tau)\omega_0(J_{pq}) - f_1(\eta,\tau),\\ \tfrac{\partial v_2}{\partial t} &= G_0(t,\tau,\eta,J_{pq}) - -u_1(\eta,t,\tau)\omega_0(J_{pq}) - g_0(\eta,\tau). \end{aligned}$$

Функции $f_0(\eta,\tau)$, $f_1(\eta,\tau)$, $g_0(\eta,\tau)$ являются гладкими по η для рассматриваемых возмущений. Функция $f_0(\eta,\tau)$ - это среднее зеачение по t функции $F_0(t,\tau,\varphi,J_pq)$. После усреднения только один член остается от бесконечной суммы. Вычисление $f_0(\eta,\tau)$ будет продемонстрировано ниже (см. (34)). Подобные утверждения справедливы и для функций $f_1(\eta,\tau)$, $g_0(\eta,\tau)$.

Система (15) во времени τ является сингулярно возмущенной системой следующего вида

$$\begin{aligned} \mu\tfrac{d\xi}{d\tau} &= f_0(\eta,\tau) + \mu f_1(\eta,\tau)\xi + O(\mu^2),\\ \mu\tfrac{d\eta}{d\tau} &= \omega_0'(J_{pq})\xi + \tfrac{1}{2}\mu\omega_0''(J_{pq}))\xi^2 + \mu g_0(\eta,\tau) + O(\mu^2), \end{aligned} \tag{16}$$

5 Существование и устойчивость почти периодических решений

Пусть существует такая периодическая функция $\eta_0(\tau)$, что

$$f_0(\eta_0(\tau),\tau) \equiv 0, \quad 0 < \eta_0(\tau) < 2\pi. \tag{17}$$

В этом случае вырожденная система, которая получается из (16) при $\mu = 0$, имеет решение

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta_0(\tau). \tag{18}$$

Линеаризуя правую часть системы (16) при $\mu = 0$ на решении (18), получим матрицу

$$A_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & f_{0\eta}(\eta_0, \tau) \\ \omega_0'(J_{pq}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Если

$$\omega_0'(J_{pq}) f_{0\eta}(\eta_0, \tau) > \sigma_0 > 0, \quad \sigma_0 = const, \quad \tau \in (-\infty, \infty), \tag{19}$$

тогда матрица $A_0(\tau)$ имеет вещественные собственные значения разных знаков. В этом случае, как известно [9, глава 8], в системе

$$\mu \frac{du}{d\tau} = A_0(\tau) u \tag{20}$$

для достаточно малых μ пространство решений $U(\mu)$ может быть представлено в виде

$$U(\mu) = U_+(\mu) + U_-(\mu).$$

Для решений $u_+(\tau, \mu) \in U_+(\mu)$ справедливо неравенство

$$|u_+(\tau, \mu)| \leq M_+ \exp\left[-\frac{\gamma_+}{\mu}(\tau - s)\right] |u_+(s, \mu)|, \quad (-\infty < s < \tau < \infty),$$

а для решений $u_-(\tau, \mu) \in U_-(\mu)$ справедливо следующее неравенство:

$$|u_-(\tau, \mu)| \leq M_- \exp\left[-\frac{\gamma_-}{\mu}(\tau - s)\right] |u_+(s, \mu)|, \quad (-\infty < \tau < s < \infty).$$

Здесь $M_+, M_-, \gamma_+, \gamma_-$ - положительные постоянные и $|\cdot|$ - норма в $\mathbb{R}^2$. Из оценок решений системы (20) следует, что решение этой системы неустойчиво для достаточно малых μ, если пространство $X_-(\mu)$ начальных условий решений из $U_-(\mu)$ является нетривиальным. Следовательно, неоднородная система

$$L(\mu) = \mu \frac{dz}{d\tau} - A_0(\tau) z = f(\tau),$$

где $f(\tau)$ - периодическая двумерная функция, для достаточно малых μ имеет единственное периодическое решение. Это решение представимо в виде

$$z(\tau, \mu) = L^{-1}(\mu) f = \frac{1}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau, s, \mu) f(s) ds,$$

где

$$|K(\tau, s, \mu)| \leq M \exp\left(-\frac{\gamma}{\mu}|\tau - s|\right) \quad (-\infty < \tau, s < \infty), \tag{21}$$

и M, γ - положительные постоянные.

Преобразуем систему (16), используя замену

$$u = \eta - \eta_0(\tau),$$

и записав полученную систему в векторной форме ($z = (\xi, u)$)

$$\mu \frac{dz}{d\tau} = A_0(\tau)z + H(z, t, \tau, \mu). \tag{22}$$

Компоненты $H(z, t, \tau, \mu)$ имеют вид

$$\begin{array}{l} f_0(u+\eta_0, \tau) - f_{0\eta}(\eta_0, \tau)u + \mu f_1(u+\eta_0, \tau)\xi + O(\mu^2), \\ -\mu \frac{d\eta_0}{d\tau} + \frac{1}{2}\mu\omega_{xx}(x_0, \tau)\xi^2 + \mu g_0(u+\eta_0, \tau) + O(\mu^2). \end{array}$$

Очевидно, справедливо следующее неравенство

$$|H(0, t, \tau, \mu)| \leq p(\mu), \tag{23}$$

где $p(\mu) \to 0$, при $\mu \to 0$. Компоненты вектор-функции $H(z, t, \tau, \mu)$ дифференциремы по z в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$. Поэтому следующее неравенство справедлмво

$$|H(z_1, t, \tau, \mu) - H(z_2, t, \tau, \mu)| \leq p_1(r, \mu)|z_1 - z_2|, \tag{24}$$

где $p_1(r, \mu) \to 0$ при $r \to 0$.

Вектор-функция $H(z, t, \varepsilon t, \mu)$ является почти периодической функцией переменной t. Задача о почти периодических решениях системы (22) эквивалентна задаче о разрешимости системы интегральных уравнений

$$z(\tau, \mu) = \frac{1}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau, s, \mu) H(z, s, \mu) ds = \Pi(z, \mu). \tag{25}$$

Из неравенств (23), (24) следует, что последовательные приближения (см., например, [5])

$$z_0(\tau, \mu) = \Pi(z, 0), \quad z_j(\tau, \mu) = \Pi(z_{j-1}(\tau, \mu), \mu), \quad j = 1, 2, \ldots$$

для достаточно малых μ сходятся равномерно на интервале $(-\infty, \infty)$ к единственному почти периодическому решению $z^*(\tau, \mu)$ системы интегральных уравнений (25). Решение $z^*(\tau, \mu)$ стремится к $(0, 0)$ равномерно по отношению к t при $\mu \to 0$. Следовательно, система (22) для достаточно малых μ имеет единственное почти периодическое решение $z_*(\tau, \mu)$. В свою очередь, система (16) для достаточно малых μ имеет единственное почти периодическое решение. Поэтому система (15) для достаточно малых μ имеет единственное почти периодическое решение. Чтобы исследовать устойчивость почти периодического решения $z_*(\tau, \mu)$ системы(22), сделаем замену $z = z_*(\tau, \mu) + y(\tau, \mu)$. Получим систему

$$\mu \frac{dy}{d\tau} = A_0(\tau)y + H_1(y, t, \tau, \mu), \tag{26}$$

где
$$H_1(y,\psi,\tau,\mu)=H(z_*(\tau,\mu)+y(\tau,\mu),t,\tau,\mu)-H(z_*(\tau,\mu),\psi,\tau,\mu).$$
Задача устойчивости почти периодического решения $z_*(\tau,\mu)$ сводится к задаче устойчивости нулевого решения системы (26). Учитывая экспоненциальные оценки на решения системы (20), из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению получим, что для достаточно малых μ нулевое решение системы (16) неустойчиво. Следовательно, почти периодическое решение $z_*(\tau,\mu)$ системы (22) неустойчиво. Сформулируем этот результат как теорему применительно к системе (14).

Теорема 1. *Пусть J_{pq} такая постоянная, что*
$$\omega_0(J_{pq})=0,\quad \omega_0'(J_{pq})\neq 0.$$
Пусть существует такая периодическая функция $\eta_0(\tau)$ ($0<\eta_0(\tau)<2\pi$), что
$$f_0(\eta_0(\tau),\tau)=0$$
и неравенство (19) справедливо:
$$\omega_0'(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0,\tau)>\sigma_0>0,\quad \sigma_0=const,\quad \tau\in(-\infty,\infty).$$
Тогда система (14) для достаточно малых μ имеет единственное почти периодическое решение.

Следовательно, при выполнении условий теоремы 1 в μ-окрестности резонансной точки J_{pq} существует единственное неустойчивое почти периодическое решение.

Теперь пусть вместо неравенства (19) выполняется противоположное неравенство
$$\omega_0(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0,\tau)<\sigma_1<0,\quad \sigma_1=const,\quad -\infty<\tau<\infty. \tag{27}$$
Если неравенство (27) справедливо, то собственные значения матрицы $A_0(\tau)$ для всех τ будут чисто мнимыми. Теперь нам необходимо рассмотреть усредненные уравнения высших приближений (мы использовали только первое приближение при выполнении неравенства (19)).

Будем рассматривать более узкую окрестность резонансной точки J_{pq}. Сделаем замену в системе (15)
$$\begin{aligned}\xi&=\mu u(t)+\mu\xi_0(\tau)+\mu^3u_3(t,\tau),\\ \eta&=\eta_0(\tau)+\mu v(t)+\mu^2v_0(\tau),\end{aligned}$$
где $\eta_0(\tau)$ удовлетворяет уравнению (17), периодические функции $\xi_0(\tau)$ и $v_0(\tau)$ являются решениями уравнений
$$\begin{aligned}&\tfrac{d\eta_0}{d\tau}=\omega_0'(J_{pq})\xi_0(\tau)+g_0(\eta_0(\tau),\tau),\\ &\tfrac{d\xi_0}{d\tau}=f_{0\eta}(\eta_0(\tau),\tau)v_0(\tau)+f_1(\eta_0(\tau),\tau)\xi_0(\tau)+\\ &\langle F_1(t,\tau,\eta_0(\tau),J_{pq})u_1(\eta_0(\tau),t,\tau)\rangle_t+\langle F_{0\varphi}(t,\tau,\eta_0(\tau),J_{pq})v_2(\eta_0(\tau),t,\tau)\rangle_t\end{aligned}$$
соответственно. Здесь $\langle\cdot\rangle_t$ - среднее значение по t для фиксированного τ. Из неравенств (13) и (27) следует, что эти уравнения можно разрешить. Функция $u_3(t,\tau)$

определяется как периодическое решение с нулевым средним значением из уравнения

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = F_{0\varphi}(t,\tau,\eta_0(\tau),J_{pq})v_2(\eta_0(\tau),t,\tau) + F_1(t,\tau,\eta_0(\tau),J_{pq})u_1(\eta_0(\tau),t,\tau) - \\ \langle F_{0\varphi}(t,\tau,\eta_0(\tau),J_{pq})v_2(\eta_0(\tau),t,\tau)\rangle_t - \langle F_1(t,\tau,\eta_0(\tau),J_{pq})u_1(\eta_0(\tau),t,\tau)\rangle_t.$$

Замена преобразует систему (15) в систему

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \mu a(\tau)v + \mu^2[b(\tau)u + e(\tau)v^2] + O(\mu^3), \\ \frac{dv}{dt} &= \mu c(\tau)u + \mu^2 d(\tau)v + O(\mu^3), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned} &a(\tau) = f_{0\eta}(\eta_0(\tau),\tau), \quad b(\tau) = f_1(\eta_0(\tau),\tau), \quad c(\tau) = \tfrac{1}{2} f_{0\eta\eta}(\eta_0(\tau),\tau), \\ &d(\tau) = \omega_0'(J_{pq}), \quad e(\tau) = g_{0\eta}(\eta_0(\tau),\tau). \end{aligned} \tag{29}$$

Условие (27) в новых обозначениях принимает вид

$$a(\tau)c(\tau) < \sigma_1 < 0.$$

Как было отмечено, из этого условия следует, что собственные значения матрицы первого приближения являются чисто мнимыми для всех τ. Мы приведем систему (28) к “стандартной форме”, т.е. к форме, где матрица первого приближения будет нулевой. Детальное описание редукции системы (28) содержится в [9, глава 16].

Получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= \frac{1}{2}\left[b(\tau) + e(\tau) - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right]A + f_1(A,B,\chi,\tau) + O(\mu), \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{1}{2}\left[b(\tau) + e(\tau) - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)}\right]B + f_2(A,B,\chi,\tau) + O(\mu), \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$h(\tau) = \left[-\frac{d(\tau)}{a(\tau)}\right]^{1/2}, \quad \chi(\tau,\mu) = \frac{1}{\mu}\int_0^\tau [-a(s)c(s)]^{1/2}ds.$$

Функции $f_1(A,B,\chi,\tau)$, $f_2(A,B,\chi,\tau)$ являются периодическими по χ с периодом 2π. Они содержат члены не ниже чем квадратические по A и B. Анализ системы (30) дает следующую теорему для системы (14) (см. подобную теорему 16.2 в [9]). (Ниже среднее значение периодической функции $f(\tau)$ обозначается $\langle f(\tau)\rangle$.)

Теорема 2. *Пусть резонансная точка J_{pq} удовлетворяет условиям теоремы 1. Пусть выполняется неравенство*

$$a(\tau)d(\tau) < \sigma_1 < 0, \quad t \in (-\infty,\infty).$$

Наконец, пусть выполняется неравенство

$$\langle b(\tau) + e(\tau)\rangle \neq 0$$

Тогда система (14) в ε-окрестности резонанмной точки для достаточно малых ε, имеет единственное почти периодическое решение. Это решение асимптотически устойчиво, если

$$\langle b(\tau) + e(\tau)\rangle < 0,$$

и неустойчиво, если

$$\langle b(\tau) + e(\tau) \rangle > 0.$$

Теоремы 1 и 2 применимы к изучению резонансных решений в виброударной системе (11). Резонансная точка определяется из уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = -\frac{\pi\Omega}{\pi - arctan\frac{J_{pq}}{2\Omega\Delta}} = \frac{q}{p}\nu. \tag{31}$$

Из уравнения (31) следует, что

$$\omega_0'(J_{pq}) > 0.$$

Чтобы вычислить остальные коэффициенты уравнения (30) необходимо специфицировать функцию $f(t,\tau)$.

Пусть функция $f(t,\tau)$ определяется формулой (8).

Чтобы вычислить $a(\tau) = f_{0\eta}(\eta_0, \tau)$ нам необходимо усреднить $F_0(t,\tau,\varphi,J_{pq})$. Первый член этой функции есть

$$-4\omega_0(J_{pq})E(\tau)\sin(\nu t + \beta(\tau))\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t). \tag{32}$$

Так как

$$\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t) = -\omega_0(J_{pq})^{-1}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin k(\varphi + \frac{q}{p}\nu t)}{\Omega_0^2 - k^2}, \quad \Omega_0 = \Omega[\omega_0(J_{pq})]^{-1},$$

то мы должны усреднять слагаемые вида

$$E(\tau)\sin(\nu t + \beta(\tau))\sin k(\varphi + \frac{q}{p}\nu t), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Легко видеть, что среднее значение функции (32) будет ненулевым, если и только если $q = 1$, $p = n\,(n = 1, 2, \dots)$. Для $q = 1$, $p = n$ оно равно

$$\frac{2E(\tau)\nu^2}{\pi n(\Omega^2 - \nu^2)}\cos(n\eta - \beta(\tau)).$$

Среднее значение второго слагаемого

$$-4\gamma J_{pq}\omega_0^2(J_{pq})\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t)\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t)$$

равно

$$-\frac{\gamma J_{pq}}{2}\left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2}\right).$$

При вычислении среднего значения используется следующее равенство

$$\sin^{-2}\pi\Omega_0 = 1 + 4J^{-2}\Omega^2\Delta^2.$$

Далее, функция $\eta_0(\tau)$ определяется как решение уравнения

$$\cos(n\eta - \beta(\tau)) = \frac{\gamma J_{pq}\pi n}{4E(\tau)\nu^2}(\Omega^2 - \nu^2)\left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2}\right) = A_n(\tau). \qquad (33)$$

Так как $A_n(\tau) \to \infty$ при $n \to \infty$, то уравнение (33) может иметь решения только для конечного числа значений n. Если уравнение (33) имеет решения для данного значения n ($|A_n(\tau)| < 1$), то эти решения определяются формулами

$$\eta_{0l}(\tau) = \frac{\beta(\tau)}{n} \pm \frac{\arccos A_n(\tau)}{n} + \frac{2l\pi}{n}, \quad l = 0, \ldots, n-1.$$

Вычисляя производную функции $f_0(\eta,\tau)$ в точках $\eta_{0l}(\tau)$, получим

$$f_{0\eta}(\eta_{0l}(\tau),\tau) = \pm\frac{2E(\tau)\nu^2}{\pi(\Omega^2 - \nu^2)}\sqrt{1 - A_n^2(\tau)}, \qquad (34)$$

и, следовательно, (34) имеет положительный знак в n точках и отрицательный знак в n точках. Прямолинейные вычисоения подобные проведенным ранее показывают, что

$$\langle b(\tau) + e(\tau)\rangle = \langle f_1(\eta_0,\tau) + g_{0\eta}(\eta_0,\tau)\rangle < 0.$$

Теоремы 1 и 2 влекут следующий результат. Если резонансная точка J_{1n} является решением уравнения (31), тогда, если ε достаточно мало и $|A_n(\tau)| < 1$, уравнение (11) имеет n решений в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной точки, которые представляют собой неустойчивые резонансные почти периодические решения по t, и n решений, которые предствляют собой асимптотически устойчивые резонансные почти периодические решения по t в ε-окрестности резонансной точки.

Случай, когда сила определяется формулой (9), является более простым. Функции $f_0(\eta,\tau)$, $f_1(\eta,\tau)$, $g_0(\eta,\tau)$ не зависят от τ. Тогда $\eta_0(\tau) \equiv \eta_0 = const$. Получим

$$\cos(n\eta - \theta) = \frac{\gamma J_{pq}\pi n}{4A\nu^2}(\Omega^2 - \nu^2)\left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2}\right) = A_n$$

и

$$\eta_{0l} = \frac{\theta}{n} \pm \frac{\arccos A_n}{n} + \frac{2l\pi}{n}, \quad l = 0, \ldots, n-1.$$

Переменная τ содержится только в членах порядка $O(\mu^3)$ в системах (15) и (28). Мы получим результат аналогичный результату полученному для возмущения (8).

6 Заключение

В статье показано, что в рассматриваемой виброударной системе с одной степеньюсвободы при малых бигармонических возмущениях с близкими и очень различными частотами могут появляться устойчивые и неустойчивые почти периодические резонансные режимы.

Подобные методы могут быть использованы для изучения резонансных режимов, возникающих под действием бигармонических возмущений в различных задачах теории колебаний, описываемых уравнениями с гладкими и разрывными коэффициентами.

Литература

1. В.И. Бабицкий, В.Л. Крупенин Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985, 384 с.

2. В.Ш. Бурд, Резонансные почти периодические колебания в нелинейных двумерных системах с медленно изменяющимися параметрами, Прикладная математика и механика, т. 60, вып. 3, 1996, С. 397–404.

3. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов Асимптотические методы в сингулярных возмущениях. М.: Высшая школа, 1991.

4. В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов, Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 325 с.

5. И.Г. Малкин Некоторые задачи нелинейной теории колебаний. М.: Гостехиздат, 1956, 492 с.

6. Г.П. Толстов Ряды Фурье. М.: Наука, 1960, 380 с.

7. V.S. Aslanov, Chaotic behavior of the biharmonic dynamics system, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 2009, Article ID 319179, 18pp.

8. I.I. Blekhman, P.S. Landa, Conjugate resonances and bifurcations in nonlinear systems under biharmonical excitation, Int. J. Non-Lin. Mech., vol. 39(2004), 421–426.

9. V. Burd, Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval. Theory and Applications, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2007.

10. V.N. Chizhevsky, Analytical study of vibrational resonance in an overdamped bistable oscillator, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 18, No. 6(2008), 1767–1773.

11. M. Gitterman, Bistable oscillator driven by two periodic fields, J. Phys. A: Math. Gen. 34(2001), L355–L357.

12. J.A. Morrison, Resonance behavior of a perturbed system depending on a slow-time parameter, J. Math. Anal. Appl., vol. 21, No. 1(1968), 79–98.