УДК 534

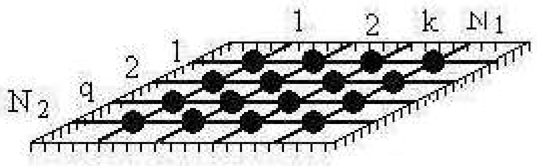
К РАСЧЕТУ ВИБРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В 2D-КОНСТРУКЦИИ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ МАТЕРИАЛА С РЕЛАКСАЦИЕЙ

© Виталий Львович Крупенин
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук
krupeninster@gmail.com

Аннотация. *Изучаются колебания решетчатых двумерных конструкций, образованных взаимно невесомыми перпендикулярными струнами (абсолютно гибкими нитями) и системой точечных абсолютно твердых тел. Предполагаются, что струны выполнены из какого-либо полимерного материала, так что определяющие соотношения не являются гуковскими, а обладают свойствами , то есть даются например при помощи соотношений Больцмана - Вольтерра. Выводятся операторные и интегральные уравнения движения. Даются примеры нахождения периодических режимов движения.*

Ключевые слова: *решетчатая конструкция, релаксация, узлы, струны, операторы линейных систем, интегральное представление виброполей, периодическая функция Грина (ПФГ).*

1. Рассмотрим прямоугольную решетку [1, 2], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих одинаковых линейных струн, защемленных на концах и имеющих соответственно длины L_1 и L_2 (рисунок). Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0,1,2,., N_1$ и $q = 0,1,2.. N_2$. В вершинах решетки помещены точечные абсолютно твердые тела с одинаковыми массами m.



Для ряда материалов, например, бетонов, некоторых типов композитов, полимеров и других описание связь между напряжением (σ) деформацией (ε) даже в простейшем линейном случае даются не законом Гука σ = Eε, а некоторой интегральным соотношением выражающим принцип Больцмана – Вольтерра. В установившимся движении принимается

$$\sigma(t) = E_0\left[\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^{t} \Gamma_0(t-s)\varepsilon(s)ds\right], \quad E_0=\text{const}, \tag{1}$$

где $\Gamma_0(t)$-ядро релаксации, характеризующее эволюцию напряжения при мгновенной (в некоторый момент времени) фиксации деформации. Будем предполагать, что ядро релаксации даются гладкой или, имеющую слабую сингулярность, функцию.

Теория таких систем изложена, в частности, в монографии [3]. Вместо соотношения (1) можно пользоваться операторным соотношением

$$\sigma(t) = E_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Gamma}^*)\,\varepsilon(t) \equiv \boldsymbol{\mathfrak{R}}\,\varepsilon(t), \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проект 10-008-00500)

$\mathfrak{R} \equiv E_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Gamma}^*)$ –оператор релаксации; $\boldsymbol{I}$- единичный оператор, а $\boldsymbol{\Gamma}^*$ - оператор Вольтерра, представление которого дано в формуле (1). Заметим, что для этой работы нет необходимости приводить формальные части постановки задачи, касающейся чисто математических аспектов проблемы. Во всех случаях мы будем аппелировать к физическому смыслу задачи.

Предполагается, что прямоугольные ячейки решетки одинаковы, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка - анизотропная. Струнные элементы предполагаются безынерционными. Крепления струн в узлах считаются абсолютно жесткими, а их натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину ΔL_1; «вертикальная» - ΔL_2 . Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение T_1 и материалу струн отвечает ядро релаксации Γ_{01} , а «вертикальные участки» - соответственно T_2 и Γ_{02}.

Таким образом, динамика решетчатой конструкции может быть описана посредством функций смещения узлов решетки $u_{kq}(t)$, где индексы k=0,1,2,.. N_1; $q=0,1,2,..$ N_2. При этом каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Будем считать, что первый по счету индекс (в данном случае k – нумерует струну, расположенную «слева направо» или наоборот), а второй индекс (в данном случае q – «снизу вверх» или наоборот).

2. Пусть вынуждающие силы, а также любые другие неконсервативные силы, действующие в решетке на каждое из массивных точечных тел – малы. Обозначив их $\mu g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq},\ldots)$, где многоточие обозначает прочие неучитывыемые сейчас переменные, μ - малый параметр. модель системы построим следующим образом. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то для всех значений индексов имеем с учетом (1) N интегро-операторных уравнений:

$$m\ddot{u}_{kq}+c_1\mathfrak{R}_1(2u_{kq}-u_{(k-1,q)}-u_{(k+1,q)})+c_2\mathfrak{R}_2(2u_{kq}-u_{(k,q-1)}-u_{(k,q+1)})=g_{kq}(t,u_{kq},\dot{u}_{kq},..). \qquad (3)$$

Здесь соответственно обозначено: $c_{1,2} = T_{1,2}/\Delta L_{1,2}$ – коэффициенты упругости. Операторы релаксации определяются ядрами $\Gamma_{01,2.}$ Граничные условия защемления можно записать как ([1, 2]) $u_{kq}=0$, при $k=0;N_1$; $q=0;N_2$. Поэтому $N=(N_1-1)(N_2-1)$.

При необходимости сюда могут быть добавлены начальные условия. Однако далее рассматриваются установившиеся режимы движения. И, поэтому, вид начальных условий несущественен.

3. Приведем операторные уравнения движения, следующие из уравнений (3). В соответствии с общими методиками частотно-временного анализа [4, 5] построим сначала оператор динамической податливости $\hat{L}(p)=||L_{kq,nj}(p)||$; $p\equiv {}^{d}\!/_{dt}$.

В данном случае выражение $L_{kq,nj}(p)$ обозначает проходной оператор динамической податливости [2], ставящей в соответствие силе, приложенной в узле (n, j) перемещение узла (k, q). И, соответственно, при n=k, j=q – имеем локальные операторы динамической податливости [2], отвечающие перемещению узла, вследствие силы, приложенной в нем самом. Для рассматриваемой системы принцип взаимности записывается как $L_{kq,nj}(p) = L_{nj,kq}(p)$.

Отметим, что четырехиндексная нумерация компонент системы операторов динамической податливости $L_{kq,nj}(p)$ вызвана тем обстоятельством, что каждый узел нумеруется парой индексов. В принципе имеется возможность «спрямить» нумерацию и каждому узлу присвоить единственный номер. Это, однако, породит существенные формальные сложности. Система уравнений движения (3) при этом разрешается в виде

$$||u_{kq}||=\mu\hat{L}(p)||g_{nj}||,.$$

где $\mu||g_{kq}||$ - матрица внешних сил, приложенных в узлах решетки, что покомпонентно записывается так:

$$u_{kq}(t)=\mu\sum_{(n)}\sum_{(j)}L_{kq,nj}(p)g_{,nj}(t). \qquad (4)$$

Соответствующие построения можно провести и для многокомпонентного оператора динамической жесткости $\hat{L}^{-1}$(p) [4, 5].

Отметим, что при таком выборе модели, линейные силы вязкого демпфирования относятся к внешним воздействиям. Однако учет наследственных свойств материала с релаксацией, например, полимерного также вносит в модель силы демпфирования (типа специфического «внутреннего трения»), поэтому здесь они учитываются самой структуре оператора $\hat{L}$(p).

Выражения для операторов динамических податливостей полностью определяются наборами собственных частот $\{\Omega_{kq}\}$, представлением ядер релаксации и нормированных коэффициентов собственных форм $\{\Theta_{kq}\}$ линейной системы [4,5]. В отличии от систем, учитывающих в первом приближении вязкие силы (например, модель Кельвина - Фойгта), системы с релаксацией не требуют каких либо дополнительных гипотез для получения точного представления операторов динамической податливости в виде, который будет дан ниже.

Используя результаты, данные в монографии [1] для решетки рассматриваемого типа:

$$\Omega^2_{kq}=\frac{2T_1}{m\Delta L_1}[1-cos(k\pi N_1^{-1})]+\frac{2T_2}{m\Delta L_2}[1-cos(q\pi N_2^{-1})], \qquad (5)$$

$$\Theta_{kq}=C sin(kn\pi N_1^{-1}) sin(qj\pi N_2^{-1}), \qquad (6)$$

где C=const. При этом в силу выбранных граничных условий $n = 1,2,\ldots N_1-1$ и также $j = 1,2,\ldots N_2-1$. В соответствии с общими методами построения операторов динамической податливости [4, 5] теперь можно получить для компонентов оператора $\hat{L}(p)$, определяющих (4):

$$L_{kq,nj}(p)=\zeta\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1} sin(k\alpha\pi N_1^{-1})sin(q\beta\pi N_2^{-1})sin(\alpha n\pi N_1^{-1})\ sin(\beta j\pi N_2^{-1})/\Omega^2_{\alpha\beta}(1-<\Gamma_0(p)>)+p^2). \qquad (7)$$

где символ $<\Gamma_0(p)>$ обозначает изображение по Лапласу ядра релаксации. В большинстве случаев $<\Gamma_0(p)>$ - трансцендентная функция p, поэтому оператор динамической податливости $L_{kq,nj}(p)$ выглядет достаточно сложным. Однако структурно – он не сложнее рассмотренного ранее в работе [2].

Здесь был еще введен нормировочный коэффициент ζ, который, в общих случаях удобнее всего вычислять при конкретно заданных параметрах системы. В данном случае можно положить: $\zeta=2[(N_1-1)(N_2-1)]^{-2}$.

4. Рассмотрим описание периодических режимов движения рассматриваемых струнных решеток. Пусть вначале в уравнении движения (1) правые части зависят только от времени: $g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq},\ldots)\equiv g_{kq}(t)$. И пусть, кроме того, эти правые части периодичны по времени с периодом Т: $g_{kq}(t+T)=g_{kq}(t)$ при всех k и q.

Подобная задача в общем случае хорошо изучена [2–4, 6] и необходимо адаптировать теорию к случаю модели решетчатой конструкции. Отыскивая T-

периодическое решение, целесообразно воспользоваться методами интегральных представлений периодических решений [2-4], в соответствии, с чем искомые *T*-периодические вибрационные процессы представимы в виде

$$u_{kq}(t)=\varepsilon\sum_{(n)}\sum_{(j)}\int_0^T \chi_{kq,nj}(t-s)g_{nj}(s)ds, \tag{8}$$

где функции $\chi_{kq,nj}(t\text{-}s)$ -Т - периодические функциями Грина (ПФГ) [2-4] – проходными (k≠n; q≠j) или локальными (k=n; q=j). При этом:

$$\chi_{kq,nj}(t)=T^{-1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}L_{kq,nj}(i\sigma\omega)\exp(i\sigma\omega t), \tag{9}$$

причем, как обычно, $T=2\pi\omega^{-1}$.

Физический смысл ПФГ $\chi_{kq,nj}(t)$ – реакция узла (*k,q*) на силовое воздействие, приложенное в узле (*n,j*) и описываемое *T*– периодической последовательностью δ-функций Дирака – $\delta^T(t)$ [2 - 4].

Физический смысл обобщенной функции $\delta^T(t)$– суть периодические последовательности мгновенных ударов с единичными импульсами, которые повторяются через времена, кратные времени $t=T$.

Таким образом, каждая функция $\chi_{kq,nj}$ (t-s) – это отклик узла решетки (*k,q*) на периодическую последовательность ударов с заданными стандартными параметрами, наносимых в узле (*n,j*) при условии, что все другие узлы свободны от внешних воздействий. Такой подход часто применяется как основа для определения ПФГ.

Далее внося в (9) формулу (5) и заменяя $p=i\sigma\omega$,, найдем:

$$\chi_{kq,nj}(t)=T^{-1}\zeta\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}\exp(i\sigma\omega t)\times$$

$$\times\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1}\sin(k\alpha\pi N_1^{-1})\sin(q\beta\pi N_2^{-1})\sin(\alpha n\pi N_1^{-1})\sin(\beta j\pi N_2^{-1})\Big/\{\Omega^2_{\alpha\beta}[1-\Gamma_0(i\sigma\omega)-\omega^2\} \tag{10}$$

Определяемый ядрами релаксации член $<\Gamma_0(i\sigma\omega)>=<\Gamma_{0c}(\sigma\omega)>+i<\Gamma_{0c}(\sigma\omega)>$, где

$$\Gamma_{0\sigma c}(\sigma\omega)=\int_0^\infty \Gamma_0(t)\cos\sigma\omega t\,dt\ ;\ \ \Gamma_{0\sigma s}(\sigma\omega)=\int_0^\infty \Gamma_0(t)\sin\sigma\omega t\,dt$$

косинус и синус преобразования Фурье от ядра релаксация, построенные на семействах частот $\{\sigma\omega\}$. Известно [3], что косинус – преобразование ядра релаксации характеризует упругие свойства рассматриваемых систем, а синус- преобразования – соответственно демпфирующие, проявляющиеся за счет внутренних несовершенств материала («внутреннее трение»).

Представления (8), (9) и (10) полностью определяют искомые перемещения узлов решетки при сделанных выше ограничивающих предположениях. Нахождение указанных перемещений сводится к выполнению $N=(N_1\text{-}1)(N_2\text{-}1)$ квадратур; сами перемещения, очевидно, будут даваться, вообще говоря, бесконечными рядами. При добавлении сюда модели вязкого трения по Кельвину - Фойгту члены, стоящие в формуле ПФГ (10) вслед за косой чертой, должны быть модифицированы [2].

5. Пусть внешние Т - периодические силы обладают свойством симметрии, то есть для всех индексов *k* и *q* имеют место соотношения: $g_{kq}(t+T/2)= - g_{kq}(t)$. Тогда, очевидно, свойством симметрии будут обладать также и перемещения узлов решетки. Для отыскания симметричных Т – периодических режимов движения в соответствии с разработанными [2-4] алгоритмами частотно-временных методов (методов периодических функций Грина) используются симметричные ПФГ

$$\tilde{\chi}_{kq,nj}(t)=\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} L_{kq,nj}[i(2\sigma+1\}\omega]\exp[i(2\sigma+1\}\omega t], \qquad (11)$$

В соответствии с чем, внося сюда представление (5), получим:

$$\tilde{\chi}_{kq,nj}(t)=2T^{-1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}\zeta\exp[i(2\sigma+1)\omega t]\times$$

$$\times\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1}\sin(k\alpha\pi/N_1)\sin(q\beta\pi/N_2)\sin(\alpha n\pi/N_1)\sin(\beta j\pi/N_2)\{\Omega_{\alpha\beta}^2[1-\Gamma_0[(2\sigma+1)\omega]-(2\sigma+1)^2\omega^2\}^{-1}. \qquad (12)$$

При этом вместо определяющего интегрального представления (8) будем иметь [2-4]:

$$u_{kq}(t)=\varepsilon\sum_{(n)}\sum_{(j)}\int_0^{\frac{T}{2}}\tilde{\chi}_{kq,nj}(t)(t-s)g_{nj}(s)ds, \qquad (13)$$

Симметричная ПФГ $\tilde{\chi}_{kq,nj}(t)$– суть реакция системы на симметричную периодическая последовательность δ-функций Дирака [2-4]:

$$\delta^{T/2}(t)=\sum_{K=-\infty}^{\infty}[\delta(t-Kt)-\delta(t-T/2-Kt)],$$

которая представима через обобщенный ряд Фурье по нечетным гармоникам.

Физический смысл обобщенной функции $\delta^{T/2}(t)$ – T - периодические последовательности мгновенных ударов с единичными импульсами, которые через каждую половину периода изменяют свое направление на противоположенное по отношению к положительному первоначальному. Каждая функция $\tilde{\chi}_{kq,nj}(t)(t-s)$ - отклик (перемещение) узла решетки (k,q) на симметричную T - периодическую последовательность ударов, наносимых в узле (n, j), при условии, что все другие узлы свободны от каких – либо внешних воздействий.

Теперь выведены все необходимые соотношения, позволяющие в линейном случае анализировать вибрационные поля решетки, а для нелинейного случая получить удобные для некоторых типов нелинейностей исходные представления.

В работах [2, 4, 5] даны примеры решения задач об определении вибрационных полей для многочисленных линейных систем. Вычисления в случае систем, определяемых соотношениями (1) (2), например, при моделировании решетчатых конструкций, изготовленных из полимерных материалов или других материалов с наследственными свойствами [3] формально аналогичны.

Литература

1. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
2. Крупенин В.Л. К анализу динамики колеблющейся двумерной решетки // Интернет-журнал «ВНТР», №2, 2007.-С.8-17.
3. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.-М.: Наука, 1977.-384 с.

4. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.
5. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
6. Розенвассер Е.Н. Колебания нелинейных систем – М.: Наука, 1969. – 576 с.
7. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами

Поступила: 14.01.12.