

УДК 621.01: 534.1

## МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КРУТИЛЬНО-ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА БАЗЕ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Санкт - Петербургский государственный университет технологии и дизайна  
Санкт-Петербург, Россия  
[vujo@rambler.ru](mailto:vujo@rambler.ru)

**Аннотация.** Проведён анализ вынужденных колебаний на базе достаточно общей динамической модели регулярной структуры, в которой главный вал и исполнительный орган схематизированы в виде крутильной и изгибной подсистем с распределёнными параметрами, а цикловые механизмы как подсистемы с сосредоточенными параметрами. Показано, что переменность параметров и диссипация при большой плотности спектра собственных частот играют важную роль в формировании частотных диапазонов с высокой виброактивностью. Для типовых динамических режимов проведён анализ амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик.

**Ключевые слова:** машины, вынужденные колебания, системы регулярной структуры, переменные параметры, амплитудно-частотная характеристика, фазо-частотная характеристика.

## TECHNIQUE OF RESEARCH OF FORCED TORSIONAL-AND-BENDING VIBRATIONS BASED ON THE THEORY OF REGULAR SYSTEMS WITH VARIABLE PARAMETERS

© I.I.Vulfson

*St.-Petersburg State University of Technology and Design. Russia.*

**Abstract.** Article is devoted to developing the methodology of calculation of forced vibrations on the basis of a fairly general dynamic model of a regular structure, in which the main shaft and a actuator are schematized as the torsional-and-bending subsystems with distributed parameters, and cyclic mechanisms as subsystems with discrete parameters. At the big density of a spectrum of natural frequencies it is shown that the dissipation and variability of parameters play a large role in formation of frequency ranges with high vibroactivity. The analysis of amplitude-frequency and phase-frequency characteristics for typical dynamic modes is carried out.

**Key words:** machine, torsional-and-bending forced vibrations, regular systems with variable parameters, amplitude-frequency characteristics, phase-frequency characteristics.

### 1. Динамическая модель.

В данной статье в развитие работ [1,2,3] исследуются вынужденные колебания привода длинного исполнительного органа с повторяющимися блоками (модулями) идентичной динамической структуры при учёте переменности параметров. На рис.1,а приведена принятая динамическая модель, которая отображает следующие структурные элементы привода: 1 – главный вал, 2 – исполнительный орган, 3– цикловые механизмы, осуществляющие программное поступательное движение исполнительного органа согласно заданной функции положения  $\Pi(\varphi)$ . При этом главный вал и исполнительный орган схематизированы в виде крутильной и изгибной подсистем с распределёнными параметрами, а цикловые механизмы в виде подсистем с дискретно заданными параметрами (рис.1,б). Динамические

характеристики элементов кинематической цепи, осуществляющей связь главного вала с двигателем  $\theta$ , в общем случае могут быть учтены соответствующими значениями динамической жёсткости на «входе». Частотному и модальному анализу данной модели была посвящена работа [4].

В модели приняты следующие условные обозначения:  $E, G$  – модули упругости и сдвига;  $I_0$  – полярный момент инерции главного вала;  $\rho_0, \rho$  – погонный момент инерции главного вала и погонная масса исполнительного органа;  $I_j, m_j$  – дискретно заданные моменты инерции и массы;  $c_j$  – коэффициенты жёсткости;  $2L$  – длина повторяющегося блока (модуля). Сосредоточенные моменты инерции  $I$  и массы  $m$  отнесены к подсистеме механизма.

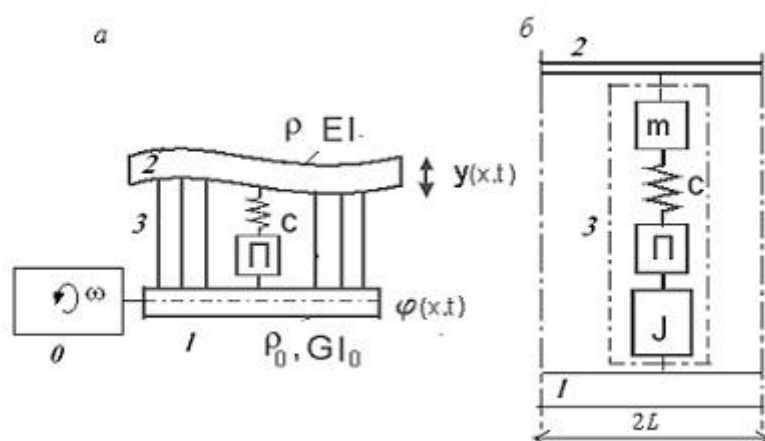


Рис.1. Динамическая модель

В отличие от динамической модели, приведенной в работе [4], в данной статье при разработке методики исследования вынужденных колебаний рассматривается более общий случай регулярной системы, когда дополнительно учтено влияние диссипации. Это связано с тем, что в зоне большой плотности частотного спектра диссипация не только лимитирует уровень колебаний в резонансных режимах, но нередко играет определяющую роль в формировании частотного диапазона повышенной виброактивности. Переменность параметров вызвана медленным изменением функции положения  $\Pi(\varphi)$ , которая служит оператором нестационарной связи между главным валом и исполнительным органом. На выстоях исполнительного органа, а также в окрестности малых значений  $d\Pi/d\varphi$  разрывается динамическая связь между крутильной и изгибной колебательными системами. В подобных случаях выявляются некоторые эффекты, свойственные системам переменной структуры [1–4].

## 2. Матрицы перехода.

Для учёта позиционных диссипативных сил воспользуемся комплексным представлением модулей упругости и коэффициентов жёсткости [5]:

$$\bar{E} = E(1 + 2i\delta_j); \bar{G} = G(1 + 2i\delta_j); \bar{c}_j = c(1 + 2i\delta_j),$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\delta_j = \vartheta_j / (2\pi)$ ,  $\vartheta_j$  – логарифмический декремент соответствующего элемента.

Для математического описания модели воспользуемся аппаратом модифицированных матриц перехода [2–4]. От традиционно используемых матриц перехода модифицированные матрицы отличаются тем, что в них учтено медленное изменение параметров, соответствующее линеаризации нелинейной функции положения в окрестности программного движе-

ния. При этом  $\Pi(\varphi) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)\Delta\varphi$ , где  $\varphi_* = \omega t$ ;  $\Delta\varphi$  – возникающая при колебаниях динамическая ошибка в рассматриваемом сечении главного вала;  $(\quad)' = \partial\Pi / \partial\varphi$ .

При исследовании вынужденных колебаний рассмотрим характерную для цикловых механизмов ситуацию, когда частота исследуемой гармоники  $\Omega = j\omega$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ) существенно превосходит частоту вращения главного вала  $\omega$ . Можно показать, что в этом случае цикловой механизм является не только источником возбуждения, но также приводит к медленному смещению резонансных частот и к появлению широкополосного спектра частот с повышенной виброактивностью. Из соображений методологического характера рассмотрим наиболее сложный случай, свойственный высокоскоростным машинам, когда наиболее существенную роль играет кинематическое возбуждение. Пусть амплитуда ускорений программного движения на рассматриваемой гармонике равна  $w$  (здесь и ниже в целях упрощения записи номер гармоники опускается).

Каждый модуль представляет собой совокупность трёх участков – перед механизмом (участок 1), механизм (участок 2), за механизмом (участок 3). Введём в рассмотрение матрицы перехода для каждого участка  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ .

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_\varphi & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_y \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{B}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta_\varphi(\Omega) & \sigma\Omega^{-1} \sin \theta_\varphi(\Omega) \\ -\sigma^{-1}\Omega \sin \theta_\varphi(\Omega) & \cos \theta_\varphi(\Omega) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_y = \begin{pmatrix} \kappa_1(p) & \kappa_2(p)L & \kappa_3(p)L^2(\bar{EI})^{-1} & \kappa_4(p)L^3(\bar{EI})^{-1} \\ \kappa_4(p)\xi^4(p)L^3 & \kappa_1(p) & \kappa_2(p)L(\bar{EI})^{-1} & \kappa_3(p)L^2(\bar{EI})^{-1} \\ \kappa_3(p)\xi^4(p)L^2\bar{EI} & \kappa_4(p)\xi^4(p)L^3\bar{EI} & \kappa_1(p) & \kappa_2(p)L \\ \kappa_2(p)\xi^4(p)L\bar{EI} & \kappa_3(p)\xi^4(p)L^2\bar{EI} & \kappa_4(p)L^3 & \kappa_1(p) \end{pmatrix},$$

где

$\sigma = (\bar{GI}_p\rho_0)^{-0.5}$ ;  $\xi(\Omega) = \sqrt[4]{\rho\Omega^2 / (\bar{EI})}$ ;  $\kappa_j = K_j(\theta) / \theta^{j-1}$ ;  $I$  – экваториальный момент инерции сечения;  $K_j$  – функции Крылова при аргументе  $\theta = \theta(\Omega) = L\xi(\Omega)$ ;

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}\Pi'_* - J\Omega^2 & 1 & -\bar{c}\Pi'_* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_\alpha & 1 & 0 \\ \bar{c}\Pi'_* & 0 & m\Omega^2 - \bar{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $\Pi'_* = \Pi'(\varphi_*)$ , где аргумент  $\varphi_*$  играет роль «медленного времени»;  $\bar{c}_\alpha$  – коэффициент жёсткости в соединении механизма и балки (при шарнирном соединении  $\bar{c}_\alpha = 0$ ).

Кинематическое возбуждение, определяющее распределённые и сосредоточенные силы инерции переносного движения, на рассматриваемой частоте пропорциональны  $w = \Pi_* \Omega^2$ . Тогда на основании (1), (2) составляющая матрицы перехода, соответствующая возбуждению на данном модуле, равна

$$U(\Omega, \varphi) = \mathbf{B}_1(\Omega) \mathbf{B}_2(\Omega, \varphi) \mathbf{U}_1(\Omega) + \mathbf{B}_1(\Omega, \varphi) \mathbf{U}_2(\Omega) + \mathbf{E} \mathbf{U}_1(\Omega), \quad (3)$$

где  $\mathbf{U}_1 = -w p (0, 0, b_{33} - 1, b_{43}, b_{53}, b_{63})^T$ ;  $\mathbf{U}_2 = -w (0, 0, 0, 0, 0, m)^T$ , где  $b_{ij}$  – элементы матрицы  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1$  (индексы 1, 2, 3 отвечают номеру участка модуля);  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

На основании (1), (2), (3) вектор состояния на границе произвольного модуля  $s$  может представлен как

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{B}^s \mathbf{T}_0 + \sum_{r=0}^{s-1} \mathbf{B}^{n-r-1} \mathbf{U}. \quad (4)$$

Вектор  $\mathbf{T}_0$ , соответствующий граничным условиям при  $s=0$ , содержит три неизвестных граничных условия  $T_{02}, T_{03}, T_{04}$  (второй индекс отвечает номеру строки). При  $s = n$  для одно-стороннего привода имеем

$$\left. \begin{aligned} T_{n2}(T_{02}, T_{03}, T_{04}) &= 0; \\ T_{n5}(T_{02}, T_{03}, T_{04}) &= 0; \\ T_{n6}(T_{02}, T_{03}, T_{04}) &= 0. \end{aligned} \right\} (5)$$

Представим систему уравнений (5) в матричной форме как

$$\mathbf{S}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}_0 = -\boldsymbol{\theta}_w. \quad (6)$$

Здесь  $\boldsymbol{\theta}_0 = (T_{02}, T_{03}, T_{04})^T$  – вектор неизвестных граничных условий, образованный ненулевыми элементами вектора  $\mathbf{T}_0$ ;  $\boldsymbol{\theta}_w$  – вектор, определяемый кинематическим возбуждением ( $w \neq 0$ );  $\mathbf{S}_0$  – матрица (3×3) коэффициентов линейной системы уравнений (6).

Для определения матрицы  $\mathbf{S}_0$  следует при  $w = 0, s = n$  провести три расчёта по зависимости (5), задаваясь  $\mathbf{T}_0^{(1)} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$ ;  $\mathbf{T}_0^{(2)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$ ;  $\mathbf{T}_0^{(3)} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$ . Тогда,  $\mathbf{S}_0 = [\mathbf{T}_{n*}^{(1)} \quad \mathbf{T}_{n*}^{(2)} \quad \mathbf{T}_{n*}^{(3)}]$ , где  $\mathbf{T}_{n*}^{(v)}$  – вектор, образованный второй, пятой и шестой строкой вектора  $\mathbf{T}_n$  при номере счёта  $v$  и заданных выше «фиктивных» граничных условиях. Легко убедиться в том, что полученная матрица совпадает с матрицей коэффициентов системы уравнений (6). Далее примем в формуле (4)  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$ , ( $w \neq 0$ ); при этом вторая, пятая и шестая строки полученного таким образом вектора  $\mathbf{T}_{n*}$  образует вектор  $\boldsymbol{\theta}_w$ . На основании (6) имеем

$$\boldsymbol{\theta}_0 = -\mathbf{S}_0^{-1} \cdot \boldsymbol{\theta}_w. \quad (7)$$

Поскольку формула (7) определяет ранее неизвестные граничные условия, зависимость (4) позволяет теперь найти комплексные амплитуды всех шести характеристик, описывающих изгибно-крутильные колебания данной системы. Для систем с двухсторонним приводом задача решается аналогичным образом при соответствующих коррективах граничных усло-

вий. Некоторые качественные показатели вынужденных колебаний в рассматриваемом классе динамических моделей проиллюстрируем на примере результатов анализа расчётов, проведённых по данным основовязальной трикотажной машины.

### 3. Анализ влияния параметров

**Влияние числа модулей  $n$ .** На рис.2 приведены нормированные амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) исполнительного органа  $Y(\Omega)$  и главного вала  $X(\Omega)$  построенные на основании (1)–(7) для одностороннего привода при  $n = 2; 4; 5$  (соответственно кривые 1, 2, 3) и фиксированном значении  $\varphi_* = \pi/2$ . (Здесь и ниже при иллюстрации АЧХ использованы нормированная амплитуда возбуждения  $w/\Omega^2$ ). Функции  $X(\Omega), Y(\Omega)$  определялись как модули соответствующих комплексных значений.

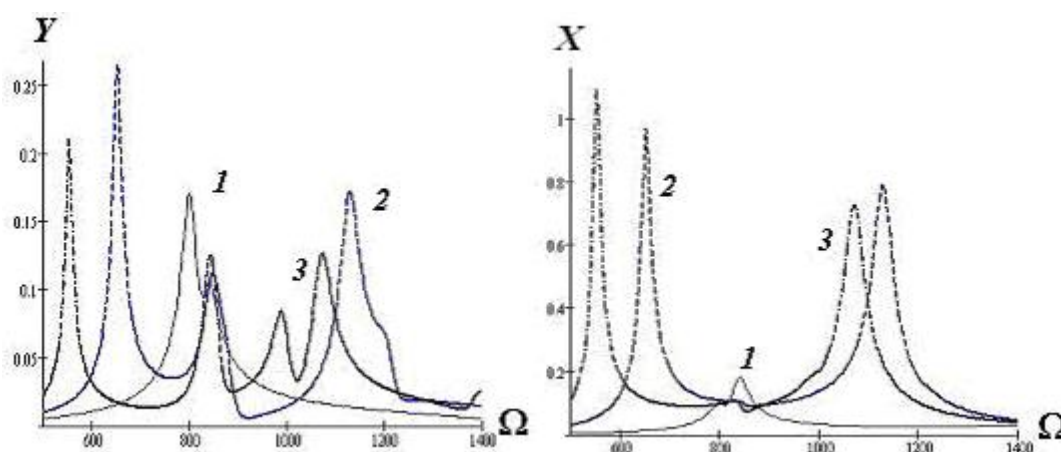


Рис.2. К анализу влияния числа модулей на АЧХ

Анализ графиков показывает, что с ростом  $n$  существенно понижается низшая резонансная частота. Кроме того резко повышается вибрация исполнительного органа в частотном диапазоне в окрестности точки сгущения.

**Влияние переменности параметров циклового механизма.** Приведенные результаты соответствуют значению  $\Pi'_{\max}$ , когда связанность между крутильной подсистемой главного вала и изгибной подсистемой исполнительного органа искусственно поддерживается на максимальном уровне. Возникает вопрос, насколько медленное изменение параметров, вызванное переменностью  $\Pi'$ , проявляется на АЧХ и ФЧХ.

На рис.3 наглядно видно, что разрыв динамических связей на выстое рабочего органа качественно меняет характер колебаний: вместо одного возникает несколько резонансных режимов. В подобных случаях наблюдается режим биений, который сопровождается изменением форм колебаний и повышенной виброактивностью системы (рис.4).

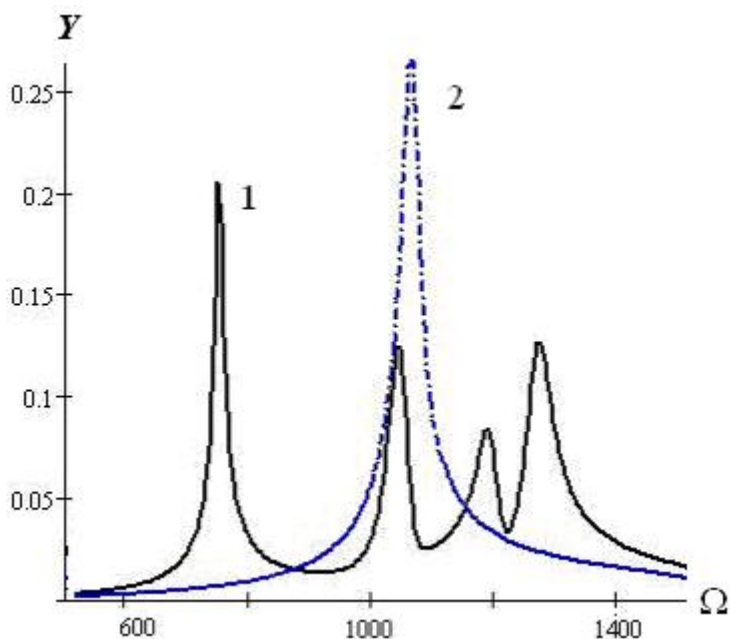


Рис.3. Трансформация АЧХ при  $\Pi' = \Pi'_{\max}$  (кривая 1) и  $\Pi' = 0$  (кривая 2)

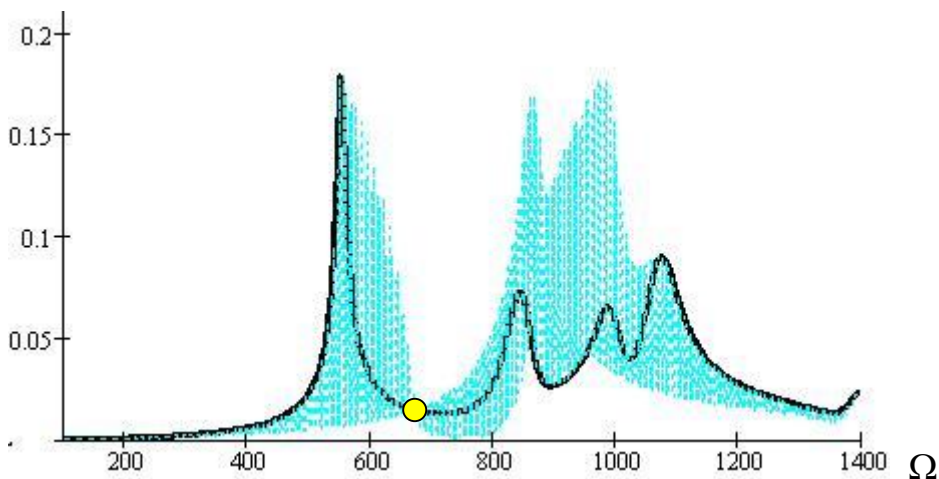


Рис.4. Области повышенной виброактивности

На рис.4 выделённая кривая отвечает  $\Pi'_{\max}$ , которая при  $\Omega < p_*$  служит нижней границей области, а при  $\Omega > p_*$  – верхней. Представляет интерес точка пересечения, в которой амплитуды не зависят от  $\Pi'$ , а, следовательно, система теряет свои реономные свойства.

**Влияние диссипации.** Выше были приведены АЧХ при учёте малой диссипации. Сопоставим эти характеристики с аналогичными АЧХ, полученными без учёта диссипации при  $n=5$  (рис.2).

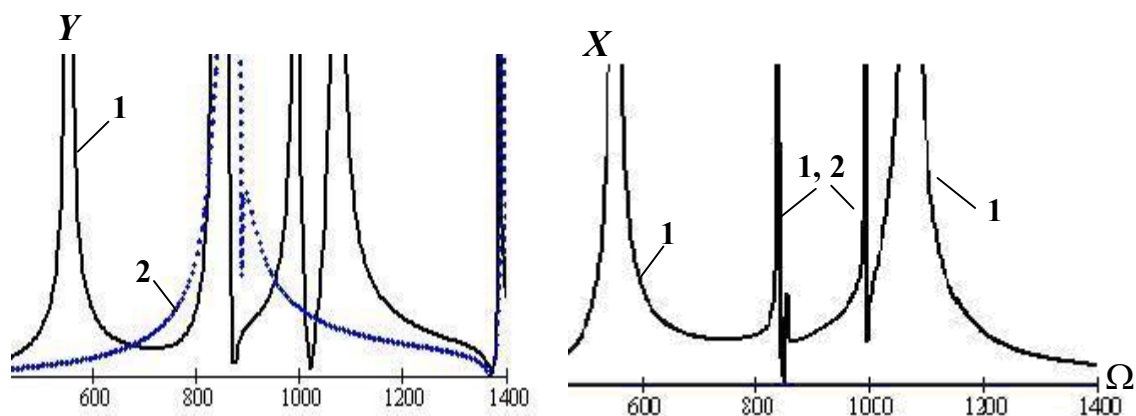


Рис.5. АЧХ при отсутствии диссипации: 1 –  $\Pi' = \Pi'_{\max}$ ; 2 –  $\Pi' = 0$ .

Помимо естественного неограниченного возрастания амплитуд в резонансном режиме при отсутствии диссипации резко сужаются резонансные зоны, а на высших частотах появляются резонансы, которые при диссипации оказываются полностью подавленными (см., например,  $\Omega \approx 1400\text{c}^{-1}$ ). Это наглядно видно при анализе определителя системы уравнений (6)  $\Delta(\Omega)$ , которому обратно пропорциональны амплитуды вынужденных колебаний (рис.6).

При отсутствии диссипации и  $0 \leq \Pi' \leq \Pi'_{\max}$  (в предположении «замороженных» коэффициентов) резонансным зона отвечают частотные диапазоны, пересекающие ось абсцисс (рис.6,а). Однако даже при малой диссипации ( $\delta = 0,03$ ), формы, соответствующие высшим частотам, практически оказываются вырожденными (рис.6,б). Аналогичные выводы при анализе влияния диссипации в цепочках приведены в [6].

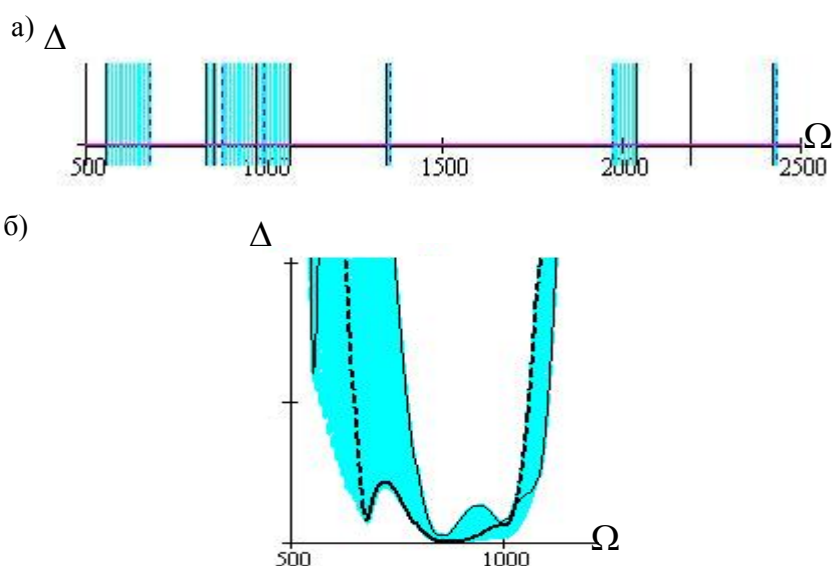


Рис.6 . К анализу частотных спектров при учёте диссипации

На первый взгляд, уменьшение резонансной зоны можно рассматривать как положительный фактор, так как возможно более быстрое пересечение этой зоны. Следует, однако, принимать во внимание, что при медленном изменении параметров имеет место «плавающий» характер «собственных» частот, при котором в зоне сгущения спектра образуются целые области повышенной виброактивности. Это может привести и к нежелательным эффектам типа биений со значительной амплитудной модуляцией.

**Анализ фазо-частотных характеристик (ФЧХ).** На рис.7 приведены фазо-частотные характеристики  $\gamma(\Omega)$  при  $n=2; 4; 5$  (кривые 1, 2, 3) и  $\Pi' = \Pi'_{\max}$ . Функция  $\gamma(\Omega)$  определяется как аргумент комплексных амплитуд  $\bar{X}(\Omega), \bar{Y}(\Omega)$ .

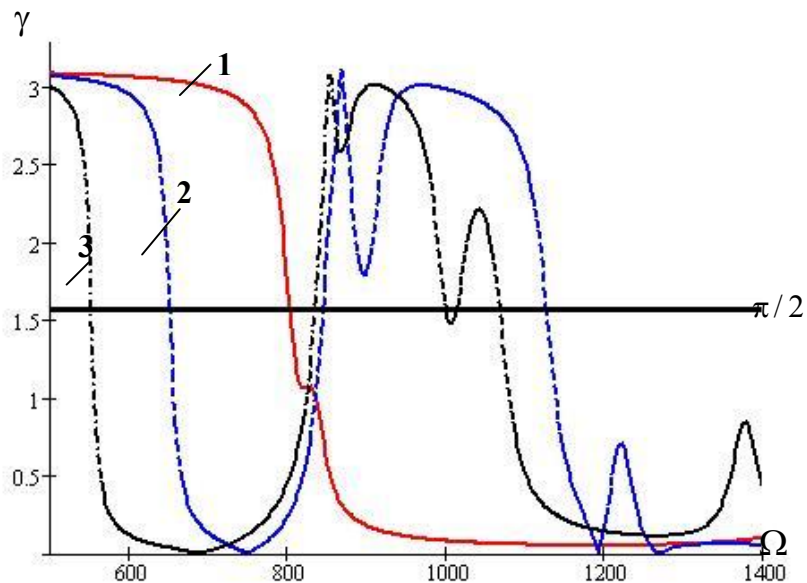


Рис.7. Фазо-частотные характеристики

Как известно, работа, совершаемая при гармоническом возбуждении, пропорциональна  $\sin \gamma$ , поэтому уровень колебаний зависит от близости фазового сдвига  $\gamma$  к значению  $\pi/2$ . На графиках видно, что на высших частотах при учёте диссипации  $\gamma$  значительно ниже этого значения, поэтому резонанс, по существу оказывается подавленным (см. рис.5). При отсутствии диссипации на этих частотах ФЧХ пересекает прямую  $\pi/2$ , что находит отражение АЧХ исполнительного органа.

Для иллюстрации влияния переменности параметров на величину и расположение частотных диапазонов с повышенным амплитудным уровнем на рис.8 построены графики ФЧХ при  $n=5$  и изменении с малым шагом первой передаточной функции  $0 \leq \Pi' \leq \Pi'_{\max}$ .



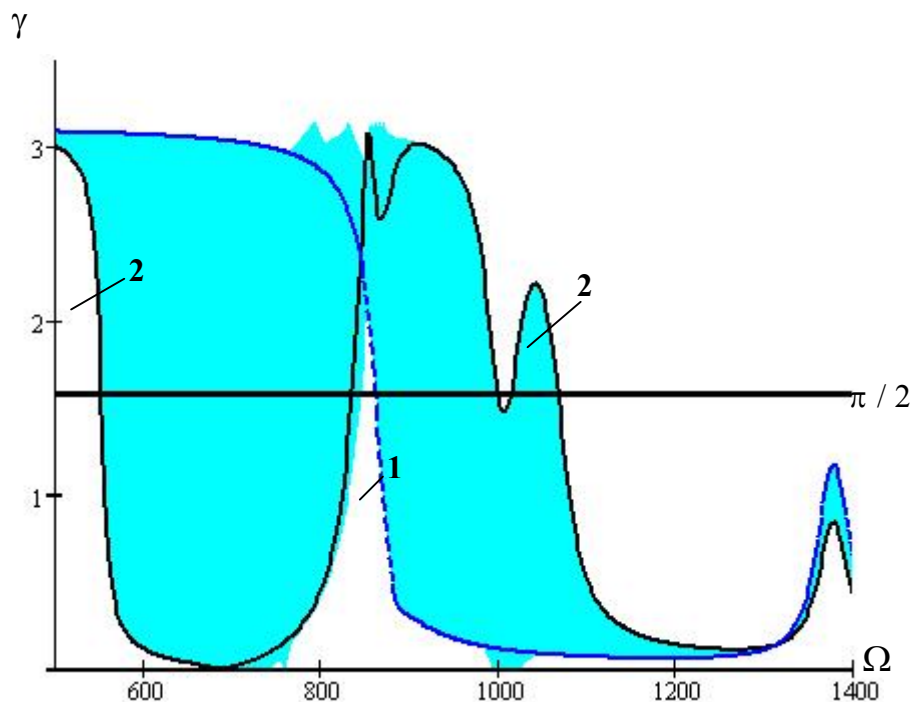


Рис.8. К анализу фазо-частотных характеристик при переменных параметрах

На графиках выявились области, в которых в каждый момент времени происходит пересечение ФЧХ с прямой  $\pi/2$ . Разумеется, это является лишь косвенным свидетельством возможности возникновения больших амплитуд, поскольку возбуждение резонансных колебаний происходит не мгновенно, и реализация этой возможности зависит от скорости перехода через выявленный частотный диапазон. Однако, при достаточно большой протяжённости этих областей можно ожидать повышенную виброактивность системы.

Формы резонансных колебаний в первом приближении соответствует формам свободных колебаний, анализ которых приведён в работе [4]. Однако здесь также следует иметь в виду нестационарный характер форм и возможность «перескока» с одной формы на другую.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вульфсон И.И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени. // Прикладная математика и механика. 1969. Т.33, №2. С. 331–337
2. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 306 с.
3. Vulfson I. Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives. Hemisphere Publ. Corpor.: New York, Washington, London, 1989. – 99 p.
4. Вульфсон И.И. Об одной модификации обобщённой динамической модели многосвязных регулярных колебательных систем цикловых машин. // Проблемы машиностроения и надёжности машин. №5, 2011. С.3–10.
5. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций. М.:Госстройиздат, 1958.-325 с.
6. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. – М.: Наука, 1997. – 496с.

Поступила: 14.11.11.