

УДК 539.4

**ОСРЕДНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОИСКЕ ТРАЕКТОРИИ ТРЕЩИНЫ**© Юрий Григорьевич Матвиенко<sup>1</sup>, Михаил Александрович Бубнов<sup>1</sup>,Григорий Ильич Нестеренко<sup>2</sup><sup>1</sup> Учреждение Российской академии наук Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия<sup>2</sup> ФГУП «ЦАГИ», Жуковский, Россия[matvienko7@yahoo.com](mailto:matvienko7@yahoo.com)

**Аннотация.** Сформулирован локальный критерий направления роста трещины на основе принципа осреднения напряжений в зоне процесса разрушения у вершины трещины и критерия максимальных осредненных напряжений. Для малых углов направления роста трещины предложенный критерий обеспечивает лучшую сходимость с экспериментальными данными, чем традиционный критерий максимальных тангенциальных напряжений.

**Ключевые слова:** осреднение напряжений, трещина смешанного типа, траектория трещины.

В современных условиях одной из наиболее важных проблем в авиации является проблема одновременного обеспечения больших ресурсов, безопасной эксплуатации и экономической эффективности конструкции пассажирских самолетов. Решение этой сложной комплексной проблемы осуществляется за счет обеспечения эксплуатационной живучести конструкций летательных аппаратов. Одним из аспектов оценки живучести конструкции с трещиной является определение траектории трещины под действием приложенных нагрузок. Зная траекторию трещины под действием эксплуатационных нагрузок, можно произвести ее торможение установкой подкрепляющих элементов. По этой причине исследование поворота трещин, критериальных характеристик их распространения, моделирование распространения с учетом конструктивно-силовых факторов является актуальной задачей.

В анализе траектории трещины существует два принципиально различающихся подхода, а, именно, локальный и глобальный. Локальные подходы основаны на локальных критериях разрушения материала непосредственно в окрестности вершины трещины и позволяют определять начальное направление роста трещины, в то время как глобальные подходы дают полную траекторию трещины. Среди локальных критериев следует отметить критерии максимальных тангенциальных напряжений, минимальной плотности энергии деформации, максимальной скорости освобождения энергии и др. [1]. Особенностью локальных критериев направления роста трещины является необходимость учета изменения напряженно-деформированного состояния в вершине трещины в связи с ее некоторым приростом, приводящем к изменению ориентации трещины. Глобальный критерий

направления трещины может быть основан на рассмотрении движения вершины трещины как материальной частицы определенной массы и применении вариационного принципа для анализа движения этой частицы [2]. Одна из важных проблем вариационного принципа заключается в выборе весовой функции, зависящей от напряженно-деформированного состояния тела без трещины. Следует отметить, что известные весовые функции в рамках поставленных задач были выбраны чисто интуитивно.

В настоящей статье локальный критерий направления роста трещины сформулирован на основе принципа осреднения напряжений в зоне процесса разрушения у вершины трещины и критерия максимальных осредненных напряжений.

Идея осреднения резко возрастающего напряжения перед вершиной выреза (трещины) на протяжении отрезка некоторой длины с последующим сопоставлением полученного усредненного напряжения с предельной прочностью материала была высказана более 100 лет назад К. Вигхардом при решении задачи теории упругости для плоскости, содержащей острый угловой вырез. Спустя полвека Г. Нейбер, анализируя высокую концентрацию у надрезов, предложил проводить осреднение напряжений в зоне пластического течения материала («пластической частицы Нейбера»). Анализ деталей деформирования и разрушения материала у вершины трещины привел В.В. Новожилова к подобному критерию осреднения напряжений [3]. Критерии осреднения напряжений оказались весьма эффективными в задачах механики разрушения [4-8].

Запишем двухчленное выражение для тангенциальных напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  у вершины трещины смешанного типа (I+II) [9]

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) + T \sin^2 \theta \quad (1)$$

Здесь  $r$  и  $\theta$  - координаты точки в полярной системе координат, расположенной в плоскости перпендикулярно фронту трещины,  $K_I$  - коэффициент интенсивности напряжений трещины нормального отрыва,  $K_{II}$  - коэффициент интенсивности напряжений трещины поперечного сдвига.  $T$  - напряжение является второй несингулярной компонентой двумерного поля напряжений у фронта трещины, действующей в направлении оси  $x$  и характеризующей стеснение деформаций в направлении указанной оси. Знак и величина  $T$  - напряжений оказывают значительное влияние на форму и размер зоны пластической деформации; трещиностойкость образцов, различающихся геометрией, схемой нагружения и размером трещины; траекторию распространения трещины.  $T$  - напряжения могут быть растягивающими или сжимающими [1, 10-12]. Положительные  $T$  - напряжения повышают степень стеснения деформаций у вершины трещины, а отрицательные приводят к ее понижению.

Запишем критерий максимальных осредненных тангенциальных напряжений у вершины трещины

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0. \quad (2)$$

Осреднение тангенциальных напряжений (1) дает следующее соотношение

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_{\theta\theta}(r) dr = \sqrt{\frac{2}{\pi d}} \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) + T \sin^2 \theta, \quad (3)$$

приводящее к модифицированному критерию направления роста трещины в виде максимальных осредненных тангенциальных напряжений

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial \theta} = K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{8T}{3} \sqrt{2\pi d} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0 \quad (4)$$

Условие по второй производной дает следующий результат

$$\frac{\partial^2 \bar{\sigma}_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} = K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} \cos \theta_0 - 3K_{II} \sqrt{\frac{2}{\pi d}} \sin \theta_0 + \frac{16T}{3} \left( \sin \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta_0 \cos \frac{\theta_0}{2} \right) < 0, \quad (5)$$

которое для удобства перепишем в виде

$$\operatorname{tg} \theta_0 < \frac{K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} - \frac{8T}{3} \cos \frac{\theta_0}{2}}{3K_{II} \sqrt{\frac{2}{\pi d}} - \frac{16T}{3} \sin \frac{\theta_0}{2}}. \quad (6)$$

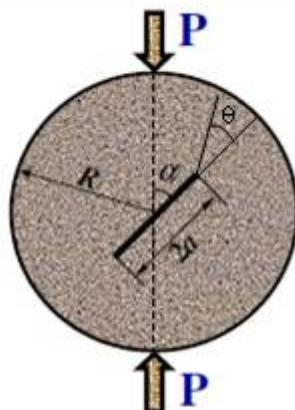
Размер зоны процесса разрушения у вершины трещины определяется формулой [4] и предполагается постоянной величиной

$$d = \frac{2}{\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_0} \right)^2, \quad (7)$$

где  $\sigma_0$  - предельные локальные напряжения, действующие в зоне процесса разрушения,  $K_{IC}$  - вязкость разрушения.

Проиллюстрируем использование модифицированного критерия направления роста трещины (4) при определении угла  $\theta_0$  направления распространения трещины в дискообразном образце с наклонной трещиной в условиях сжатия (рис. 1). Материал образца – известняк со следующими механическими характеристиками:  $\sigma_0 = 2$  МПа,  $K_{IC} = 0.24$  МПа $\sqrt{\text{м}}$  [12]. Для количественной оценки комбинированного нагружения при совместной реализации нормального отрыва (тип I) и поперечного сдвига (тип II) используем, так называемый, параметр смешанности типов нагружения  $M_e$

$$M_e = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right). \quad (8)$$



**Рис.1.** Схема нагружения дискообразного образца с наклонной трещиной.

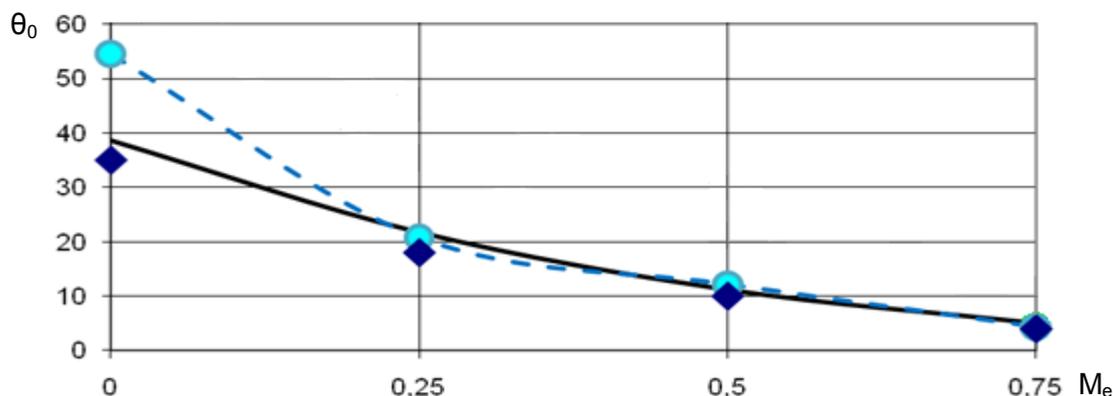
Значение упругого параметра  $M_e = 1$  соответствует трещине нормального отрыва. Коэффициенты интенсивности напряжений, параметры  $M_e$  и соответствующие  $T$ -напряжения трещины смешанного типа (тип I+II) приведены в табл. 1 [12].

На рис. 2 приведено сопоставление экспериментальных данных с результатами прогнозирования угла распространения трещины смешанного типа в соответствие с предложенным критерием максимальных осредненных тангенциальных напряжений (4) и известным критерием максимальных тангенциальных напряжений вида [1]

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{16T}{3} \sqrt{2\pi d} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0 \quad (9)$$

**Таблица 1.** Параметры трещины смешанного типа (тип I+II)

$M_e$	0,75	0,5	0,25	0
$K_I, \text{МПа}\sqrt{\text{м}}$	0,1723	0,143	0,0976	0
$K_{II}, \text{МПа}\sqrt{\text{м}}$	0,058	0,143	0,2322	0,2821
$T, \text{МПа}$	-4,34	-3,72	-3,59	-1,23



**Рис.2.** Зависимость угла направления роста трещины от параметра смешанности типов нагружения: ♦ - экспериментальные точки, пунктирная линия (●) - зависимость (4), сплошная линия – зависимость (9).

Как видно из приведенных результатов (рис. 2), предложенный критерий (4) позволяет с высокой степенью достоверности прогнозировать направление роста трещины смешанного типа (I+II). Вместе с тем, условие по второй производной (6) ограничивает корректность определения углов направления распространения трещины неравенством  $\theta_0 \leq 90^\circ$ , что подтверждается результатом определения угла поворота трещины при  $M_e = 0$ . Для малых углов направления роста трещины предложенный критерий (4) обеспечивает несколько лучшую сходимость с экспериментальными данными, чем традиционный критерий максимальных тангенциальных напряжений. Следует также отметить более существенное изменение траектории трещины при стремлении T-напряжений к положительным значениям (табл. 1, рис. 2).

Таким образом, концепция осреднения напряжений у вершины трещины оказалась весьма эффективной и при поиске траектории трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-08-00393-а).

### Литература

1. Shahani A.R., Tabatabaei S.A.. Effect of T-stress on the fracture of a four point bend specimen// Materials and design. - 2009. - Vol. 30. - P.2630-2635.
2. Партон В.З., Морозов Е.М. Упругопластическая механика разрушения. - М.: Наука, 1985.- 503 с.
3. Новожилов В.В. К основам теории равновесных трещин в хрупких телах// Прикладная математика и механика. - 1969. - Т. 33, № 5. - С.797-812.
4. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 328 с.
5. Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. Избранные нелинейные задачи механики разрушения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 408 с.
6. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. - М.: Наука, 1984. – 256 с.

7. Петров Ю.В. Квантовая макромеханика динамического разрушения твердых тел. - Препринт № 139. СПб.: Институт проблем машиноведения РАН, 1996. – 51 с.
8. Матвиенко Ю.Г. Критерий осреднения напряжений В.В. Новожилова и диаграммы трещиностойкости// Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. - 2010. - Вып. 53.1 (337). - С. 93-98.
9. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack// Journal of Applied mechanics. - 1957. - Vol. 24. - P. 109-114.
10. Hallback N, Jonsson N. T-stress evaluations of mixed mode I/II fracture specimens and T-effect on mixed mode failure of aluminium. //International Journal of Fracture. - 1996. - Vol. 76. - P. 141–68.
11. Sladek J., Sladek V., Fedelinski P. Contour integrals for mixed mode crack analysis: effect of non singular terms// Theoretical and Applied Fracture Mechanics. - 1997. - Vol. 27. - P.115–27.
12. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Smith D.J., Pavier M.J. Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading// Engineering Fracture Mechanics. - 2010. - Vol. 7. - P.2200-2212.

*Поступила: 17.10.11.*