УДК 534

К РАСЧСЕТУ ОБЛАСТЕЙ ПРОЗРАЧНОСТИ И НЕПРОЗРАЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ВИБРОВОДОВ С ТОЧЕЧНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© Виталий Львович Крупенин

Учреждение Российской академии наук институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

krupenin@online.ru

Аннотация. *Рассмотрены линейные вибропроводящие среды простой структуры (прямые стержни с массивными точечными включениями), по которым могут распространяться линейные волны. Строится методика аналитического анализа таких систем. Устанавливается модельная аналогия «механизм виброударного действия» - вибровод. Имена эта аналогия и позволила применить методы частотно-временного анализа к расчету линейной вибропроводящей коенструкциии.*

Ключевые слова: *вибропроводящая среда (вибровод),распространение волн, бесконечный стержень, параметрический резонанс, динамическая диаграмма, прозрачность и не прозрачность вибровода.*

1. Распространение вибрации в элементах машинных конструкций осуществляется в частности, при посредстве упругих волн, распространяющихся в телах, прнедставляющих собой составные конструкции.

Одной из распространенных типов моделей таких конструкций являются прямые тонкие стерни с включениями в виде массивных точечных тел. На рис.1 показан простейший пример такой системы – бесконечный стержень с регулярными точечными включениями.

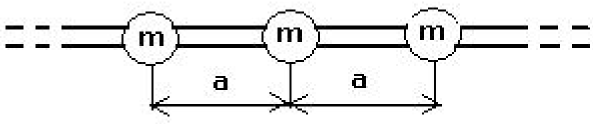

Рис.1

При этом число a – расстояние между соседними включениями. В общим случае наличия N типов точечных включений, в линейном приближении соответствующие уравнения движения могут иметь вид m_j

$$\rho u_{tt} - Eu_{xx} = -\left[\sum_{j=1}^{N-1} \delta^{a}(j;x)\, m_j\right] u_{tt}, \tag{1}$$

причем u искомое поле перемещений и предполагается, что структура системы - регулярная. Введены обозначения: $\delta^a(j;\ x)$ – a –периодические последовательности δ – Дирака, определяемы как [1, 2]

$$\delta^a(j;x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\,(x - na_j), \tag{2}$$

где индексы j нумеруют серии точечных включений с массами m_j. Символами ρ и E обозначены погонная плотность и модуль Юнга материала стержня; предполагается, единицы измерения выбраны так, что площадь его поперечного сечения - единичная.

Полагая распространяющуюся вибрацию синусоидальной с частотой ω, отыскивая решения в виде

$$u(x,t)=A(x)\exp(i\omega t), \qquad (3)$$

после подстановки (3) в (1), приходим к уравнению вида:

$$A'' + \Omega^2 A + \mu\, \Sigma\delta^a(j;\, x)\, m_j A=0, \qquad (4)$$

где обозначено: $\Omega^2 =\omega^2 c^{-2};\ c^2 =E\rho^{-1};\mu=m\ \omega^2 E^{-1}$, а суммирование ведется по всем j.

При этом предполагается, что функция

$$C(x)= \Sigma\delta^a(j;\, x)m_j= \sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N-1} c_k\delta(x-x_k - qD), \qquad (5)$$

Где $0=x_1<x_2<\ldots\ldots<x_n=D$. Число D –“пространственный период” виброводa.

2.Рассмотрим уравнение (4). При замене $x \to t$ имеем уравнение с периодическими коэффициентами. Отметим, что общая теория линейных параметрических систем , изложенная, например, в [3] предполагает большую гладкость периодических коэффициентов уравнения. Нижеследующие выкладки следует рассматривать, как формальное обобщение этой теории на системы с коэффициентами импульсного типа.

Известно [4], что рассматриваемые виброводы при некоторых значениях параметров “закрываются” и вибрация рассеивается на неоднородностях, а при некоторых - “открываются“и вибрация свободно проходит. Этот эффект связан с появлением в системе дисперсии, приводящей, в частности, к сильной связанности двух бегущих по виброводу навстречу друг другу волн. Известно также, что запертому виброводу отвечают зоны параметрической неустойчивости, а прозрачному – устойчивости. При переходе от одного состояния к другому наблюдаются периодические решения.

Займемся вначале отысканием этих «пограничных» периодических режимов. Пусть D-периодическая функция Грина (ПФГ) стационарной системы [1, 2]

$$F(x)=D^{-1}\sum_{q=1}^{\infty} L(ik\,{}^{2\pi}\!/_{D})\exp(ikx\,{}^{2\pi}\!/_{D})=[2\Omega\sin({}^{1}\!/_{2}\Omega D)]^{-1}\cos\Omega(x-D/2). \qquad (6)$$

Здесь L(p) – оператор системы, с учетом того обстоятельства, что независимая переменная –суть координата x, $p\equiv d/dx$.

При этом в первом равенстве суммирование осуществляется по всем целым числам q, а последнее равенство имеет место только на интервале периодичности [0,D]. Если переменная x оказывается вне этого интервала, то данное конечное соотношение – модифицируется [1, 2]. Тогда будем иметь:

$$A(x)=\mu\int_0^D F(t-s)\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N-1} c_k\delta(x-x_k-qD)A(s)ds=\mu\sum_{k=1}^{N-1} c_k\, F(x- x_k)A(x_k). \qquad (7)$$

Последовательно полагая здесь $x=x_j$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно $A(x_j)$:

$$A(x_j)=\mu\sum_{k=1}^{N-1} c_k F(x_j-x_k)A(x_k);\ j=1,\ldots\ldots,N-1 \qquad (8)$$

Так что нетривиальные периодические режимы будут существовать тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Det}[X_{l,m}]=0 \qquad l,m=1,2,\ldots\ldots N-1 \qquad (9)$$

$$X_{l,m}=\mu\, c_m F(x_l-x_m),\ l\neq m;\quad X_{l,l}=1-\mu\, c_l F(0) \qquad (10)$$

3. В соответствии с общей теорией произвольное решение уравнения (4) будем искать в виде $A(x)=\exp(\lambda x)Y(x)$, где $Y(x)=Y(x+D)$, а λ - характеристический показатель. Если действительная часть всех показателей будет отрицательна, то вибровод будет прозрачен (соответствующая линейная параметрическая система оказывается устойчивой).

Выкладки, приводящие к характеристическому уравнению

$$\mathrm{Det}[X_{l,m}(\lambda)]=0 \qquad l,m=1,2,\ldots\ldots N-1$$

совершенно аналогичны, приведенным в п.2.

Ограничимся для наглядности случаем, показанным на рис.1, когда в вибороводе используются включения только одного типа.

С учетом сделанных замен, используя методы частотно-временного анализа и проделанные в [1, 2] вычисления получаем условия непрозрачности вибровода:

$$\mu_0/2\Omega > -tg\pi\Omega/\omega_\alpha.>0;\ \mu_0/2\Omega > ctg\pi\Omega/\omega_\alpha.>0;\ \omega_\alpha=2\pi/a. \qquad (11)$$

Динамическая диаграмма вибровода показана на рис.2..Здесь заштрихованным зонам отвечают состояния закрытия вибровода (или с учетом введенных обозначений – зоны параметрического резонанса соответствующей системы с переменными коэффициентами).

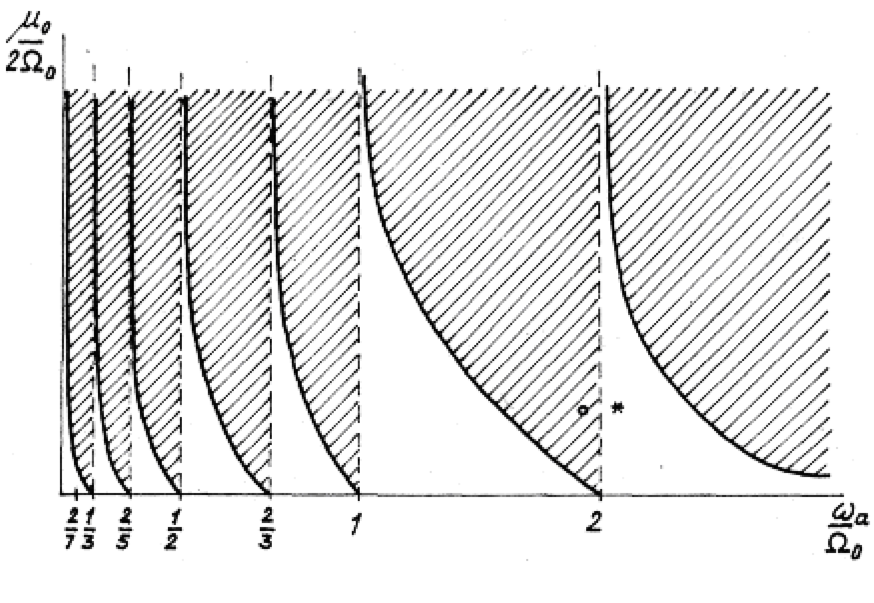

Рис.2

Структура зон диаграммы демонстрирует, что вблизи прямых

$$\omega_\alpha/\Omega=2/(2\kappa+1)\ ;\ \omega_\alpha/\Omega=1/\kappa \qquad (12)$$

хождение вибрации отличается существенной нестабильностью: малое измение значений параметров может вызвать качественные изменения процесса.
Например, при переходе от точки «0» к близкой точке «*» запертый вибровод «внезапно» открывается. Таким образом, данная система эффективно задерживает вибрацию только тогдп, когда ее определяющие параметры «лежат глубоко» внутри заштрихованных зон диаграммы.

Работа выполнена при поддержки РФФИ (проект№ 10—08-00500).

Литература

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.
2. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
3. Якубович В. А, Старжинский В. М. Ленийные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.Наука, 1972 -718 с.
4. Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. – 296 с.

Поступила: 03.10.11.