

УДК 534.1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ЧЕРЕЗ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДВИЖЕНИЯ «ИМПУЛЬС – ФАЗА»

(Часть II: Приложение. Расчет балочных и трубчатых конструкций)

© **Виталий Львович Крупенин**

Учреждение Российской академии наук институт машиноведения РАН
им. А.А. Благонравова
krupenin@online.ru

Аннотация. Продолжен начатый ранее обзор результатов исследования периодических виброударных систем различной природы и структуры посредством методов частотно-временного анализа. Показано, что определяющими факторами, описывающими виброударные процессы, оказываются параметры так или иначе, связанные с физическими параметрами движения -здесь импульсами ударов и их моментами, отсчитываемыми от некоторого начала измерения времени (фазы удара). При этом указанные параметры могут иметь весьма сложную структуру, определяемую физическими и геометрическими факторами, а также внутренним строением соударяющихся подсистем.

Ключевые слова: виброударные процессы, многопараметрические представления, импульсы и фазы ударов, периодические функции Грина (ПФГ), балки и трубы, соударяющиеся с промежуточными опорами, усреднение ПФГ.

1. Продолжим рассмотрения, начатые в работе [1]. Локальная цель – исследование системы, модель которой дана на рис.1.

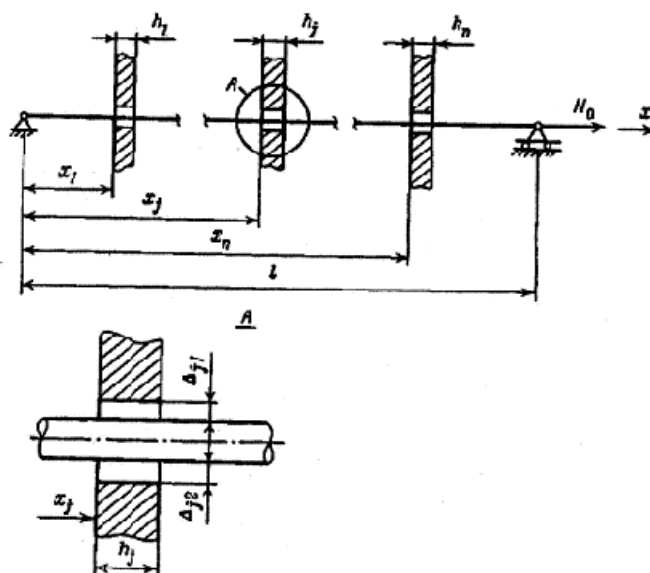


Рис.1

Шарнирно закрепленный стержень может при совершении колебаний в плоскости чертежа соударяться с n плоскими протяженными ограничителями ширины $h_j (j=1, 2, \dots, n)$. Параметры системы: длина стержня – $l \gg h_j$, растягивающее усилие N_0 , жесткость и погонная масса стержня K и ρ ; установочные зазоры $\Delta_{j1,2}$ координаты начал

ограничителей - x_j концов - $x_j + h_j$. Будем рассматривать симметричную систему ($\Delta_{j1} = \Delta_{j2} \equiv \Delta_j$)

Предполагая, что малая диссипация учитывается только при ударах и мал уровень возбуждения, запишем уравнение движения в предположениях, что стержень моделируется балкой Бернулли

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} + Ku_{xx} - N_0 u_{xx} + \Phi_1^*(u, u_t) &= \varepsilon [P(x, t) - \Phi_2^*(u, u_t)], \\ u(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь граничные условия отвечают свободному опиранию; ε - малый параметр ($h_j \sim \varepsilon$); $P(x, t) = -P(x, t + T/2) - T$ - периодическое возбуждение, предполагаемое симметричным; Φ_1^* и $\varepsilon\Phi_2^*$ - упругая и малая диссипативные составляющие плотности силы ударного воздействия. Появление малого параметра в правой части говорит о том, что исследоваться будут колебания, близкие к собственным.

Здесь необходимо сделать важное замечание, касающееся моделей виброударных систем с распределенными ударными элементами.

Модель балки Бернулли обладает аномальной дисперсией (фазовая скорость распространяющейся волны меньше групповой). Поэтому иногда говорят, что эта модель - «не волновая». Поэтому, например, реакция такой системы на мгновенное силовое воздействие, сосредоточенное в одной точке (скажем, $x=a$) $\delta(t)\delta(x-a)$. По этой причине построить при помощи методов частотно-временного анализа корректное непрерывное решение - невозможно: определяющие соответствующее многопараметрическое представление [1] ПФГ будут разрывными. Здесь, памятуя, что речь идет о достаточно формальных модельных проблемах возможно использование альтернативных моделей. Одна из них использует принятую в сопромате, строго говоря не корректную, «гипотезу пластического шарнира» (остроумное предложение А. М. Веприка), другая - использовать модель балки Тимошенко [2]. В этом случае решения будут непрерывными, но не всегда легко интерпретируемыми из-за громоздкости модели.

Мы используем здесь модель другого типа, учитывающая конечность протяженности площадок действия ударной силы (рис. 1).

2. Плотность ударных сил, действующих при $x \in [x_k, x_k + h_k]$, записывается через плотность ударного импульса ($I(x)$) и распределение фазы ($\varphi(x)$) [1, 3]

$$\Phi_1^*(u, u_t) + \varepsilon\Phi_2^*(u, u_t) = \sum_{k=1}^n I(x) \delta^{T/2}[t - \varphi(x)] \{\eta(x_k) - \eta(x_k + h_k)\}, \quad (2)$$

где η — функция Хевисайда; симметричная T — периодическая последовательность δ -функций Дирака [1, 3];

$$\delta^{T/2}(t) = \delta^T(t) - \delta^T(t - 1/2T) = 2T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[i(2k+1)\omega t].$$

Для искомого поля перемещений имеет место интегральное представление [1, 3], являющееся аналогом $2n$ -параметрического представления [1]

$$u(x, t) = \varepsilon u^0(x, t) - \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_k+h_k} \chi^*[x, z, t - \varphi_k(z)] I_k(z) dz, \quad (3)$$

где εu^0 — решение соответствующей линейной задачи; I_k, φ_k — плотность импульса и распределения фазы для k - пары в решетке.

Симметричная ПФГ балки при $0 \leq t \leq 1/2T$ имеет вид [4]

$$\chi^*(x, z, t) = (\rho l)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_n \cos 1/4 \Omega_n T]^{-1} \sin \pi n z l^{-1} \sin \pi n x l^{-1} \sin \Omega_n (t - 1/4 T) \quad (4)$$

и отвечает оператору, действующему из точки z в точку x . Собственные частоты линейной системы $\Omega_n = (\pi^4 n^4 l^{-4} K \rho^{-1} + \pi^2 n^2 l^{-2} N_d \rho^{-1})^{1/2}$. Вне отрезка $[0, 1/2T]$ функция (4) продолжается на всю ось по периодичности, исходя из условий симметрии $\chi^*(x, z, t + 1/2T) = -\chi^*(x, z, t)$.

Воспользуемся малостью величин h_k . Волновые процессы в самом ударном элементе оказывают на режим слабое влияние и вместо (3) можно перейти к $2n$ -параметрическому представлению вида

$$u(x, t) = \varepsilon u^0(x, t) - \sum_{k=1}^n J_k \bar{\chi}^*(x, x_k; h_k; t - \varphi_k), \quad (5)$$

где фигурирует полный импульс в k -й паре

$$J_k = \int_{x_k}^{x_k+h_k} I_k(z) dz = \text{const}(x).$$

В формулу (5) входит усредненная ПФГ

$$\bar{\chi}^*(x, x_k; h_k; t) = h_k^{-1} \int_{x_k}^{x_k+h_k} \chi^*(x, z, t) dz. \quad (6)$$

Подставляя (4) в (6), после интегрирования имеем

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^*(x, x_k; h_k; t) &= \\ &= -\frac{2}{\pi \rho h_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x l^{-1} \sin \pi n \left(x + \frac{1}{2} h_k\right) l^{-1} \sin \frac{1}{2} \pi n h_k l^{-1} \sin \Omega_n \left(t - \frac{1}{4} T\right)}{n \Omega_n \cos 1/4 \Omega_n T}. \end{aligned} \quad (7)$$

Представление (21) вполне аналогично (6). Оно предполагает, что масса приведенного точечного контактирующего тела $m_k = \rho h_k$, а импульс, $J_k = m_k(I + R_k)u_t(x_k, 0)$, где $R_k = I - r_k$ — коэффициент восстановления в k -й паре. Используя (3), можно получить определяющую систему уравнений, подобную (8), (9). Для получения более просто интерпретируемых решений найдем в консервативном случае ($\varepsilon = 0$) одночастотный периодический режим. Затем, предположив, что на резонансе режим движения приближенно отвечает консервативному решению, найдем условие существования резонансных режимов, исходя из принципа энергетического баланса, в соответствии с

которым на периодическом движении балансируются работы неконсервативных сил — возбуждения и диссипации [4].

Положив $\varepsilon=0$, для свободных колебаний некоторого периода T_0 , ограничиваясь рассмотрением синфазных хлопков и совместив одновременные удары о правые ограничители с началом отсчета времени, найдем:

$$\Delta_j = - \sum_{k=1}^n J_k \bar{\chi}_k^* (x_j, x_k; h_k; 0), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

$$J_k = -2\rho h_k \sum_{k=1}^n J_k \bar{\chi}_k^* (x_j, x_k; h_k; -0). \quad (9)$$

Можно показать, что с принятой точностью соотношения (9) удовлетворяются, а решения линейной алгебраической системы (4) полностью определяют представление

$$u = u^* (x, t) = - \sum_{k=1}^n J_k \bar{\chi}_k^* (x, x_k; h_k; 0), \quad \varepsilon = 0. \quad (10)$$

Следует отметить, что при получении решений консервативной задачи период усредненной ПФГ T_0 , вообще говоря не равен периоду T . В консервативном случае период T_0 есть функция величин J_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Далее, при изучении одночастотных резонансных режимов будем предполагать, что $T = T_0$.

3. Рассмотрим трехпролетную трубку ($n=2$), которую корректно моделировать посредством балки Бернулли. Положим $h_1=h_2=h$, $\Delta_1=\Delta_2=\Delta$, x_2-l-x_1-h . Разрешая систему (24) и обозначая частоту свободных колебаний ω_0 ($\omega_0 = 2\pi T_0^{-1}$), с учетом (23) находим $J_1=J_2=J$, где

$$J = \frac{1}{4} \pi \rho \Delta h \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(2j-1)x_1 l^{-1} \sin \frac{1}{2} \pi(2j-1)h l^{-1} \sin \left[\pi(2j-1)l^{-1} \left(x_1 + \frac{h}{2} \right) \right]}{(2j-1) \Omega_{2j-1} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Omega_{2j-1} \pi \omega_0^{-1}} \right\}^{-1}.$$

Это вместе с (10) и (7) полностью описывает режимы в консервативной системе. Приравнявая нулю фигурную скобку в последней формуле, можно отыскивать частоты, отвечающие бесконечным импульсам (максимальным энергиям).

Проведем расчеты при следующих геометрических и физических характеристиках трубки: наружный диаметр $D = 16 \cdot 10^{-3}$ м, внутренний диаметр $d = 13 \cdot 10^{-3}$ м, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н·м⁻² (отсюда изгибная жесткость $K = 1/64\pi E (D^4 - d^4) = 363$ Н·м²), длина трубки $l=3$ м, $\rho=kz/m; N_0=4 \cdot 10$ Н, $=2 \cdot 10^{-4}$ м, $h=10^{-2}$ м.

Частотные зоны, в которых формально могут существовать режимы движения типа хлопков, определяются условием $J \geq 0$. Для нахождения границ этих зон необходимо определить частоты, при которых $J = 0$ и $J = \infty$. Расчеты показывают, что одна такая зона существует справа от первой собственной частоты линейной системы и занимает отрезок $[\Omega_1; 1,27\Omega_1]$. Расчеты были выполнены численно. Учитывали 20 членов ряда (27). Сходимость контролировали численно. Наряду с этой зоной были найдены другие,

оказавшиеся весьма узкими, и их рассмотрение не имеет практического смысла. Данное замечание находится в согласии с экспериментом [5].

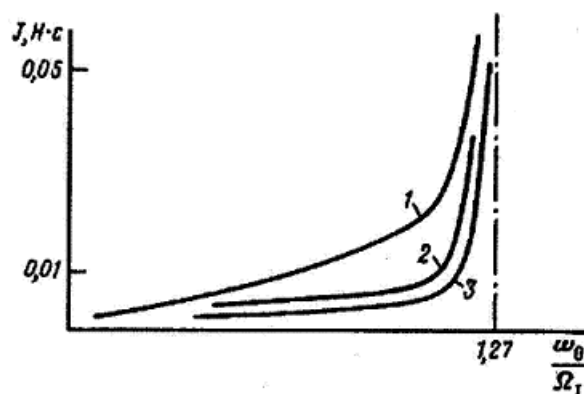


Рис.3

Ограничиваясь экспериментально наблюдаемыми хлопками — режимами, устанавливающимися справа от первой собственной частоты линейной системы, можно получить зависимости, показанные на рис. 2 (кривая 1 отвечает случаю $x_1=0,7$; 2 — 0,85; 3 — 1).

Пусть в (1) $P(x,t)=P_1 \sin \pi x l^{-1} \cos(\omega t + \varphi)$. Рассмотрим вынужденные резонансные колебания, для осуществления которых необходимо, чтобы частота ω попала в интервал собственных частот $(\Omega_1; 1,27\Omega_1)$ описывать движения при посредстве формулы (10) и найденного представления для величины ударного импульса J (см следующую за (10) формулу). Мы считаем $u(x,t) \approx u^*(x,t) + \dots$ и $\omega \approx \omega_0$. Совместив удар с началом отсчета времени, считаем фазу φ неизвестной. Для ее нахождения воспользуемся принципом энергетического баланса, который в случае n ударных пар принимает вид

$$\int_0^l \int_0^{T/2} P(x,t) u_i^*(x,t) dx dt = \sum_{j=1}^n J_j^2 \frac{1 - R_j}{2\rho h_j (1 + R_j)}, \quad (11)$$

где в левой части помещена работа силы внешнего источника на движении $u^*(x,t)$ ($\omega_0 = \omega$); в правой части — следующее из теоремы Карно выражение для суммарных потерь энергии при ударах (R_j — коэффициент восстановления в j -й паре). Подставляя в (11) выражение для $P(x,t)$ и пользуясь соотношениями для ПФГ, а также представлением (5), после вычислений получим

$$\frac{4P_1 J \omega \sin \frac{\pi h}{2l} \sin \frac{\pi}{l} \left(x_1 + \frac{1}{2} h \right) \sin \varphi}{\pi \rho h (\Omega_1^2 - \omega^2)} = \frac{J^2}{2\rho h} \left(\frac{1 - R_1}{1 + R_1} + \frac{1 - R_2}{1 + R_2} \right).$$

Отсюда определяем два значения фазы и условие существования резонансного режима ($|\sin \varphi| \leq 1$). В рассматриваемом примере трехпролетной трубки для амплитуды внешней силы, потребной для поддержания резонансных колебаний, можно получить оценку ($R_1 = R_2 \equiv R$)

$$P_1 \geq \left| \frac{J(1-R)(1+R)^{-1} \pi (\Omega_1^2 - \omega^2)}{4l\omega \sin \frac{\pi h}{2l} \sin \frac{\pi}{l} \left(x_1 + \frac{h}{2} \right)} \right|.$$

Аналогично могут быть анализироваться и случаи несимметричного одно- и многомерного решетчатого ограничителя, а также некоторые другие типы движений, устанавливающихся подобных системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-08-00500).

Литература

1. В.Л. Крупенин Представление виброударных процессов через определяющие физические параметры движения «импульс – фаза» (часть I)//Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития». www.vntr.ru № 2 (30), 2010 г. – С.44 -53.
2. *Krupenin V.L., Veprik A.M.* Vibroconductors equipped with impact elements and distributed vibroimpact systems // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V.1.Czech Prague: CTU, 1996. P. 229- 234.
3. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 5. С. 13-30.
4. *Babitsky V.I., Krupenin V.L.* Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin.Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001.- 404 p.
5. V. L. Krupenin Vibroimpact processes in systems with the large number impact pairs and distributed impact elements//Вестник научно-технического развития. 2007.№4.С.44-54

Поступила: 15.08.11.