

УДК 621.01

УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЧАСТОТНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ДВУХ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК ОСНОВАНИЯ*

© Борис Александрович Гордеев, Анна Викторовна Леонтьева
Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
Нижний Новгород, Россия
vibro@mts-nn.ru

CONDITIONS OF OCCURRENCE SYNTONIZATION OF TWO ASYNCHRONOUS MOTOR DEPENDING ON BASIS CHARACTERISTICS

© B.A. Gordeyev, A.V. Leontyeva
A.A. Blagonravov Mechanical Engineering Institute. Nizhny Novgorod branch
N.Novgorod, Russia

Аннотация. В работе изучается движение двух асинхронных двигателей с неуравновешенными роторами, установленных на общем вязко-упругом основании. Обнаружен стационарный режим частотной синхронизации. Определены условия возникновения этого режима. Выявлены условия устойчивости режима синхронизации.

Annotation. In article movement of two asynchronous motor with the unbalanced rotors, established on the general is viscous-elastic basis is studied. The stationary mode of syntonization is found out. Conditions of occurrence of this mode are defined. Stability conditions of a mode of synchronization are revealed.

Ключевые слова: частотная синхронизация; метод осреднения; резонанс; второе приближение; стационарный режим; асинхронный двигатель; эксперимент; коэффициент демпфирования.

Key words: syntonization; averaging method; resonance; second approximation; steady-state conditions; asynchronous motor; experiment; damping coefficient.

1. Введение. Явления синхронизации и самосинхронизации неуравновешенных роторов – важные явления механики. Известно, что два или более кинематически и электрически не связанных между собой ротора, установленные на общем подвижном основании и приводимые в движение независимыми асинхронными двигателями, вращаются синхронно – с одинаковыми или кратными средними угловыми скоростями и с определенными взаимными фазами. При этом согласованность вращения роторов возникает, несмотря на различие между их парциальными угловыми скоростями, т.е. теми скоростями, с которыми они вращаются, будучи установленными на неподвижном основании [1-4].

В природе и технике синхронизация встречается довольно часто и играет как положительную, так и отрицательную роль [5]. Одна из причин многих аварий в энергоёмком оборудовании является синхронизация частот вращения роторов, посредством вибрации основания в процессе работы двигателей. Режимы синхронизации возникают произвольно при подходящих параметрах конструкции, такие режимы устойчивы и разрушить их очень сложно. Поэтому задача о выявлении стационарных режимов синхронизации, их устойчивости и своевременное предотвращение отрицательного эффекта

* Работа выполняется при частичной финансовой поддержке Гранта РФФИ № 11-08-97066-Р_Поволжье.

синхронизации в конструкциях со многими источниками вибрации, является одной из важных задач механики и техники [6, 7].

2. Математическая модель. Математическая модель, описывающая движение колебательной системы, представляет систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + k\dot{y} + py - m_1 r_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2) &= 0, \\ I_1 \ddot{\varphi}_1 + H_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) - L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) - m_1 r_1 \ddot{y} \sin \varphi_1 &= 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + H_2(\varphi_2, \dot{\varphi}_2) - L_2(\varphi_2, \dot{\varphi}_2) - m_2 r_2 \ddot{y} \sin \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где y – линейная координата, характеризующая вибрацию фундамента, φ_i – углы

отклонения эксцентриков от оси y , m – масса фундамента, p – коэффициент упругости фундамента, k – коэффициент диссипации основания, m_i – массы эксцентриков первого и второго двигателей, r_i – радиусы инерции эксцентриков (эксцентриситеты), I_i – моменты инерции роторов в отсутствие дисбаланса, $L_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)$ – движущий моменты, $H_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)$ – моменты сил сопротивления вращению роторов. Первое уравнение (1) описывает вынужденные колебания платформы, второе и третье уравнения описывают динамику источников возбуждения, т.е. вращения роторов электродвигателей первого и второго соответственно. В дальнейшем в виду аналогичности уравнений, описывающих вращения роторов будет использоваться индекс, соответствующий данному уравнению. Система (1) автономная с тремя степенями свободы [1-4].

В работах И.И.Блехмана [1-4] найдено решение подобной задачи методом прямого разделения движений. При решении задачи не учитывались особенности работы асинхронных двигателей. В работах изучается и решается задача о синхронизации вибраторов с почти равномерным вращением. Однако в ходе работы асинхронных двигателей, у которых частота вращения ротора крайне чувствительна к нагрузкам, равномерного вращения роторов с одной и той же угловой скоростью может не наблюдаться.

Задача данной работы состоит в том, что на основе математической модели (1), учитывающей диссипацию основания, построить систему более близкую к реальной, учитывающей особенности работы асинхронных электродвигателей. Найти приближенное аналитическое решение полученной системы методом осреднения и проанализировать стационарные режимы движений.

В модели (1) считаем, что моментные характеристики двигателей и моменты сопротивления имеют простейший линеаризованный вид:

$$L_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = M_{0i} - k_{0i} \dot{\varphi}_i, \quad H_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) = k_i \dot{\varphi}_i, \quad i = 1, 2,$$

здесь M_{0i} и k_i – постоянные параметры [1].

Для исследования данной модели вводим безразмерное время и координату следующим образом: $\tau = \omega_0 t$, $x = y/r$, где x и τ – новые безразмерные величины, а r и $1/\omega_0$ – характерные величины длины и времени соответственно, $\omega_0 = \sqrt{p/m}$ – собственная частота колебаний платформы. Для сокращения записи введем обозначения $\varepsilon = k/(m\omega_0)$, $a_i = (k_i + k_{0i})/I_i\omega_0$, $b_i = M_{0i}/I_i\omega_0^2$, $m_i r_i^2/I_i \approx \mu c_i$, $\kappa_i = r_i/r$, $r = r_1 + r_2$. Принимая в качестве малого параметра μ отношение неуравновешенной массы ротора к массе основания, имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x + \varepsilon \dot{x} - \mu \kappa_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) - \mu \kappa_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2) &= 0, \\ \ddot{\varphi}_i + a_i \dot{\varphi}_i - b_i - \mu c_i \frac{1}{\kappa_i} \ddot{x} \sin \varphi_i &= 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_i, b_i, c_i, κ_i ($i=1,2$) – постоянные параметры, характеризующие качественные характеристики двигателей, $\mu = m_i/m \ll 1$ – малый параметр системы. В системе (2) безразмерный коэффициент диссипации ε считается малой величиной порядка μ , $\varepsilon = \mu d$.

Наличие в системе (2) малого параметра μ позволяет исследовать эту систему приближенными методами. Наиболее эффективным методом приближенного аналитического исследования нелинейных колебательных систем с малым параметром является метод осреднения. Идея метода заключается не в прямом построении приближенного решения точной системы, а в построении приближенной системы, для которой строится точное решение. Необходимым предварительным этапом применения метода осреднения является приведение системы (2) к стандартной форме.

3. Метод осреднения. Вводя новые переменные $\dot{x} = y$, $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$, $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$ и представляя систему уравнений (2) в нормальной форме Коши, получаем систему, порождающее решение ($\mu = 0$) которой: $x(t) = A \sin \varphi(t)$, $y(t) = A \cos \varphi(t)$, $\varphi(t) = t + \alpha$, $\varphi_1(t) = v_1 \exp(-a_1 t) + \Omega_1 t + B_1$, $\varphi_2(t) = v_2 \exp(-a_2 t) + \Omega_2 t + B_2$, $\omega_1(t) = -v_1 a_1 \exp(-a_1 t) + \Omega_1$, $\omega_2(t) = -v_2 a_2 \exp(-a_2 t) + \Omega_2$, где $A, \alpha, v_1, v_2, B_1, B_2$ – произвольные постоянные, $\Omega_1 = b_1/a_1$, $\Omega_2 = b_2/a_2$ – номинальные частоты вращения первого и второго двигателей соответственно, здесь и далее безразмерное время τ обозначено t . Для случая $\mu \neq 0$ полагаем, что решение имеет тот же вид, но при этом считаем, что все произвольные постоянные являются функциями времени (метод вариации произвольных постоянных Лагранжа):

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) \sin(t + \alpha(t)), \quad y(t) = A(t) \cos(t + \alpha(t)), \\ \varphi_1(t) &= v_1(t) \exp(-a_1 t) + \Omega_1 t + B_1(t), \quad \varphi_2(t) = v_2(t) \exp(-a_2 t) + \Omega_2 t + B_2(t), \\ \omega_1(t) &= -a_1 v_1(t) \exp(-a_1 t) + \Omega_1, \quad \omega_2(t) = -a_2 v_2(t) \exp(-a_2 t) + \Omega_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $A(t), \alpha(t)$ – амплитуда и фаза колебаний основания, $v_1(t), v_2(t)$ – угловые скорости двигателей, $B_1(t), B_2(t)$ – фазы роторов двигателей. Переход к новым переменным $(x(t), y(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) \rightarrow (A(t), \alpha(t), v_1(t), v_2(t), B_1(t), B_2(t))$ на основе замены (3) позволяет привести систему к стандартной форме. Система в новых переменных требует некоторых упрощений,

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\mu \cos(t + \alpha)}{-1 + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^2 c_i \sin^2(\beta_i) \right)} \left(\mu A \sin(t + \alpha) \sum_{i=1}^2 c_i \sin^2(\beta_i) - dA \cos(t + \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^2 \left(a_i^2 \kappa_i v_i \exp(-a_i t) \sin(\beta_i) + \kappa_i (\Omega_i - a_i v_i \exp(-a_i t))^2 \cos(\beta_i) \right) \right), \\ \dot{\alpha} &= - \frac{\mu \sin(t + \alpha)}{A \left(-1 + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^2 c_i \sin^2(\beta_i) \right) \right)} \left(\mu A \sin(t + \alpha) \sum_{i=1}^2 c_i \sin^2(\beta_i) + dA \cos(t + \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^2 \left(a_i^2 \kappa_i v_i \exp(-a_i t) \sin(\beta_i) + \kappa_i (\Omega_i - a_i v_i \exp(-a_i t))^2 \cos(\beta_i) \right) \right), \end{aligned}$$

$$\dot{v}_j = \frac{\mu c_j \sin(\beta_j) \exp(a_j t)}{\kappa_j a_j \left(-1 + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^2 c_i \sin^2(\beta_i) \right) \right)} \left(-A \sin(t + \alpha) + \mu(-dA \cos(t + \alpha) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 (a_i^2 \kappa_i v_i \exp(-a_i t) \sin(\beta_i) + \kappa_i (\Omega_i - a_i v_i \exp(-a_i t))^2 \cos(\beta_i)) \right) \Bigg) , j = 1, 2, \quad (4)$$

$$\dot{B}_j = \frac{\mu c_j \sin(\beta_j)}{\kappa_j a_j \left(-1 + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^2 c_i \sin^2(\beta_i) \right) \right)} \left(A \sin(t + \alpha) + \mu(dA \cos(t + \alpha) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^2 (a_i^2 \kappa_i v_i \exp(-a_i t) \sin(\beta_i) + \kappa_i (\Omega_i - a_i v_i \exp(-a_i t))^2 \cos(\beta_i)) \right) \Bigg) , j = 1, 2,$$

где $\beta_i = v_i \exp(-a_i t) + \Omega_i t + B_i$, $i = 1, 2$. Раскладывая дроби, в системе уравнений (4), в ряды Тейлора в окрестности нуля $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$, при $x \rightarrow 0$ и с учетом ограничения по малому параметру до второго порядка включительно, имеем первые два слагаемых разложения. Для упрощения выражений под знаками синуса и косинуса используем тригонометрические формулы сложения, учитывая $\sin(v_i \exp(-a_i t)) \cong v_i \exp(-a_i t)$ и $\cos(v_i \exp(-a_i t)) \cong 1$ при $t \rightarrow +\infty$. Так как система относится к многочастотным системам, вводим новые переменные

$$\varphi(t) = t + \alpha(t), \beta_1(t) = \Omega_1 t + B_1(t), \beta_2(t) = \Omega_2 t + B_2(t), \quad (5)$$

$\varphi(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – быстро вращающиеся фазы (полные фазы) основания и роторов двигателей соответственно. Переходя к переменным $(\varphi, \beta_1, \beta_2)$ на основе замены (5) получим систему в стандартной форме в первом приближении:

$$\dot{A} = \mu \left(-dA \cos(\varphi) + \sum_{i=1}^2 a_i^2 \kappa_i v_i (v_i \exp(-a_i t) \cos(\beta_i) + \sin(\beta_i)) \exp(-a_i t) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \kappa_i (\Omega_i - a_i v_i \exp(-a_i t))^2 (\cos(\beta_i) - v_i \exp(-a_i t) \sin(\beta_i)) \right) \cos(\varphi) ,$$

$$\dot{\varphi} = 1 - \mu \frac{1}{A} \left(-dA \cos(\varphi) + \sum_{i=1}^2 a_i^2 \kappa_i v_i (v_i \exp(-a_i t) \cos(\beta_i) + \sin(\beta_i)) \exp(-a_i t) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \kappa_i (\Omega_i - a_i v_i \exp(-a_i t))^2 (\cos(\beta_i) - v_i \exp(-a_i t) \sin(\beta_i)) \right) \sin(\varphi) ,$$

$$\dot{v}_j = \mu \frac{Ac_j}{\kappa_j a_j} (v_j \cos(\beta_j) + \exp(a_j t) \sin(\beta_j)) \sin(\varphi), \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

$$\dot{\beta}_j = \Omega_j - \mu \frac{Ac_j}{\kappa_j a_j} (v_j \exp(-a_j t) \cos(\beta_j) + \sin(\beta_j)) \sin(\varphi), \quad j = 1, 2.$$

Система (6) имеет стандартную форму с тремя медленными переменными A , v_1 , v_2 и с тремя быстрыми фазами φ , β_1 , β_2 . Эта система квазилинейная и к ней применим метод осреднения [8].

Прежде всего, необходимо установить наличие резонанса в системе. Для этого необходимо вычислить временное среднее функций, представляющих собой правые части системы (6), и определить точки разрыва вычисленных функций [8]. При вычислении

временного среднего считается, что все переменные не зависят от времени. Функции временного среднего, рассматриваемые как функции $\omega = (\Omega_1, \Omega_2)$, имеют точки разрыва. Значения частот, при которых функции терпят разрыв

$$1 - \Omega_1 = 0, \quad 1 - \Omega_2 = 0. \quad (7)$$

Таким образом, в рассматриваемой системе в первом приближении имеется двукратный резонанс с платформой, определяемый резонансными соотношениями вида (7). Резонанс между двигателями не обнаружен.

Уравнения второго приближения, позволяющие обнаружить искомым резонанс, где B – амплитуда колебаний основания, ϕ – быстрая фаза колебаний основания, w_1, w_2 – текущие угловые скорости первого и второго двигателей, α_1, α_2 – быстро вращающиеся фазы для первого и второго двигателей соответственно, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -\mu^2 \left(\left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i^2 \kappa_i \cos(\alpha_i) - 2dB \cos(\phi) \right) \sin(\phi) M_2 + B \left(\sum_{i=1}^2 c_i \sin^2(\alpha_i) \right) \sin(\phi) \cos(\phi) + \right. \\ &+ \left. \left(\Omega_1^2 \kappa_1 \sin(\alpha_1) M_5 + \Omega_2^2 \kappa_2 \sin(\alpha_2) M_6 \right) \cos(\phi) - d \cos^2(\phi) M_1 \right) \\ \dot{\phi} &= 1 + \mu^2 \left(\left(\sum_{i=1}^2 c_i \sin^2(\alpha_i) \right) \sin^2(\phi) + \left(-\frac{1}{B} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i^2 \kappa_i \cos(\alpha_i) \right) \cos(\phi) + d \cos(2\phi) \right) M_2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{B^2} \left(\sum_{i=1}^2 \Omega_i^2 \kappa_i \cos(\alpha_i) \right) M_1 \sin(\phi) + \frac{1}{B} \left(\Omega_1^2 \kappa_1 \sin(\alpha_1) M_5 + \Omega_2^2 \kappa_2 \sin(\alpha_2) M_6 \right) \sin(\phi) \right) \\ \dot{w}_j &= \mu^2 \frac{c_j}{\kappa_j a_j} \exp(a_j t) \left(\left(\sin(\alpha_j) M_1 + B \cos(\alpha_j) M_{5+j-1} \right) \sin(\phi) + \right. \\ &+ \left. \left(B(M_2 + d) \cos(\phi) - \sum_{i=1}^2 \Omega_i^2 \kappa_i \cos(\alpha_i) \right) \sin(\alpha_j) \right), \quad j=1,2, \quad (8) \\ \dot{\alpha}_j &= \Omega_j - \mu^2 \frac{c_j}{\kappa_j a_j} \left(\left(\sin(\alpha_j) M_1 + B \cos(\alpha_j) M_{5+j-1} \right) \sin(\phi) + \right. \\ &+ \left. \left(B(M_2 + d) \cos(\phi) - \sum_{i=1}^2 \Omega_i^2 \kappa_i \cos(\alpha_i) \right) \sin(\alpha_j) \right), \quad j=1,2, \end{aligned}$$

здесь переменная часть имеет порядок μ^2 . Выражения для M_i ($i=1, \dots, 6$) определяются (9):

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_i^2 \kappa_i \sin(-\alpha_i + \phi)}{1 - \Omega_i} + \frac{\Omega_i^2 \kappa_i \sin(\alpha_i + \phi)}{1 + \Omega_i} \right) - \frac{1}{4} dB \sin(2\phi) - \frac{1}{2} \frac{dB \alpha_2}{\Omega_2}, \\ M_2 &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_i^2 \kappa_i \cos(-\alpha_i + \phi)}{(1 - \Omega_i)B} + \frac{\Omega_i^2 \kappa_i \cos(\alpha_i + \phi)}{(1 + \Omega_i)B} \right) - \frac{1}{4} d \cos(2\phi), \\ M_3 &= \frac{1}{2} \frac{c_1 B \exp(a_1 t)}{a_1 \kappa_1} \left(\frac{\sin(-\alpha_1 + \phi)}{1 - \Omega_1} - \frac{\sin(\alpha_1 + \phi)}{1 + \Omega_1} \right), \\ M_4 &= \frac{1}{2} \frac{c_2 B \exp(a_2 t)}{a_2 \kappa_2} \left(\frac{\sin(-\alpha_2 + \phi)}{1 - \Omega_2} - \frac{\sin(\alpha_2 + \phi)}{1 + \Omega_2} \right), \\ M_5 &= \frac{1}{2} \frac{c_1 B}{a_1 \kappa_1} \left(-\frac{\sin(-\alpha_1 + \phi)}{1 - \Omega_1} + \frac{\sin(\alpha_1 + \phi)}{1 + \Omega_1} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$M_6 = \frac{1}{2} \frac{c_2 B}{a_2 \kappa_2} \left(-\frac{\sin(-\alpha_2 + \phi)}{1 - \Omega_2} + \frac{\sin(\alpha_2 + \phi)}{1 + \Omega_2} \right).$$

Система второго приближения (8) получена на основе замены

$$\begin{aligned} A &= B + \mu M_1(B, \phi, w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2), \quad \varphi = \phi + \mu M_2(B, \phi, w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2), \\ v_1 &= w_1 + \mu M_3(B, \phi, w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2), \quad v_2 = w_2 + \mu M_4(B, \phi, w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2), \\ \beta_1 &= \alpha_1 + \mu M_5(B, \phi, w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2), \quad \beta_2 = \alpha_2 + \mu M_6(B, \phi, w_1, w_2, \alpha_1, \alpha_2), \end{aligned}$$

которая уничтожает в уравнениях стандартной формы члены первого порядка малости.

Временное среднее, вычисленное для уравнений второго приближения (8) обнаруживает разрыв на следующих резонансных прямых:

$$\begin{aligned} -1 + \Omega_1 = 0, \quad -1 + \Omega_2 = 0, \quad 1 + \Omega_1 = 0, \quad 1 + \Omega_2 = 0, \quad -\Omega_2 + \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 + \Omega_1 = 0, \\ -\Omega_2 + \Omega_1 - 2 = 0, \quad -\Omega_2 + \Omega_1 + 2 = 0, \quad \Omega_2 + \Omega_1 - 2 = 0, \quad \Omega_2 + \Omega_1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Резонансные соотношения: $1 + \Omega_1 = 0$, $1 + \Omega_2 = 0$, $\Omega_2 + \Omega_1 = 0$, $\Omega_2 + \Omega_1 + 2 = 0$ – физически нереализуемы. Наиболее интересный с практической точки зрения случай, когда частоты вращения двигателей близки между собой, но далеки от частоты колебаний платформы. Резонансное условие, соответствующее этому случаю,

$$\Omega_1 - \Omega_2 = 0 \tag{10}$$

характеризует эффект синхронизации между двигателями в механической системе.

Таким образом, во втором приближении обнаружен резонанс второго порядка между двумя двигателями, определяемый резонансным соотношением (10).

4. Синхронизация. В соответствии с процедурой изучения резонанса [8, 9] вводим расстройку частот

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \Delta \sim \mu^2 \tag{11}$$

и медленную фазу, характеризующую разницу быстровращающихся фаз

$$\theta = \alpha_1 - \alpha_2. \tag{12}$$

Переходя в системе (8) к новой переменной θ на основе замены (12), получаем уравнения, в которых рассматриваемый резонанс устранен, и к ним можно применять процедуру осреднения. В результате осреднения правых частей системы по быстрым переменным ϕ и α_1 , получаем следующие уравнения для амплитуды колебаний основания и медленной фазы (медленных переменных):

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -\frac{k\Delta \sin(\theta)}{B} + (n - m\theta)B, \\ \dot{\theta} &= \Delta + q \sin(\theta) - pB^2, \end{aligned} \tag{13}$$

где обозначения

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{4} \frac{\mu^2 \kappa_1 \kappa_2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 (1 + \Omega_1 \Omega_2)}{(\Omega_1^2 - 1)(\Omega_2^2 - 1)}, \quad m = \frac{1}{4} \frac{\mu^2 d^2}{\Omega_2}, \quad n = \frac{1}{4} \mu^2 \left(\sum_{i=1}^2 \frac{c_i \Omega_i^2}{a_i (\Omega_i^2 - 1)} + \frac{\pi d^2}{\Omega_2} \right), \\ p &= -\frac{1}{4} \mu^2 \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i \Omega_i c_i^2}{\kappa_i^2 a_i^2 (\Omega_i^2 - 1)}, \quad q = \frac{1}{2} \mu^2 \frac{c_1}{a_1 \kappa_1} \frac{c_2}{a_2 \kappa_2} \sum_{i=1}^2 \frac{a_i \kappa_i^2 \Omega_i^4}{c_i (\Omega_i^2 - 1)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Из условий стационарности колебаний ($\dot{B} = \dot{\theta} = 0$) получаем уравнения стационарных режимов колебаний

$$\begin{aligned} -\frac{k\Delta \sin(\theta)}{B} + (n - m\theta)B &= 0, \\ \Delta + q \sin(\theta) - pB^2 &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

соответственно условия существования стационарного режима

$$\left| \frac{pB^2 - \Delta}{q} \right| \leq 1. \quad (16)$$

Т.к. $q > 0$ и $p < q$ при любых параметрах системы, а при одинаковых статических характеристиках двигателей $p < 0$, то условие (16) выполняется при небольших значениях амплитуды колебаний основания $B \leq B_* = (\Delta - q)/p$, если же $p > 0$, то условие (16) выполняется при $B \leq B_* = (\Delta + q)/p$, где B_* – некоторое критическое значение амплитуды, при котором нарушается режим синхронизации.

Уравнения стационарных режимов колебаний (15) позволяют найти зависимость между амплитудой стационарных колебаний B и расстройкой частот источников колебаний Δ :

$$k \left(\frac{\Delta^2}{B} - \Delta p B \right) + q B \left(n - m \arcsin \left(\frac{pB^2 - \Delta}{q} \right) \right) = 0. \quad (17)$$

Стационарные значения фазы θ находим с помощью формулы

$$\theta = \arctg \left(\frac{pB^2 - \Delta}{\sqrt{q^2 - (pB^2 - \Delta)^2}} \right), \quad (18)$$

где B определяется (17). При помощи зависимости (17), строим резонансную кривую (рис. 1)

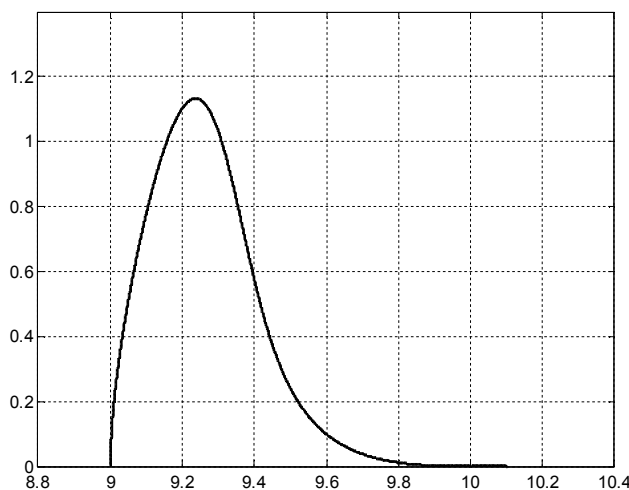


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика $B(\Delta)$

По данному графику можно сказать, что в модели присутствует нелинейность. Несмотря на то, что восстанавливающая сила и сила сопротивления представляют собой линейные характеристики, в системе наблюдается слабая нелинейность за счет малой нелинейной вынуждающей силы, обусловленной работой пары двигателей с неуравновешенными роторами. При изменении коэффициента диссипации получаем следующие графики

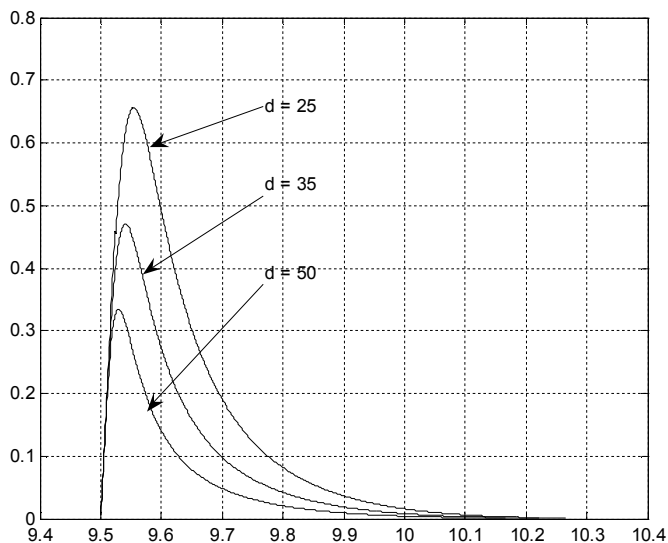


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика $B^2(\Delta)$ при изменении демпфирования

Из рис. 2 видно, что при увеличении коэффициента линейного демпфирования (диссипации) ограничивает амплитуду колебаний основания.

Графики зависимости фазы стационарных колебаний θ от расстройки частот источников колебаний Δ определяемые соотношением (18) с коэффициентами диссипации $d = 20$, $d = 30$, $d = 50$ представлены на рис. 3-5:

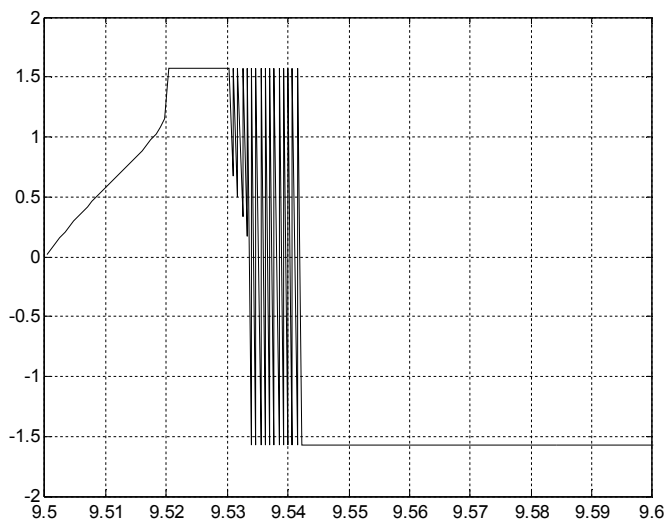


Рис. 3. График зависимости $\theta(\Delta)$ ($d = 20$)

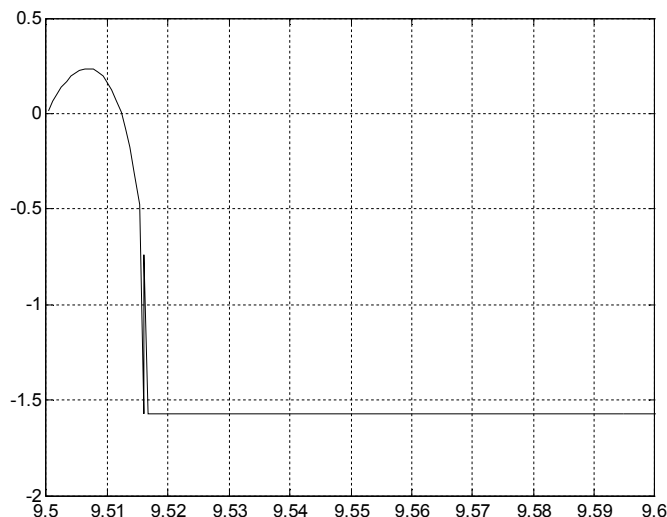


Рис. 4. График зависимости $\theta(\Delta)$ ($d = 30$)

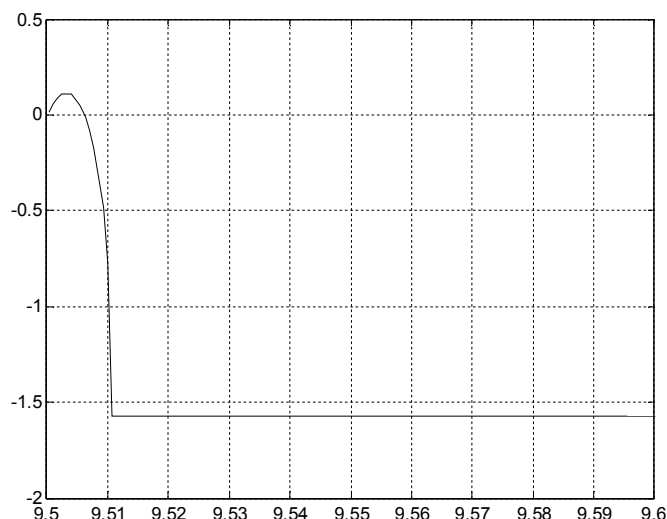


Рис. 5. График зависимости $\theta(\Delta)$ ($d = 50$)

Из графиков видно, что увеличение коэффициента диссипации способствует плавному изменению разности фаз.

Для изучения устойчивости найденного стационарного решения составим уравнения в вариациях для системы (13), характеристическое уравнение которых имеет вид:

$$\lambda^2 - \lambda \left(q \cos \theta_0 + n - m\theta_0 - \frac{k\Delta}{B_0^2} \sin \theta_0 \right) + q \cos \theta_0 \left(n - m\theta_0 - \frac{k\Delta}{B_0^2} \sin \theta_0 \right) - 2p(k\Delta \cos \theta_0 + mB_0^2) = 0 \quad (19)$$

Учитывая уравнения стационарного режима и исключая амплитуду B_0 из характеристического уравнения (19), получаем, согласно критерию Рауса-Гурвица, необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости

$$q \cos \theta_0 < 0, \quad 2pk\Delta \cos \theta_0 + 2m(\Delta + q \sin \theta_0) < 0. \quad (20)$$

Т.к. $q > 0$ при любых параметрах системы, то из первого неравенства получаем значения фазы $\pi/2 < \theta_0 < 3\pi/2$. По условию задачи роторы двигателей вращаются в одном направлении, значит единственно возможным значением разности фаз при возникновении устойчивого режима синхронизации является $\theta_0 = \pi$. Частично данные выводы подтверждены экспериментом. В результате эксперимента было выявлено, что время до полного останова каждого из роторов двигателей, с одинаковыми статическими и частотными характеристиками и с одинаковым направлением вращения ротора, из режима синхронизации заметно сокращается, в сравнении со временем до полного останова каждого из двигателей, работающих по отдельности, т.е. независимо друг от друга. Что позволяет предположить и утверждать, что соотношение фаз роторов двигателей, вращающихся в одном направлении, противофазное.

5. Выводы. При исследовании данной модели методом осреднения были выявлены новые факты: во втором приближении метода обнаружен режим частотной синхронизации между двумя двигателями, установленными на общем основании. При анализе режима синхронизации фазочастотная характеристика показывает, что при уменьшении коэффициента демпфирования обнаружены резкие скачки разности фаз, что нарушает режим синхронизации. При увеличении демпфирования скачки уменьшаются и в итоге не наблюдаются. Что полностью согласуется с теоретическими соображениями и экспериментальными данными [14]. Также благодаря применяемому методу обнаружены дополнительные фазовые флуктуации синхронизирующихся источников вибрации (асинхронных двигателей).

Литература

1. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
2. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. – 896 с.
3. Блехман И.И., Бутенин Н.В., Ганиев Р.Ф. и др. Вибрации в технике т.2. Колебания нелинейных механических систем. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
5. Пиковский А.С., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. – М.: Техносфера, 2003. – 508 с.
6. Гордеев Б.А. Применение гидравлических виброопор в синхронизирующихся механических системах / Б.А. Гордеев, А.Б. Гордеев, Д.А. Ковригин, А.В. Леонтьева // Приволжский научный журнал. – 2009. – № 3. – С. 49-53.
7. Гордеев Б.А. Причины возникновения синхронизации в рельсовом транспорте / Б.А. Гордеев, А.Б. Гордеев, Д.А. Ковригин, А.В. Леонтьева // Приволжский научный журнал. – 2009. – № 4. – С. 47-53.
8. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
10. Хакен Г. Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – 423 с.
11. Гордеев Б.А., Ковригин Д.А., Леонтьева А.В. Способы гашения низкочастотных вибраций // Сб. материалов X Межд. молодежной научн.-техн. конференции «Будущее технической науки» (Н.Новгород, 13 мая 2011 г.). – Н.Новгород, 2011. – С. 444-445.
12. Леонтьева А.В., Гордеев А.Б., Ковригин Д.А. Гидроопоры в синхронизирующихся механических системах // Актуальные проблемы механики. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вторая

- Всероссийская школа молодых ученых-механиков: тезисы докл. (Н.Новгород, 24-30 авг. 2011 г.). – Н.Новгород, 2011. – С. 67–68.
13. Леонтьева А.В., Гордеев А.Б., Ковригин Д.А. Гидропоры в синхронизирующихся механических системах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 Часть 2. – С. 211–213.
 14. Гордеев Б.А., Ковригин Д.А., Леонтьева А.В. Задача синхронизации вращения пары двигателей на упругом основании // Вестник машиностроения. – 2011. – № 10. – С. 3-7.

Поступила: 21.09.11.