

УДК 532.3

ВЫТАЛКИВАЮЩАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ЧАСТИЦУ, ДВИГАЮЩУЮСЯ В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ВМЕСТЕ СО СРЕДОЙ

© В.Б. Федосеев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

e-mail: fedoseev@phys.unn.ru

Аннотация. В гидродинамике описано несколько сил, вызывающих поперечную миграцию частиц, двигающихся в ламинарном потоке. В этой работе рассмотрены переносимые потоком частицы, скорость которых совпадает со скоростью потока. На основе описания полной энергии системы "движущаяся среда – частица" получено выражение для обобщенной силы, являющейся аналогом выталкивающей силы (силы Архимеда) и некоторые закономерности, связанные с действием этой силы.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные наблюдения поведения потоков двухфазных систем разного типа показали, что частицы в них могут смещаться перпендикулярно оси потока в различных направлениях. Уже в первых экспериментах установлено, что в вертикальном нисходящем или горизонтальном потоке частицы, имеющие плотность ρ_p , более высокую чем плотность среды ρ_f , смещаются к стенке, а в случае $\rho_f > \rho_p$ частицы смещаются к оси потока. Концентрация дисперсной фазы может быть неоднородной и несимметричной, жидкие частицы могут образовывать пленки на стенках, пузырьки всплывают преимущественно по центральной области вертикальных потоков, крупные частицы могут двигаться сталкиваясь со стенками, ограничивающими поток. Частицы с нулевой плавучестью либо концентрируются на удалении и от стенок, и от оси потока, либо осциллируют внутри потока. Экспериментально показано, что на движение частиц оказывает влияние множество переменных, в частности, геометрия, скорость, плотность частиц и среды. [1, 2, гл. 2].

Многочисленные обзорные работы, экспериментальные и численные исследования последних лет свидетельствуют, что проблема теоретического описания миграции частиц в потоках самого разного типа остаётся актуальной и в настоящее время [3, 4, 5, 6]. Классическое описание основано на аппарате гидродинамики [1, 7, 8], существуют работы, в которых привлекаются методы и понятия статистической физики и термодинамики [9, 3, 10, 11].

Воспользуемся термодинамическим подходом. Прежде всего, заметим, что система "движущаяся среда – частица" не является изолированной. Обмен энергией между этой системой и окружающим пространством – "термостатом" может происходить на стенках и вдоль потока, распространяясь в виде гидродинамических волновых и тепловых возмущений, излучаемых или поглощаемых системой, сопровождаясь изменением эпюры скоростей $v(x)$ и/или давления, рождением вихревых движений среды в окрестности частицы, перемещениями и поворотами самой частицы.

Для открытой системы к перечисленным эффектам следует добавить изменение концентрации частиц по длине потока. Остановимся на случае, когда полная энергия системы не сохраняется, а количество, состав и распределение вещества не меняются во времени. Эту систему можно считать закрытой (либо "квазизакрытой" – когда существует непрерывный обмен веществом с окружающей средой не нарушающий состав и состояние системы).

Энергия закрытой системы может изменяться самопроизвольно или вынужденно при взаимодействии внешней средой. Самопроизвольно протекающие процессы внутри закрытых и открытых систем понижают её полную энергию и сопровождаются диссипацией энергии. Полная энергия системы "движущаяся среда – частица" зависит от положения частицы. Производная полной энергии по координатам частицы, может интерпретироваться как обобщенная сила, которая определяет направление самопроизвольного смещения частицы.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Выберем систему координат, связанную с неподвижной стенкой. Ось y координат соответствует направлению потока, ось x нормальна стенкам. Рассмотрим движение частицы кубической формы со стороной L в неоднородном ламинарном плоском горизонтальном потоке постоянного сечения (рис. 1). Воспользуемся простейшей постановкой задачи, рассматривая состояния системы, при которых скорость движения центра масс частицы и среды совпадают. Распределение скоростей в потоке $v(x)$ опишем простыми модельными функциями, соответствующими течению Куэтта $v(x) = ax$ (рис. 1 слева) и Пуазейля $v(x) = a(xH - x^2)$ (рис. 1 справа), где H – ширина русла, x – координата нормальная направлению потока.

Пусть скорость движения центра массы частицы равна скорости потока на уровне h , соответствующей положению центра массы (рис. 1). Частица имеет форму куба со стороной L . Пусть за время прохождения сквозь систему частица не смещается поперёк потока и не вращается под действием обтекающих её сверху и снизу потоков, а также потоков, порождаемых ею спереди и сзади. Как только частица выносится потоком за пределы рассматриваемой системы, в систему синхронно вносится тождественная по физическим свойствам и положению h в потоке частица. Система является стационарной, так как её полная и внутренняя энергия, импульс, количество вещества, состав, масса, объемы жидкой и твёрдой фаз, не зависят от времени. Во времени периодически изменяется только координата частицы y . Аналогичный приём использован ранее Зельдовичем [9]. Вертикальных перемещений частицы в системе не происходит, но можно описать ансамбль состояний системы с разным значением h , причём система имеет ничем не ограниченную возможность перехода из одного состояния в другое.

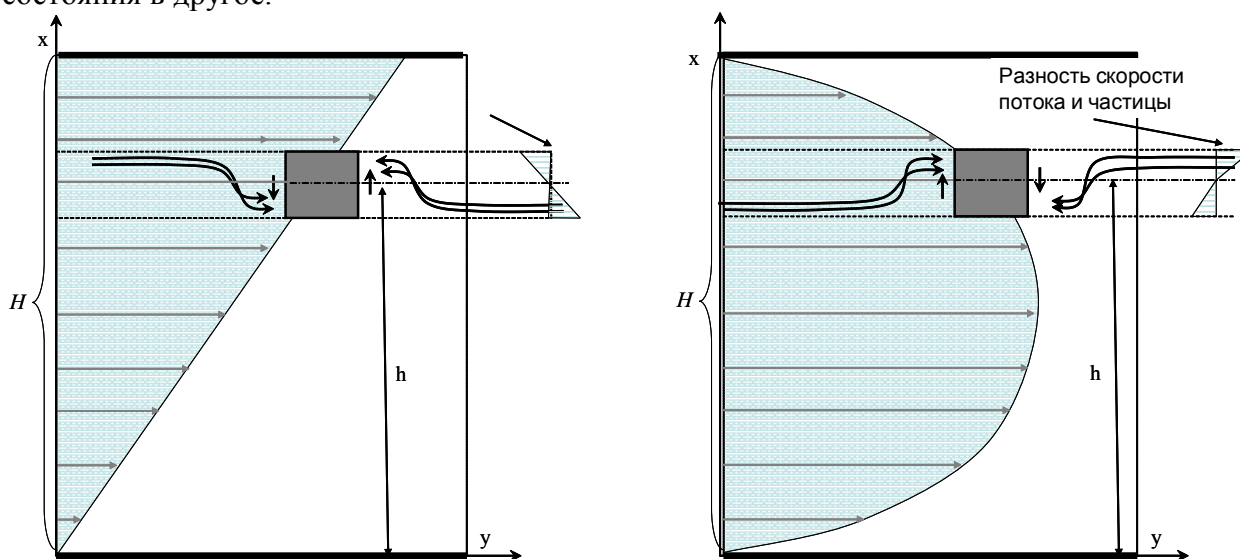


Рис. 1. Кубическая частица,двигающаяся вместе с потоком. Заштрихованные области соответствуют эпюрам скоростей для течений Куэтта (слева) и Пуазейля (справа). Стрелки показывают направление потоков среды около частицы.

Полная энергия системы, движущейся как целое со скоростью V , имеет вид

$$E = \frac{MV^2}{2} + U, \quad (1)$$

где масса системы $M = \sum m_i$, m_i – масса составляющих систему частиц. Внутренняя энергия U по определению включает в себя **кинетическую энергию относительного движения частиц** и потенциальную энергию их взаимодействия и равна энергии покоящейся как целое механической системы (в системе отсчёта, связанной с центром инерции системы $\mathbf{V} = 0$ и полный импульс равен нулю $\mathbf{P} = M\mathbf{V} = \sum m_i \mathbf{v}_i = 0$) [12].

В рассмотренном случае потенциальная энергия взаимодействия компонентов не учитывается и принята равной нулю, поэтому внутренняя энергия системы включает только кинетическую энергию движения среды и частицы относительно движущегося со скоростью \mathbf{V} центра инерции системы. В первом приближении, пренебрегая локальными потоками среды в окрестности частицы, связанными с тем, что один край частицы двигается быстрее потока, а другой медленнее, представим полную энергию системы как

$$W(h) = A\rho_0 \int_0^H v^2(x) dx + B \int_{h-L/2}^{h+L/2} (\rho v^2(h) - \rho_0 v^2(x)) dx, \quad (2)$$

Первый интеграл соответствует энергии невозмущенного потока (без частицы). Второй представляет вклад частицы, находящейся в положении h , он определяется размерами, плотностью и положением частицы. Внутренняя энергия системы с кубической частицей, согласно (1), имеет вид

$$U(h) = W(h) - \frac{MV(h)^2}{2}, \quad (3)$$

где $V(h) = \frac{\rho_0}{M} \left[A \int_0^H v(x) dx + Bv(h) \int_{h-L/2}^{h+L/2} \left(1 - \frac{\rho v(x)}{\rho_0 v(h)} \right) dx \right]$ – скорость центра инерции

системы как функция положения частицы h , $M = AH\rho_0 + BL\rho_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)$ – масса системы,

ρ_0, ρ – плотность среды и частицы соответственно, A, B – параметры, определяющие геометрию системы и частицы (для "правильно" ориентированной кубической частицы (рис. 1) можно выразить их как $B = \Omega_p/L=L^2$ и $A = \Omega_0/H$, через объем частицы $\Omega_p = L^3$ и объём системы Ω_0), H – ширина русла. Выражения (2) и (3) описывают полную энергию в приближении несжимаемых частиц и среды.

Очевидно, что полная энергия системы зависит от положения частицы r во всех случаях, когда второе слагаемое в (2) отлично от нуля. При смещении частицы поперёк потока одновременно меняются и внутренняя, и кинетическая энергия системы.

Скорость движения центра инерции системы $\mathbf{V}(h)$, полный импульс и момент импульса системы тоже зависят от положения частицы и её плотности. Системы координат, привязанные к частице или центру инерции системы, движущемуся со скоростью $V(h)$ в рассматриваемой задаче являются неинерциальными. Это существенно осложняет описание миграции частицы поперёк потока при некоторых удобствах выбора таких систем отсчета.

Направление самопроизвольного изменения системы определяется обобщенной силой

$F(h) = -\frac{d}{dh}W(h)$, зависящей от положения частицы. Эта сила действует и на частицу, и

на среду, вызывая их перемещение в направлении понижения полной энергии системы. При условии неразрывности среды среда и частица перемещаются в противоположных направлениях.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим наиболее часто используемые профили течения.

Плоское сдвиговое течение с линейной зависимостью скорости потока по оси x (течение Куэтта, рис. 1 слева)

$$v(x) = ax, \quad (4)$$

где $a = \frac{dv}{dx}$ – градиент скорости, интегрируя выражение (2) получим

$$W(h) = \left(\frac{a}{H}\right)^2 \frac{\rho_0 \Omega_p}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) h^2 + \frac{a^2 \rho_0 \Omega_0}{6} \left(1 - \left(\frac{L}{2H}\right)^2 \frac{\Omega_p}{\Omega_0}\right). \quad (5)$$

В тривиальном случае, когда плотности тела и среды одинаковы $\rho = \rho_0$ (нулевая плавучесть), положение частицы в потоке (4) не влияет на энергию системы. Если плотность частицы больше плотности среды $\rho > \rho_0$, полная энергия системы убывает с уменьшением h . Энергия системы тем меньше, чем медленнее движется "тяжелая" частица. Для "легких" частиц, плотность которых меньше плотности среды $\rho < \rho_0$ энергия системы понижается с ростом h , т.е. с удалением частицы от неподвижной стенки. Система понижает энергию, смещая лёгкую частицу в область больших скоростей.

Второе слагаемое зависит от градиента скорости a , размеров рассматриваемой системы H , Ω_0 и размеров частицы L , Ω_p . Частицы малого размера $L \ll H$ и $\Omega_p \ll \Omega_0$ на эту величину практически не влияют, крупные частицы понижают энергию системы.

Считая h обобщенной координатой, можно определить обобщенную силу

$$F(h) = -\frac{dW(h)}{dh}. \quad (6)$$

Для рассмотренного выше случая сдвигового течения (5) выталкивающая сила линейно зависит от расстояния до неподвижной стенки h

$$F(h) = a^2 \rho_0 \Omega_p \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) h. \quad (7)$$

Величина и направление силы определяются положением частицы, а также соотношением плотностей частицы и среды. При нулевой плавучести, когда плотности равны, сила отсутствует. Эту силу можно интерпретировать как выталкивающую силу – это практически полный аналог силы Архимеда, которую тоже можно получить, дифференцируя по высоте полную энергию системы "тело + жидкость", находящейся в однородном гравитационном поле. Сила (7) относится к числу обобщенных или "термодинамических сил", действующих на **систему в целом** (как например, в процессах диффузии, теплопереноса, химических реакциях), а не только на частицу. Так как в рассматриваемом случае обобщенной координатой является координата центра тяжести частицы h , формально можно силу привязать к частице. Однако, представим случай, когда частица может двигаться только прямолинейно (по направляющей), но поток имеет эластичные стенки, та же сила будет "действовать" уже на среду, пытаясь деформировать стенки русла около движущейся частицы (например снарядное течение [1]).

Сопоставим силу (7) с другими известными в гидродинамике силами [7, §3], действующими на тело в потоке. Выражения (2) и (7) не зависят от предыстории, поэтому не связаны с силой Бассэ-Бусинеска, возникающей при ускоренном движении частицы. Так как по условию частица не вращается, силы Магнуса и Саффмена, зависящие от угловой скорости, в рассматриваемой модели тоже отсутствуют. Сила (7) никаким образом не зависит от вязкости среды и не относится к силам трения (Стокса). Не соответствует она и силе, действующей в сдвиговом потоке вязкой среды на не вращающиеся частицы, также описанной Саффменом, так как последняя пропорциональна разности скорости частицы и потока [13].

Качественную оценку величины выталкивающей силы даёт сопоставление её с силой тяжести, действующей на ту же частицу $\frac{F(h)}{m_p g} = \frac{a^2 h}{g} \frac{\rho - \rho_0}{\rho}$. При $\frac{\rho - \rho_0}{\rho} \approx 1$ и $h = 0.5H$,

$0.5 \leq H \leq 20$ см силы сопоставимы при скорости подвижной стенки в течении Куэтта составляющей от 15 см/сек до 1 м/сек. Если подвижной сделать нижнюю стенку, то тяжелые частицы в таком потоке не упадут вниз и могут быть прижаты к верхней неподвижной стенке [14].

Для течения с параболическим распределением скорости $v(x) = b(xH - x^2)$, $0 \leq x \leq H$ (рис. 1б) на основе (2), опуская громоздкую аналитическую запись полной энергии системы, для зависимости силы от положения частицы получаем выражение

$$F(h) = \Omega_p b^2 \left(2(\rho_0 - \rho)h^3 - 3H(\rho_0 - \rho)h^2 + \frac{L^2 \rho_0 + 2H^2(\rho_0 - \rho)}{2}h - \frac{H\rho_0 L^2}{4} \right).$$

Выражение можно сократить, используя относительные величины для координаты $q = \frac{h}{H}$,

$0 \leq q \leq 1$ и характеристик размера частиц $\lambda = \frac{L}{H}$

$$F(q) = A \left[\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) (2q^3 - 3q^2 + q) + \frac{\lambda^2}{2} \left(q - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (8)$$

здесь $A = \rho_0 H^6 \lambda^3 b^2$. Полином $2q^3 - 3q^2 + q = 0$ имеет корни, равные 1, $\frac{1}{2}$, 0 и экстремумы в точках $q = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ (0.211, 0.789). В центре и у стенок потока (при $q = 0, 0.5, 1$) сила равна нулю. В центре потока (при $q = 0.5$) сила меняет знак, что соответствует положению равновесия, которое в зависимости от размеров и плотности частицы может оказаться устойчивым и неустойчивым. Выталкивающая сила (8) как и (7) зависит от соотношения плотностей $1 - \frac{\rho}{\rho_0}$, а для очень мелких частиц ($\lambda \rightarrow 0$) становится пропорциональна этой величине.

Для частиц с нулевой плавучестью, когда плотности среды и частицы равны $\rho = \rho_0$, (8) принимает простой вид

$$F(q) = A \frac{\lambda}{2} \left(q - \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

В этом случае сила всюду направлена от центра потока к стенкам (рис 2а) и линейно возрастает при удалении от центра. В пределе, когда размер частицы L совпадает с размером частиц среды, (9) обращается в нуль, так как второй интеграл в выражении (2) в случае $\rho = \rho_0$ пропадает. В общем случае сила (8) не равна нулю в окрестности неподвижных стенок ($q = 0$

и $q = 1$) для частиц любой плотности она сводится к выражению (9), "прижимая" частицы к неподвижной стенке. Заметим, что в потоке Куэтта для частиц с нулевой плавучестью эта сила отсутствует (7).

Для очень плотных частиц $\rho > \rho_0$ сила тоже всюду направлена к ближайшей стенке (рис. 2б), но максимальное по величине значение она имеет на некотором удалении от стенки.

Для лёгких частиц $\rho < \rho_0$ сила всюду направлена к центру (рис. 2в) и максимальное по величине значение она также имеет на некотором удалении от стенки

Для частиц, плотность которых чуть меньше плотности среды, в центральной части потока сила направлена к центру, а на периферии – к стенкам (рис. 2г). Положения около $q \cong \frac{1}{2} \pm \sqrt{3}/6$ (0.2 и 0.8), в которых выталкивающая сила меняет направление, зависят от размера и плотности частицы, соответствуют максимумам энергии, поэтому являются неустойчивым равновесием.

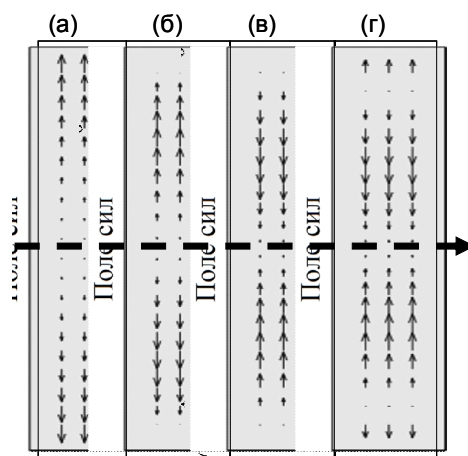


Рис. 2. Направление выталкивающей силы в горизонтальном пуазейлевском течении с частицами, имеющими (а) нулевую плавучесть, (б) высокую плотность, (в) малую плотность, (г) минимальную плавучесть

Случай частиц нулевой или очень малой плавучести особенно интересен, так как согласно экспериментальным наблюдениям подобные частицы стремятся сконцентрироваться в положении $q \approx 0.1 \div 0.2$ или $q \approx 0.8 \div 0.9$ [1]. Это противоречит полученным выше результатам, согласно которым это равновесие неустойчивое (рис. 2г). Противоречие мог бы снять отказ от приближения несжимаемых частиц и среды. Для сжимаемых компонентов следует заменить внутреннюю энергию энтальпией, учитывающей работу сжатия компонентов системы, которая зависит от гидростатического давления, зависящего от q . Гидростатическое давление, сжимающее частицы и среду, возрастает от центра к стенкам пуазейлевого потока [10]. Экспериментальные результаты могут воспроизводиться в случае, если частицы в центральной части потока имеют нулевую плавучесть – выталкивающая сила направлена от центра (рис. 2а), а на периферии потока их плотность меньше чем у среды, здесь выталкивающая сила направлена к центру (рис. 2в).

Отказываясь от приближения несжимаемых компонентов, можно предположить существование дополнительных эффектов. Так как сжимаемость твёрдого тела обычно меньше, чем у жидкой среды, то описанная выше ситуация должна быть характерна для большинства суспензий. В эмульсиях, у которых сжимаемость дисперсной фазы (капель) может быть выше сжимаемости дисперсионной среды, должны наблюдаться иные закономерности. Например, для капель, в центре пуазейлевого потока имеющих нулевую плавучесть, реализуются ситуации, показанные на рис. 2а и 2б. В этом случае могут возникать плёночные (кольцевые) течения. Если капли имеют нулевую плавучесть у стенок, то реализуется ситуация подобная

приведённой на рис. 2в. Наконец, возможна промежуточная ситуация, когда нулевую плавучесть капли имеют в положениях удалённых от центра и стенок потока рис. 2г. Подобные закономерности тоже наблюдаются в экспериментах с двухфазными системами разного типа [15, 16].

Модель, в которой частица прямолинейно и равномерно движется вместе с потоком среды является сильной идеализацией. Однако, она позволяет обратить в нуль практически все описанные в гидродинамике силы, вызывающие миграцию частицы поперёк ламинарного потока. Это позволяет выделить и описать в чистом виде аналог выталкивающей силы Архимеда для многофазных гидродинамических потоков. Из термодинамического описания следует, что эта сила как одна из составляющих существует в общем случае при любых перемещениях частиц в ламинарном потоке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-03-12184-офи-м)

ЛИТЕРАТУРА

1. Уоллис Г. Двухфазные одномерные течения М. МИР, 1972. 436 с.
2. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир. 1975. 380 с.
3. Зайчик Л. И., Алипченков В. М. Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. М.: Физматлит. 2007. 312 с..
4. Вараксин А. Ю., Турбулентные течения газа с твердыми частицами. - М.: Физматлит. 2003. 192 с.
5. Kyung Hoon Min and Chongyoup Kim Simulation of Particle Migration in Free-Surface Flows. AIChE Journal (October 2010) Vol. 56, No. 10. 2539-2550.
6. Robert L. Powell Experimental techniques for multiphase flows Physics of fluids 20, 040605 _2008.
7. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред т. 1, 2, М.: Наука. 1987.
8. Лабунцов Д. А., Ягов В. В. Механика двухфазных систем. М.: МЭИ. 2000. 374 с.
9. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. Наука. 1973. 352 с.
10. Ситенков В. Т. Гидравлика Теория и расчет двухфазных систем Нижневартовск 2006 204 с.
11. Долгунин В. Н., Борщев В. Я. Быстрые гравитационные течения зернистых материалов: техника измерения, закономерности, технологическое применение. М.: Машиностроение-1. 2005. 112 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика М.: Наука. 1988. 736 с.
13. Шрайбер А. А., Гавин А. Б., Наумов В. А. и др. Турбулентное течение газозвеси. Киев: Наукова думка, 1987. 240 с.
14. Laskovski D., Stevenson P., Galvin K. P. Lift and drag forces on an isolated cubic particle in pipe flow. Chemical engineering research and design 87 (2009) 1573–1581.
15. Matas J. P., Morris J. F., Guazzelli E. Lateral Forces on a Sphere // Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP, Vol. 59 (2004), No. 1, pp. 59-70.
16. Kaoui B. Ristow G. H., Cantat I., Misbah C., Zimmermann W. Lateral migration of a two-dimensional vesicle in unbounded Poiseuille flow. Physical Review. E 77, 021903 _2008.

Поступила: 01.08.11.