

УДК 539.3:621.891

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КАЧЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ШАРА ПО ЖЕСТКОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ СО СМАЗКОЙ

© Михаил Яковлевич Пановко

Учреждение Российской академии наук Институт машиноведения  
им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия  
[mpanovko@yandex.ru](mailto:mpanovko@yandex.ru)

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена изучению колебательных процессов в зоне точечного контакта при качении деформируемого шара, на который действует вертикальная сила, по жёсткому полупространству со смазкой. Математическая модель задачи, формулируемая с учётом массы шара, сводится к системе нестационарных нелинейных интегродифференциальных уравнений и неравенств с начальными и краевыми условиями. Получены решения колебательного типа, описывающие поведение системы шар-смазочный слой как при возмущении начальных условий, так и при действии возбуждающей силы.

**Ключевые слова:** упругогидродинамическая смазка, точечный контакт, численное моделирование.

**1. Введение.** Задачи об упругогидродинамической (УГД) смазке сосредоточенных контактов (подобные контакты имеют место в шарикоподшипниках и зубчатых передачах) в подавляющем числе случаев формулируются в предположении о равенстве реакции смазочного слоя (плёнки), т.е. интеграла по площади контакта от распределения давления в смазочном слое, внешней нагрузке. При этом контактирующие тела рассматриваются как безмассовые и соответственно исключаются из анализа силы инерции. В работах [1-3] показано, что учёт сил инерции позволяет расширить класс получаемых решений и исследовать колебательные процессы в зоне контакта. Настоящая работа посвящена изучению колебательных процессов в зоне точечного контакта при качении деформируемого шара, на который действует вертикальная сила, по жёсткому полупространству со смазкой. Применительно к условиям тяжёлого нагружения разработан численный метод решения системы нестационарных нелинейных интегродифференциальных уравнений и неравенств с начальными и краевыми условиями, описывающих распределения давления и толщины смазочной плёнки в зоне точечного контакта, а также движения деформируемого шара в вертикальном направлении. На основе этого метода получены решения, отражающие поведение системы шар – смазочный слой при следующих условиях: 1 – возмущение начальных условий; 2 – ступенчатое изменение внешней нагрузки; 3 – синусоидальное изменение внешней нагрузки. Показано, что отклик рассматриваемой системы при перечисленных условиях имеет колебательный характер. В случае 1 и 2 наблюдались затухающие колебания, в случае 3 – установившиеся.

**2. Постановка задачи.** Схема контактирующих тел показана на рис. 1. В области контакта вводится подвижная система координат, ось  $z$  которой проходит через центр шара массой  $m_b$ , а плоскость  $xy$  совпадает с границей жёсткого полупространства  $z=0$ . Полупространство описывается координатами:  $|x|<\infty$ ,  $|y|<\infty$ ,  $z\leq 0$ . Предполагается, что контактирующие поверхности являются гладкими. Поверхность шара движется с линейной скоростью  $v(v_x, 0)$ ; смазочный материал, вовлекаемый в зазор между поверхностями, обладает свойствами несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости и находится в изотермических условиях; к шару приложена изменяющаяся во времени внешняя сила  $Q$ , вызывающая его упругую деформацию в зоне смазанного точечного контакта. Физические

свойства шара и зависимость вязкости смазочной плёнки от давления полагаются известными.

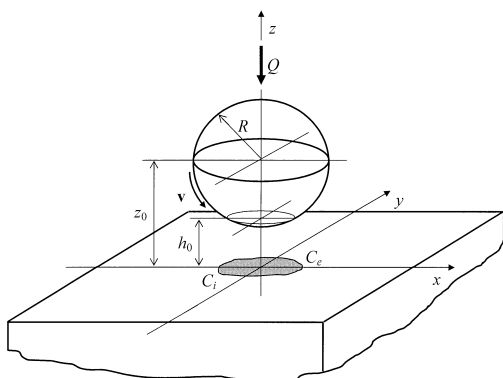


Рис. 1 Схема контакта

Система уравнений, описывающая изотермический УГД контакт, выводится с учётом ряда допущений (см., например, [4]) из уравнений гидродинамики и теории упругости. В отличие от обычно используемого в УГД задачах условия равенства реакции смазочного слоя внешней нагрузке (уравнение статики) в настоящей работе используется уравнение движения упругого шара массой  $m_b$  в направлении оси  $z$ . Система УГД уравнений замыкается начальными условиями для давления и толщины смазочной плёнки в области контакта в момент времени  $t=0$  и краевыми условиями для давления на кривой, ограничивающей

рассматриваемый смазочный слой в плане на плоскости  $xy$ . Причём часть границы области контакта – входная – задаётся; остальная часть границы – выходная (свободная), отделяющая область смазки от области кавитации, – определяется в процессе решения задачи.

Закономерности нестационарного движения деформируемого шара в направлении оси  $z$  можно оценить по изменению во времени расстояния  $z_0(t)$  между центром шара, радиус которого  $R$ , и границей полупространства  $z=0$

$$z_0(t) = R + h_0(t) - \frac{2}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \quad (1)$$

Здесь  $h_0(t)$  – толщина смазочной плёнки в центре контакта;  $t$  – время;  $\xi, \eta$  – декартовы координаты;  $p(\xi, \eta, t)$  – давление;  $1/E^* = (1 - \nu^2)/(2E)$ , где  $E$  и  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона шара;  $S$  – область контакта. Интегральный член в выражении (1) определяет вертикальную компоненту упругой деформации шара в центре контакта. Величиной

$$\delta(t) = z_0(t) - R = h_0(t) - \frac{2}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \quad (2)$$

оценивается смещение центра шара в направлении оси  $z$ , а производной по времени  $d\delta(t)/dt$  – его скорость

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( h_0(t) - \frac{2}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right). \quad (3)$$

Уравнение движения шара в направлении оси  $z$  записывается в виде

$$M(p) = m_b \frac{d^2}{dt^2} \left( h_0(t) - \frac{2}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) - \iint_S p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + Q(t) = 0. \quad (4)$$

Для представления системы уравнений и неравенств, описывающих распределения давления и толщины смазочной плёнки, а также движения шара в вертикальном направлении, с начальными и краевыми условиями, в безразмерной форме вводятся следующие безразмерные переменные:

$$(x', y', \xi', \eta') = (x, y, \xi, \eta)/a_H, t' = t/t_0, p' = p/p_H, t_0 = 2a_H/|\mathbf{v}|, V = 24\mu_0|\mathbf{v}|R^2/p_H a_H^3, \mathbf{v}' = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|, \\ h' = h/h_0(t), \mu' = \mu/\mu_0, H_0(t) = 2Rh_0(t)/a_H^2, \delta'(t) = 2R\delta(t)/a_H^2, Q_0' = Q_0 p_H, \omega' = 2a_H\omega/|\mathbf{v}|, \\ W = \pi m_b v^2/12P_0 R, d(0) = 4RD(0)/(a_H|\mathbf{v}|) = d_0^0, f(t) = Q(t)/P_0.$$

Здесь  $a_H$  – полуось герцевского контакта для сферических тел;  $p_H$  – максимальное герцевское давление;  $t_0$  – характерное время процесса;  $\omega$  – частота;  $\mu_0$  – вязкость смазочной плёнки при давлении окружающей среды;  $H_0$  – безразмерная толщина смазочной плёнки в начале координат;  $V$  – нагрузочно-скоростной параметр;  $Q_0$  – пьезокоэффициент вязкости смазочной плёнки;  $\delta$  – смещение центра шара в направлении оси  $z$ ;  $Q(t)$  – внешняя нагрузка;  $P_0 = 2\pi p_H a_H^2/3$  – внешняя нагрузка в стационарной задаче.  $D(0)$  – значение скорости центра шара в направлении оси  $z$  в начальный момент времени  $t=0$ , безразмерная скорость  $d_0^0$  – задаваемая величина. В стационарном случае  $f(t)=1$ . Система уравнений, описывающая точечный УГД контакт в безразмерной форме, имеет следующий вид (штрихи далее опущены):

$$L(p; H_0) = \nabla \cdot \left( H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \mathbf{v} h \right) - V \frac{\partial h}{\partial t} - V \frac{h}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$h(x, y, t) = 1 + \frac{x^2 + y^2}{H_0(t)} + \frac{4}{\pi^2 H_0(t)} \iint_S G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta, \quad (6)$$

$$M(p; H_0) = W \frac{d^2}{dt^2} \left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) - \\ - \iint_S p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \frac{2\pi}{3} f(t) = 0, \quad (7)$$

$$\left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right)_{t=0} = H_0^0 - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p^0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right)_{t=0} = d(0), \quad (9)$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x, y), \quad H_0(0) = H_0^0, \quad p|_C = 0, \quad (10)$$

$$L(p; H_0)=0, \quad p>0 \text{ в зоне смазки; } p=0, \quad L(p; H_0)<0 \text{ в зоне кавитации.} \quad (11)$$

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y), \quad G(x, y, \xi, \eta) = 1/\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - 1/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ \mu = \mu(p), \quad \mathbf{v} = (v_x, 0).$$

Здесь  $x, y, \xi, \eta$  – декартовы координаты;  $t$  – время;  $p(x, y, t)$  – давление;  $p^0(x, y)$  – давление в начальный момент времени  $t=0$ ;  $h(x, y, t)$  – толщина смазочной плёнки;  $h_0(t)$  – толщина смазочной плёнки в центре контакта;  $h_0^0$  – толщина смазочной плёнки в центре контакта в

начальный момент времени  $t=0$ ;  $Q(t)$  – внешняя нагрузка;  $\mu$  - вязкость смазочной плёнки;  $S=C_i \cup C_e$  – граница области контакта  $S$ , где  $C_i$  – входная граница,  $C_e$  – выходная граница области контакта. Значения  $p^0(x,y)$  и  $h_0^0$  определяются из решения стационарной задачи.

Система уравнений (5)–(11) является нестационарной нелинейной интегродифференциальной системой, включающей уравнение Рейнольдса (5), уравнение для определения толщины смазочной плёнки (6), уравнение движения шара в направлении оси  $z$  (7), начальные и краевые условия для давления и толщины смазочной плёнки (8)–(11). Для определения местоположения выходной границы  $C_e$  в задаче используются условия дополненности (11). Обоснование применимости условий дополненности для решения задач об УГД контактах подробно описано в работах [5].

В системе уравнений и неравенств (5)–(11) заданными считаются входная граница  $C_i$ ; нагрузочно-скоростной параметр  $V$  (для тяжело нагруженного контакта  $V \ll 1, Q_0 \gg 1$ ); вектор скорости  $v(v_x, 0)$ ; зависимость вязкости от давления  $\mu = \mu_0 \exp(Q_0 p)$  с задаваемым пьезокоэффициентом вязкости смазочной плёнки  $Q_0$ ; начальные условия  $\delta(0), d\delta/dt(0)$ ; параметр  $W$ ; функция  $f(t)$ . Решение задачи представляется распределениями давления  $p(x,y,t)$  и толщины смазочной плёнки  $h(x,y,t)$ , местоположением выходной границы  $x_e(y,t)$ , безразмерной толщиной смазочной плёнки в начале координат  $H_0(t)$ . Результаты решения задачи используются для вычисления смещения центра шара  $\delta(t)$  по формуле

$$\delta(t) = H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \quad (12)$$

Из соотношения (6) после дифференцирования по  $t$  следует

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{h-1}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{4}{\pi^2 H_0} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta. \quad (13)$$

Учитывая (13), уравнение Рейнольдса (5) может быть записано в следующем виде

$$L_1(p; H_0) = \nabla \cdot \left( H_0^3 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - H_0 V \nabla h \right) - V \frac{\partial H_0}{\partial t} - V \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 0. \quad (14)$$

Проинтегрировав уравнение (7) один раз по времени на интервале  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , получаем

$$M_1(p; H_0) = W \frac{d}{dt} \left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right)_{t_{n+1}} - W \frac{d}{dt} \left( H_0(t) - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right)_{t_n} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \iint_S p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \frac{2\pi}{3} f(t) \right) dt = 0. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) с учётом приведенных выше начальных и краевых условий (8)–(10) используются для вывода конечноразностных уравнений численного решения УГД задачи.

**3. Численный метод.** Расчётная область, включающая область контакта  $S$ , где  $p > 0$ , и область кавитации, где  $p = 0$ , в плоскости  $x, y$  задается в виде прямоугольника  $\{x, y : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$  и покрывается неравномерной разнесённой декартовой сеткой с системой узлов  $(x_i, y_j), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ . Давление определяется в узлах  $(x_i, y_j)$ , толщина смазочной плёнки – в узлах  $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ . После интегрирования уравнения (14) по области  $\Delta S_{ij}$ , занимаемой расчётной ячейкой  $(i, j)$  внутри контура  $(l_{ij})$ , получаем

$$L_1(p; H_0) = \int_{(l_{ij})} \left[ H_0^3 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) - H_0 V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h \right] dl - V \left[ \frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right] \Delta S_{ij} = 0. \quad (16)$$

В условиях дополненности (11) оператор  $L(p; H_0)$  заменяется на  $L_1(p; H_0)$ .

Алгоритм решения системы уравнений и неравенств, описывающих УГД контакт, основан на методе Ньютона с использованием неявной схемы при аппроксимации нестационарных уравнений. Линеаризованные уравнения (15), (16) около решения  $(p(x, y, t_{n+1}), H_0(t_{n+1}))_k^{n+1}$ , где  $n$  – номер временного шага,  $k$  – номер итерации на текущем временном шаге используются для построения конечноразностной схемы. Система разностных уравнений для итерации  $(k+1)$  на временном шаге  $(n+1)$  имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} (a_{qr})_{mm} & (b_q)_m \\ (c_r)_m^T & -W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta p_r)_m \\ \Delta H_0 \end{pmatrix} \Big|_k^{n+1} = - \begin{pmatrix} (L_1(p_r; H_0))_m \\ M_1(p_r; H_0) \end{pmatrix} \Big|_k^{n+1}, \quad (17)$$

где элементами матрицы Якоби порядка  $(m+1)$  являются полная квадратная матрица  $(a_{qr})_{mm}$  порядка  $m$ , вектор-столбец  $(b_q)_m$ , вектор-строка  $(c_r)_m^T$  ( $q, r = 1, \dots, m$ ), параметр  $W$ . Значение  $m$  равно числу узлов сетки, в которых определяются компоненты вектор-столбца приращений давления  $(\Delta p_r)_m$ , и зависит от местоположения выходной границы.

Один шаг итерационного процесса состоит в решении разностных уравнений (17) относительно приращений  $\Delta H_{0,k+1}^{n+1}(t_{n+1}), \Delta p_{k+1}^{n+1}(x_i, y_j, t_{n+1})$  методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента, вычислении  $H_{0,k+1}^{n+1} = H_{0,k}^{n+1} + \Delta H_{0,k+1}^{n+1}$ ,  $p_{k+1}^{n+1} = p_k^{n+1} + \Delta p_{k+1}^{n+1}$ , вычислении  $h_{k+1}^{n+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, t_{n+1})$  по соотношению (6) и определении выходной границы  $x_{e,k+1}^{n+1}(y_j, t_{n+1})$ . Интеграл в (6) вычислялся по кубатурной формуле для сингулярных интегралов [6].

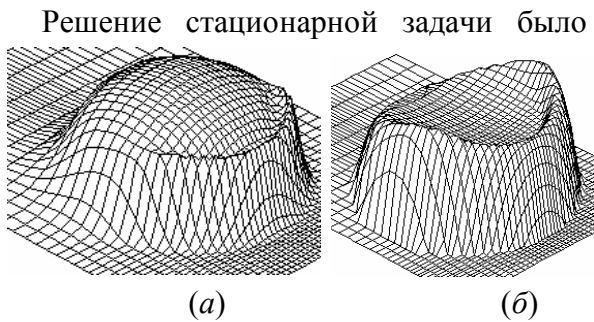
Проверка условий дополненности (11) осуществляется в каждом узле расчётной сетки после решения системы (17). Узлы некавитирующей области, которые не удовлетворяют условию  $p > 0$ , помещаются в область кавитации, а узлы области кавитации, в которых нарушается условие  $L_1(p; H_0) < 0$ , помещаются в некавитирующую область. Процедура решения системы (17) и проверки принадлежности узлов соответствующим областям

осуществляется в итерационном цикле. Итерационный процесс продолжался до достижения требуемой относительной точности решения  $\varepsilon$ , т.е.

$$\max \left( \left| H_{0,k+1}^{n+1} / H_{0,k}^{n+1} - 1 \right|, \left| p_{k+1}^{n+1} / p_k^{n+1} - 1 \right|, \left| h_{k+1}^{n+1} / h_k^{n+1} - 1 \right|, \left| x_{e,k+1}^{n+1} / x_{e,k}^{n+1} - 1 \right| \right) < \varepsilon .$$

После выполнения заданных условий по точности решения, осуществлялся переход на новый шаг по времени.

**4. Численные результаты.** Изложенный выше вычислительный алгоритм был применён для анализа реакции системы упругий шар – смазочный слой как на возмущение начальных условий, так и возмущение внешней нагрузки. Численное моделирование осуществлялось на сетке  $40 \times 40$  при  $V=0,1$  и  $Q_0=5$ , соответствующих условиям тяжёлого нагружения точечного УГД контакта. Вектор скорости качения имел компоненты  $v_x=1$ ,  $v_y=0$ . Шаг по времени задавался постоянным и равным  $\Delta t=0,2$ .



**Рис. 2** Распределения давления (а) и толщины смазочной плёнки (б) в зоне точечного контакта (решение стационарной задачи)

Решение стационарной задачи было получено на основе стационарного варианта описанного выше численного метода. Результаты решения этой задачи представлены в виде распределений давления  $p^0(x, y)$  и толщины смазочной плёнки  $h^0(x, y)$  в зоне контакта на рис. 2 а, б соответственно. Безразмерные значения толщины смазочной плёнки в центре контакта и смещения центра шара равнялись соответственно  $H_0^0 = 0,1761$  и  $\delta(0) = 1,793$ .

**4.1.** Влияние возмущения начальных условий на поведение во времени системы шар – смазочная плёнка рассматривалось для случая, в котором

$$\tilde{\delta}(0) = (1 + \alpha)\delta(0), \quad \frac{d\tilde{\delta}}{dt}(0) = d(0) = 0, \quad \frac{Q(t)}{P_0} = f(t) = 1.$$

Здесь  $\tilde{\delta}(0)$  - возмущённое смещение центра шара,  $\alpha$  - задаваемый коэффициент отклонения возмущённого смещения от стационарного значения  $\delta(0)$ . Представленные ниже результаты расчётов были получены при  $\alpha = -0,2$ .

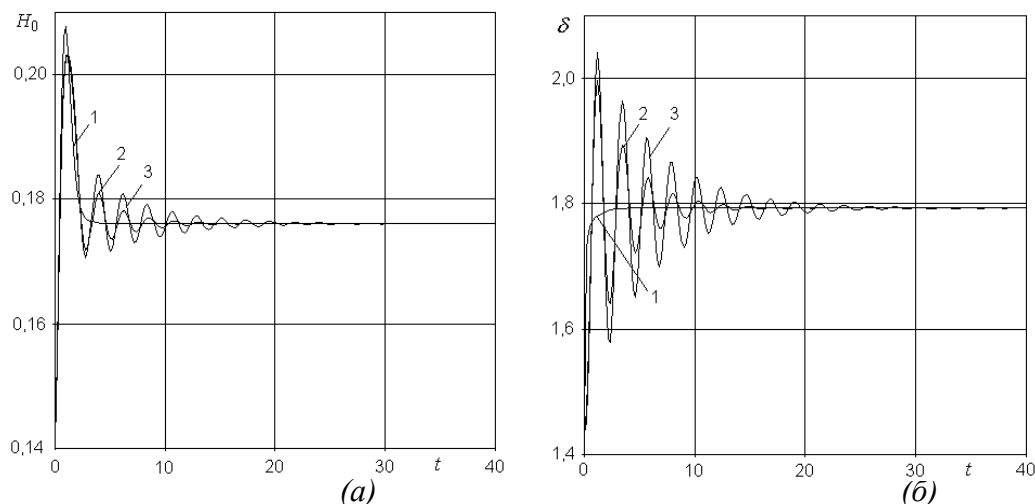
Поскольку

$$\delta(0) = H_0^0 - \frac{4}{\pi^2} \iint_S \frac{p^0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

то в вычислительном алгоритме возмущённое смещение центра шара  $\tilde{\delta}(0)$ , реализовывалось в виде

$$\tilde{H}_0^0 = (1 + \alpha)H_0^0, \quad \tilde{p}^0(x, y) = (1 + \alpha)p^0(x, y).$$

Характер изменения  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$  во времени показан соответственно на рис. 3 а, б для ряда значений параметра  $W$ . Поскольку  $(z_0(t) - R) < 0$ , то для наглядности  $\delta(t)$  представлено в виде  $|\delta(t)|$ .



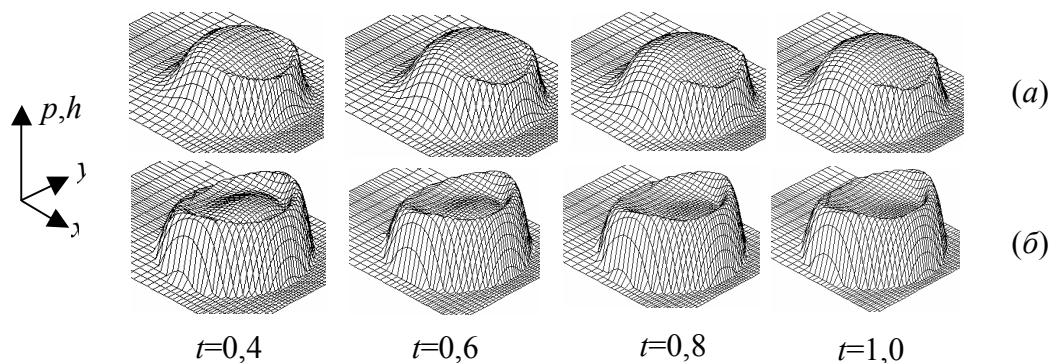
**Рис. 3** Влияние возмущения начальных условий на изменение во времени толщины смазочной плёнки в центре контакта (а) и смещения центра шара в вертикальном направлении (б)

Из приведенных графиков следует, что при  $W > 0$  (кривые 2 и 3), в отличие от случая  $W = 0$  (кривая 1), возмущение начальных условий вызывает затухающие колебания толщины смазочной плёнки в центре контакта  $H_0(t)$  и смещения центра шара  $\delta(t)$  около соответствующих стационарных значений. При этом наблюдается увеличение времени затухания колебаний с ростом  $W$ . В частности, время затухания при  $W = 1$  (кривая 3) практически в два раза больше, чем при  $W = 0,5$  (кривая 2).

Распределения давления  $p(x,y,t)$  (рис. 4,а) и толщины смазочной плёнки  $h(x,y,t)$  (рис. 4,б) при  $W = 1$  для моментов времени  $t = 0,4$ ;  $t = 0,6$ ;  $t = 0,8$ ;  $t = 1,0$  показывают, что в случае возмущения начального условия затухание колебаний сопровождается движением модуляции  $h(x,y,t)$  вдоль зоны контакта. Аналогичное явление отмечалось ранее в работе [2]. Явление это объясняется тем, что в зоне высоких давлений уравнение Рейнольдса приближённо сводится к уравнению переноса

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_0 h) + v_x \frac{\partial}{\partial x}(H_0 h) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид бегущей волны  $h(x,t) = \psi(x - v_x t)/H_0(t)$ , т.е. возмущение толщины смазочной плёнки, распространяется вниз по потоку со скоростью качения  $v_x$ .



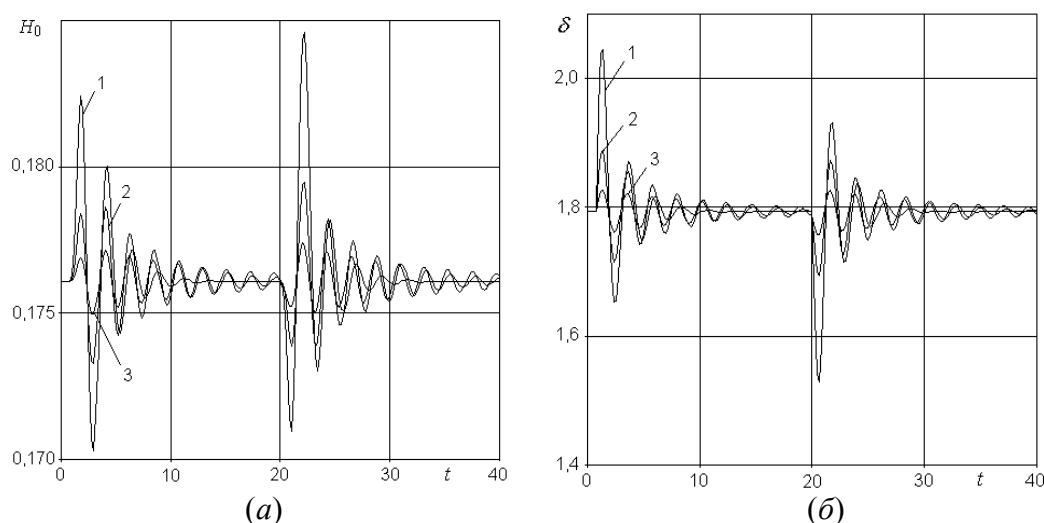
**Рис. 4** Распределения давления (а) и толщины смазочной плёнки (б) в зоне точечного контакта в различные моменты времени

4.2. Реакция системы шар – смазочный слой на ступенчатое изменение внешней нагрузки определялось для случая, когда функция  $f(t)$  имела следующий вид

$$f(t) = 1 + A[e(t - t_1) - e(t - t_2)],$$
$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Расчёты проводились при  $A=0,7$ ;  $t_1=1$ ;  $t_2=20$  для значений параметра  $W = 0,3; 1,0; 3,0$ . В качестве начальных условий использовалось решение стационарной задачи  $H_0^0$ ,  $p^0(x, y)$ . Начальная скорость центра шара в направлении оси  $z$  при этом  $d(0)=0$ .

На рис. 5 а, б представлены результаты расчётов  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$ . На этом рисунке кривая 1 получена при  $W=0,3$ ; кривая 2 – при  $W=1,0$ ; кривая 3 – при  $W=3,0$ . Из графиков следует, что ступенчатое изменение нагрузки (увеличение её в момент  $t_1=1$  и уменьшение в момент  $t_2=20$ ) вызывает затухающие колебания этих величин около их стационарных значений. Как и в случае возмущения начальных условий, характерное время затухания колебательного процесса увеличивается с ростом значений параметра  $W$ .



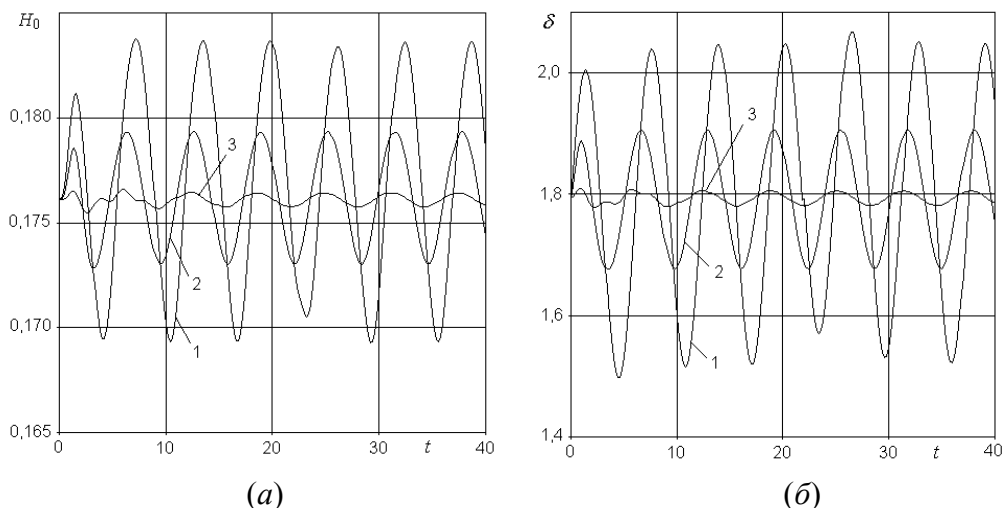
**Рис. 5** Влияние ступенчатого изменения внешней нагрузки на изменение во времени толщины смазочной плёнки в центре контакта (а) и смещения центра шара в вертикальном направлении (б)

Например, при  $W=0,3$  (кривая 1) на интервале действия ступенчатой составляющей нагрузки  $t_1 \leq t \leq t_2$  колебательный процесс, в отличие от случая  $W=3$  (кривая 3), успевает полностью затухнуть. Параметр  $W$ , как видно, также влияет на амплитудные значения: с ростом  $W$  амплитудные значения заметно снижаются.

4.3. При рассмотрении влияния возбуждающей синусоидальной силы на систему шар-смазочный слой в качестве начальных условий использовалось решение стационарной задачи  $H_0^0$ ,  $p^0(x, y)$ . Функция  $f(t)$  при этом представлялась в виде  $f(t) = 1 + A \sin(\omega t)$ .

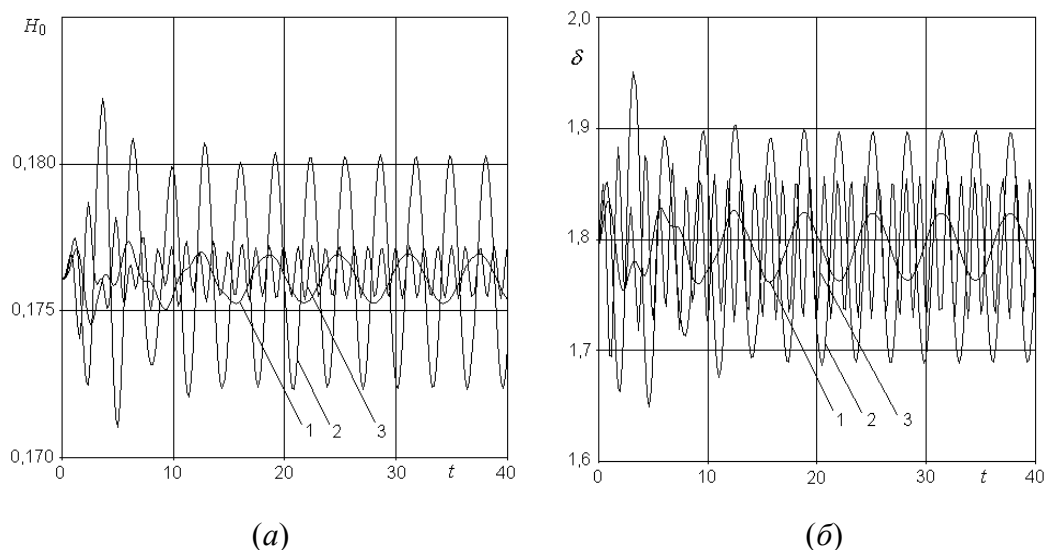
На рис. 6 а, б представлены расчётные зависимости  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$  для значений параметра  $W=0,01$  (кривая 1);  $W=0,1$  (кривая 2);  $W=1,0$  (кривая 3) в случае, когда амплитуда  $A=0,2$ ; частота  $\omega=1,0$ . Из графиков следует, что по завершении переходного режима зависимости  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$  имеют вид установившихся периодических колебаний, амплитуда которых снижается с ростом параметра  $W$ .





**Рис. 6** Влияние синусоидального изменения во времени внешней нагрузки на толщину смазочной плёнки в центре контакта (а) и смещение центра шара в вертикальном направлении (б) для различных значений параметра  $W$

Установившиеся колебания по завершении переходного режима наблюдались также в расчётах для значений частоты  $\omega=1,0$  (кривая 1);  $\omega=2,0$  (кривая 2);  $\omega=5,0$  (кривая 3) при неизменных прочих условиях (см. 7 а, б). На рис. 7 а, б представлены зависимости  $H_0(t)$  и  $\delta(t)$  для указанных частот возмущающей силы при  $A=0,5$  и  $W=1,0$ .



**Рис. 7** Влияние синусоидального изменения во времени внешней нагрузки на толщину смазочной плёнки в центре контакта (а) и смещение центра шара в вертикальном направлении (б) для различных значений частоты  $\omega$

Видно, что большей амплитудой установившихся колебаний характеризуется случай, когда  $\omega=2,0$ . Результаты, представленные на рис. 7 а, б, свидетельствуют о немонотонной зависимости  $A$  от  $\omega$ .

## Литература

1. *Кудиш И.И., Пановко М.Я.* Колебания деформируемого цилиндра при его качении по жёсткому полупространству со смазкой // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 5. С. 755-776.
2. *Wijnant Y.H., Venner C.H.* Analysis of an EHL circular contact incorporating rolling element vibration // *Elastohydrodynamics '96, Fundamentals and Application in Lubrication and Traction.* Amsterdam: Elsevier, 1997. P. 445-456.
3. *Kudish I.I.* On formulation of a non-steady lubrication problem for a non-conformal contact // *Tribol. Trans.* 1999. V. 42. № 1.
4. *Галахов М.А., Гусятников П.В., Новиков А.П.* Математические модели контактной гидродинамики. М.: Наука, 1985. 296 с.
5. *Oh K.P.* The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1984. V. 106. № 1. P. 88-95.
6. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Поступила: 14.04.11.