

УДК 621.01: 534.1

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Санкт - Петербургский государственный университет технологии и дизайна
Санкт-Петербург, Россия
vujo@rambler.ru

Аннотация. На базе метода условного осциллятора исследуются некоторые общие свойства точных решений при анализе реономных колебательных систем с одной степенью свободы. Установлен способ формирования семейств точных решений и их коррекции при учёте свойств динамической модели. Теоретические результаты и методика динамического расчёта иллюстрируются на примере изгибных колебаний балки переменной длины. Проведён динамический синтез системы с целью устранения неустойчивости решения на конечном отрезке времени.

Ключевые слова: Колебания, реономные системы, дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, устойчивость.

1. Вступительные замечания. За последние десятилетия в связи с развитием численных методов и их реализацией с помощью современных компьютерных программ интерес к точным решениям при проведении инженерных расчётов существенно ослаб. Тем не менее, точные решения сохраняют свою значимость, причём не только с эстетических позиций. Во-первых, с помощью точных «эталонных» решений могут быть оценены эффективность и область применения приближённых методов. Кроме того, они играют существенную роль при динамическом синтезе системы. Дело в том, что с позиций инженерного расчёта традиционная иерархия переменных несколько видоизменяется. В частности, инженера в меньшей мере интересует обобщённая координата по сравнению амплитудами, частотами и их трансформацией. В этом смысле аналитическая форма точного решения позволяет лучше осмыслить физическую природу исследуемого объекта, предсказать поведение системы и наметить пути её динамического совершенствования.

Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, равно как и нелинейные, как известно, в общем случае не имеют точного аналитического решения. Как образно отметил Р. Беллман, подобные задачи «...бросают вызов исследователю». Тем не менее, иногда удаётся изящной подстановкой свести задачу к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Такой пример с пометкой, «неожиданная удача» приводится в монографии Я.Г. Пановко [1] при решении задачи об изгибных колебаниях балки с перемещающейся опорой. В работах [2–6] на базе метода условного осциллятора для подобных систем был разработан регулярный способ формирования одного класса семейств точных решений, к которому, в частности, относится и пример, приведенный выше. Эта статья посвящена дальнейшему развитию данного подхода. В частности, будет показано, что он сводится к одной модификации уравнения Бесселя.

2. Формирование точных решений с помощью метода условного осциллятора.

Рассмотрим одномассовую динамическую модель с параметрами, зависящими от времени, которая описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t)q = Q(t), \quad (1)$$

где q – обобщённая координата; $Q(t)$ – возмущение; $k^2(t)$, $n(t)$ – некоторые функции времени, первая из которых на интервале $[t_0, t_*]$ должна быть непрерывной, а вторая – непрерывно дифференцируемой.

Как показано в работах [2–6], уравнение (1) обычно с достаточной для инженерных приложений точностью описывает колебания привода с переменным приведённым моментом инерции, систем с изменяющимися упругими характеристиками, с переменной структурой и др.

С помощью обобщённой подстановки Эйлера

$$q = y \exp\left[-\int_0^t n(t) dt\right],$$

приведём уравнение (1) к следующему виду:

$$\ddot{y} + p^2(t)y = F(t), \quad (2)$$

$$\text{где } p^2(t) = k^2(t) - n^2(t) - \dot{n}(t); \quad F(t) = Q(t) \exp\left[\int_0^t n(t) dt\right].$$

Опуская выкладки, приведённые в работах [2–6], получаем

$$y_* = A \sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega(t)}} \cos\left[\int_0^t \Omega(t) dt + \gamma\right] = A e^{-0,5(z-z_0)} \cos\left[\Omega_* \int_0^t e^z dt + \gamma\right], \quad (3)$$

где A , γ – амплитуда и фаза, определяемые начальными условиями; Ω_0 – произвольный параметр, имеющий размерность частоты; $z = \ln(\Omega/\Omega_*)$; $z_0 = z(0)$; $\Omega_0 = \Omega(0)$.

Связь между функцией $z(t)$ и переменной частотой $p(t)$ выражается следующим дифференциальным уравнением, соответствующим некоторому условному осциллятору при возмущении $2p^2(t)$.

$$\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2 + 2\Omega_*^2 e^{2z} = 2p^2(t). \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение (4) соответствует некоторому условному колебательному контуру (осциллятору) с «жёсткой» нелинейной характеристикой, в котором роль вынуждающей силы играет функция, пропорциональная квадрату «собственной» частоты. В качестве «удобного» положительного свойства этого осциллятора отметим, что *его параметры, отображённые в левой части уравнения, носят общий характер и не зависят от параметров системы.*

Коротко остановимся на нескольких приближённых решениях уравнения (4). При медленном изменении функции $p^2(t)$ реакция условного осциллятора на возмущение можно считать статическим. Тогда первыми двумя слагаемыми в левой части уравнения можно пренебречь, а следовательно, $\Omega = p$. При этом решение (3) отвечает ВКБ-приближению первого порядка. При линеаризации уравнения (4) условный осциллятор представляет собой систему с собственной частотой, равной $2\Omega_*$. Если принять Ω_* как среднее значение p и на этой частоте происходит пульсация собственной частоты исходной системы, то имеет место

главный параметрический резонанс. Таким образом, «силовому» резонансу условного осциллятора отвечает параметрический резонанс исходной системы.

Предположим, что известно частное решение этого уравнения z_* . Тогда решение однородного уравнения y_* определяется соотношением (3), а частное решение неоднородного уравнения (2) y_{**} находится с помощью двух линейно независимых решений y_1, y_2

$$y_{**} = \int_0^t F(s)\eta(t,s)ds, \quad (5)$$

где

$$\eta(t,s) = \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)\ddot{y}_2(s) - \dot{y}_1(s)y_2(s)}.$$

В рассматриваемом случае

$$y_1 = \Omega(t)^{-0,5} \cos \left[\int_0^t \Omega(\xi)d\xi \right]; \quad y_2 = \Omega(t)^{-0,5} \sin \left[\int_0^t \Omega(\xi)d\xi \right]. \quad (6)$$

Учитывая, что

$$\Delta(t) = y_1(t)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)y_2(t) = \text{const} = \Delta(0)$$

и опуская ряд упрощений, получаем несколько модифицированную формулу Дюамеля

$$y_{**} = \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} \int_0^t \left[\frac{F(s)}{\sqrt{\Omega(s)}} \sin \int_s^t \Omega(\xi)d\xi \right] ds. \quad (7)$$

Ниже приводится решение уравнения (2) в иной форме, нередко более удобной для анализа. Введём новую переменную

$$w = y \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega_0}} = ye^{0,5(\varepsilon - \varepsilon_0)}. \quad (8)$$

Тогда

$$w = w_0 \cos \Phi + w'_0 \sin \Phi + \int_{\Phi_0}^{\Phi} L(\psi) \sin(\Phi - \psi) d\psi, \quad (9)$$

где $w_0 = w(\Phi_0) = y_0$; $w'_0 = \frac{dw}{d\Phi}(\Phi_0) = \frac{\dot{y}_0}{\Omega_0} + 0,5 \frac{\dot{\Omega}_0}{\Omega_0^2}$; $L(\psi) = \frac{F(\psi)}{\Omega(\psi)\sqrt{\Omega_0\Omega(\psi)}}$.

Легко убедиться в том, что функция, определяемая соотношением (9), является общим решением дифференциального уравнения

$$w'' + w = L(\Phi). \quad (10)$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (4) z_* , то с помощью преобразования времени

$$\Phi = \Omega_* \int_0^t e^{z_*} dt + \Phi_0 \quad (11)$$

задача сводится к анализу одномассового осциллятора с постоянными параметрами, для которого роль времени выполняет функция Φ .

Далее рассмотрим способ формирования точного решения. Используем рассмотренный метод для определения параметров свободных и вынужденных колебаний при монотонном и достаточно резком изменении функции $p^2(t)$ [4]. Пусть на некотором отрезке времени $t \in [0, t_*]$ происходит монотонное изменение $p^2(t) \in [p_0^2, p_*^2]$. Зададимся частным решением z_* в виде некоторого семейства функций со свободными параметрами β_1, \dots, β_m

$$z_* = \tilde{z}(t, \beta_1, \dots, \beta_m). \quad (12)$$

После подстановки (12) в (4) получаем некоторую функцию $\tilde{p}^2(t, \beta_1, \dots, \beta_m)$, определённую следующим образом:

$$\tilde{p}^2(t, \beta_1, \dots, \beta_m) = 0,5 \ddot{z} - 0,25 \dot{z}^2 + \Omega_*^2 e^{2z}. \quad (13)$$

Далее запишем дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + \tilde{p}^2(t, \beta_1, \dots, \beta_m)u = W(t). \quad (14)$$

Очевидно, что уравнение (14) имеет точное аналитическое решение, определяемое зависимостями (8), (9), (11), (12), (13).

Можно показать, что полученное из (14) однородное дифференциальное уравнение при отмеченном способе формирования $\tilde{p}^2(t)$ является модификацией уравнения Бесселя следующего вида [7]:

$$\ddot{u} + \left[\frac{1}{2} \frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} - k^2 \right) \left(\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} \right)^2 \right] u = 0 \quad (15)$$

при $k = \frac{1}{2}$.

Действительно, решением уравнения (15) является [7]:

$$u = Z_k(\Phi) \sqrt{\frac{\Phi}{\dot{\Phi}}}, \quad (16)$$

где $Z_k(\Phi) = C_1 J_k(\Phi) + C_2 Y_k(\Phi)$.

Здесь J_r, Y_k – функции Бесселя первого и второго рода; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

При $k = 1/2$

$$J_{\frac{1}{2}}(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi\Phi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi; \quad Y_{\frac{1}{2}}(\Phi) = -J_{-\frac{1}{2}}(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi\Phi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \Phi.$$

Отсюда

$$u = (C_1 \sin \Phi + C_2 \cos \Phi) \sqrt{\frac{2}{\pi\Phi}}.$$

Этот результат при некотором видоизменении произвольных постоянных полностью совпадает с решением однородного уравнения, приведённым выше (см. (3), (8), (9)).

3. Семейства точных решений. Предварительно в целях удобства анализа перейдём в уравнении (14) к безразмерному времени $\tau = p_0 t$ и примем, что $\Omega_0 = p_0$. При этом

$$\tilde{v}^2(\tau, \beta_1, \dots, \beta_m) = 0,5\tilde{z}'' - 0,25\tilde{z}'^2 + e^{2\tilde{z}}. \quad (17)$$

Здесь $\tilde{v} = \tilde{p} / p_0$, а штрихом обозначено дифференцирование по τ .

Семейство 1. Рассмотрим двухпараметрическое семейство функций следующего вида:

$$\tilde{z} = -2 \ln(\beta_1 \tau + \beta_2). \quad (18)$$

Функции этого семейства являются решением дифференциального уравнения

$$\tilde{z}'' - 0,5\tilde{z}'^2 = 0. \quad (19)$$

Это интересное свойство данного семейства позволяет записать уравнение (17) в следующем простом виде:

$$\tilde{v}^2 = e^{2\tilde{z}} = \frac{1}{(\beta_1 \tau + \beta_2)^4}. \quad (20)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $\Omega = p_0 \exp \tilde{z} = \tilde{p}$, т.е. определяется как и в первом ВКБ-приближении. Однако здесь условие медленности изменения $p(t)$ не оговаривается, но в то же время полученное таким образом точное решение накладывает определённые ограничения на вид этой функции.

Определим параметры β_1 и β_2 , исходя из условия равенства функций $p^2(t)$ и $\tilde{p}^2(t)$ на границах промежутка. Примем, что $v = p / p_0$.

При $t = 0$ ($\tau = 0$) $v_0 = \tilde{v}_0 = 1$, при $t = t_*$ ($\tau = \tau_*$) $v_* = \tilde{v}_*$.

Отсюда при учёте (20)

$$\tilde{v}^2(\tau) = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{v_*}} - 1 \right) \frac{\tau}{\tau_*} + 1 \right]^{-4}. \quad (21)$$

Семейство 2. Рассмотрим следующее трёхпараметрическое семейство функций:

$$\tilde{z} = \ln(\beta_1 \tau + 1) + \beta_2 \tau + \beta_3. \quad (22)$$

Произведя подстановку (22) в (17), получаем

$$\tilde{v}^2 = e^{2\beta_2 \tau + \beta_3} (\beta_1 \tau + 1)^2 - 0,25 \left[\frac{3\beta_1^2}{(\beta_1 \tau + 1)^2} + \frac{2\beta_1 \beta_2}{\beta_1 \tau + 1} + \beta_2^2 \right]. \quad (23)$$

Используя условие $\tilde{v}_0 = 1$, имеем

$$e^{\beta_3} = 1 + 0,25 \left[3\beta_1^2 + 2\beta_1 \beta_2 + \beta_2^2 \right],$$

откуда

$$\tilde{v}^2 = e^{2\beta_2 \tau + \beta_3} (\beta_1 \tau + 1)^2 \left[1 + 0,25 (3\beta_1^2 + 2\beta_1 \beta_2 + \beta_2^2) \right] - 0,25 \left[\frac{3\beta_1^2}{(\beta_1 \tau + 1)^2} + \frac{2\beta_1 \beta_2}{\beta_1 \tau + 1} + \beta_2^2 \right]. \quad (24)$$

В отличие от предыдущего семейства влияние v_*^2 на характер изменения функции весьма незначительно.

Семейство 3. Пусть

$$\tilde{z} = \beta_3 \tau^3 + \beta_2 \tau^2 + \beta_1 \tau + \beta_0. \quad (25)$$

Параметры $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ определим из следующих дополнительных условий:

$$\tilde{p}(0) = p(0) = p_0; \quad \tilde{p}(t_*) = \Omega(t_*); \quad \Omega(t_*) = 0. \quad (26)$$

Последние два условия эквивалентны требованию

$$\tilde{z}'(\tau_*) = 0; \quad \tilde{z}''(\tau_*) = 0. \quad (27)$$

При этом функция \tilde{v}^2 принимает вид

$$\tilde{v}^2 = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_*} \right) - 0,25 \beta_2^2 \tau_* \left[2 \frac{\tau}{\tau_*} - \left(\frac{\tau}{\tau_*} \right)^2 - 1 \right] + e^{2\tilde{z}}. \quad (28)$$

Параметр β_2 определяется из условия $\tilde{v}(\tau_*) = v(\tau_*) = v_*$

$$v_*^2 = \left(1 - \beta_2 + 0,25 \beta_2^2 \tau_*^2 \right) \exp \left[-\frac{2}{3} \beta_2 \tau_*^2 \right]. \quad (29)$$

Семейство 4. Рассмотрим случай, когда $p(t)$ отображается кусочно-постоянной функцией. Подобная ситуация возникает в механизмах переменной структуры. Пусть

$$p = \begin{cases} p_0 & t < 0 & \text{участок I} \quad (v = 1) \\ p_1 & t < t_1 & \text{участок II} \quad (v = v_1) \\ p_0 & t > t_1 & \text{участок III} \quad (v = 1). \end{cases}$$

На участке I $z = z_0 = \ln(p/p_0) = 0$. На участке II имеем

$$z = \ln \frac{2v^2 v_0}{v^2 + v_0^2 + (v^2 - v_0^2) \cos 2v(\theta - \theta_0)}, \quad (30)$$

$$z' = \pm 2 \sqrt{(0,25 z_0'^2 + v^2 + e^{2z_0}) e^{z-z_0} - (v^2 + e^{2z})}.$$

На участке III справедливы зависимости (30), если принять $v_0 = v_1; \tau_0 = \tau_1; z_0 = z(\tau_1) = z_1; z_0' = z'(\tau_1) = z_1'$. Значение z_{\min} отвечает меньшему корню следующего квадратного уравнения, полученного на основании (30) при $z' = 0$:

$$e^{2z_{\min}} - e^{z_{\min}} [1 + v_1^2 + (1 - v_1^2) e^{-z_1}] + 1 = 0. \quad (31)$$

Согласно (3) значение z_{\min} определяет максимальную амплитуду при одиночном параметрическом импульсе

Точное решение уравнения (14) может быть принято в качестве первого приближения при решении уравнения (2); это приближение, как показывают расчёты, обычно оказывается весьма эффективным. В частном случае, когда $p^2(t)$ – медленно изменяющаяся функция, $\dot{z} \approx 0$ и $\ddot{z} \approx 0$, решение u , как уже отмечалось, совпадает с первым ВКБ-приближением.

Свободными параметрами β_1, \dots, β_m можно распорядиться таким образом, чтобы обеспечить «близость» функций $\tilde{p}^2(t)$ и $p^2(t)$ на промежутке $[0, t_*]$. Для определения параметров можно воспользоваться различными способами приближения. В частности, при квадратичном приближении должен быть минимизирован следующий функционал:

$$I = \int_0^{t_*} [p^2(t) - \tilde{p}^2(t)]^2 dt.$$

При этом должно удовлетворяться условие:

$$\int_0^{t_*} p^2 \frac{\partial \tilde{p}^2}{\partial \beta_i} dt = \int_0^{t_*} \tilde{p}^2 \frac{\partial \tilde{p}^2}{\partial \beta_i} dt; \quad (i = 1, \dots, m) \quad (32)$$

Как уже отмечалось, нередко при малых значениях t_* в силу относительно слабого влияния характера изменения $p^2(t)$ на исследуемое решение можно ограничиться заданием условий на границах промежутка $[0, t_*]$.

Последующие приближения в случае необходимости находятся с помощью преобразования [7]:

$$\ddot{y} + \tilde{p}^2(t)y = \Delta p^2(t)y + W(t), \quad (33)$$

где $\Delta p^2(t) = \tilde{p}^2(t) - p^2(t)$.

Отсюда на основании (6), (7), (14) получаем

$$y = u + \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} \int_0^t \left[\frac{\Delta p^2(s)y(s)}{\sqrt{\Omega(s)}} \sin \int_s^t \Omega(\xi) d\xi \right] ds. \quad (34)$$

Это уравнение является линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода, к которому применим метод последовательных приближений.

Второе приближение $y^{(2)}$ находится при подстановке в подынтегральное выражение $y^{(1)} = u$. Представляет интерес следующая оценка:

$$\begin{aligned} |y^{(2)} - y^{(1)}| &\leq \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} \int_0^t \left| \frac{\Delta p^2(s)u(s)}{\sqrt{\Omega(s)}} \right| \left| \sin \int_0^t \Omega(\xi) d\xi \right| ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} \int_{\Phi_0}^{\Phi} \Psi(\phi) |\sin(\Phi - \psi)| d\psi \leq \frac{1}{\sqrt{\Omega(t)}} [\max \Psi(\theta)] [1 - \cos \Delta\Phi + 2n], \end{aligned} \quad (35)$$

где $\Psi = \left| \frac{\Delta p^2}{\Omega^{1.5}} u \right|$; $\Phi_0 \leq \theta \leq \Phi$; $\Phi - \Phi_0 = \Delta\Phi + \pi n$; ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Анализ неравенства (35) показывает, что в случае, если фазовый интервал $\Phi - \Phi_0$ не превышает π (что характерно для резких изменений функции $p^2(t)$), возможное уточнение за счёт второго приближения не превышает $2(\Delta p^2 u / \Omega^2)_{\max}$. Аналогично могут быть получены последующие приближения, равномерно сходящиеся к точному решению [7].

Другой эффективный способ получения монотонной и равномерно сходящейся последовательности приближений основывается на методе квазилинеаризации, который предложен в работе [8]. В частности, в этой работе метод квазилинеаризации применён к решению уравнения Риккати, из которого, как известно, заменой переменных может быть получено линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Однако в практических приложениях следует иметь в виду слабую «конкурентоспособность» уточняющих процедур по сравнению с численными методами решения исходного дифференциального уравнения. Кроме того, приходится принимать во внимание достоверность исходной информации, при учёте которой эти уточнения нередко являются лишь кажущимися.

Достоинство рассматриваемого подхода в первую очередь связано с тем, что формируется не само решение, носящее осцилляционный характер, а некоторая монотонная или медленно меняющаяся функция $\tilde{p}^2(t)$. Это позволяет произвести эффективные критериальные оценки на стадии динамического синтеза системы, не прибегая к многократному решению дифференциальных уравнений (см. ниже).

4. Исследование изгибных колебаний консольной балки переменной длины на базе точных решений. Рассмотрим динамическую модель консольной балки переменной длины, показанную на рис.1. Подобная модель встречается при расчёте изгибных колебаний выдвигающихся шпинделей, игл ряда трикотажных машин и в ряде других случаев.

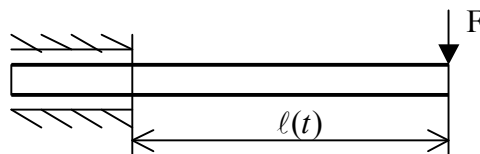


Рис.1. Динамическая модель.

Примем $l(t) = l_0 + x(t)$, где $x(t) = vt$, v – скорость. Трансформируем исходную динамическую модель балки с распределёнными параметрами в балку с приведенной сосредоточенной массой на её конце. Для рассматриваемой формы колебаний при приведении будем исходить из равенства собственных частот обеих моделей при фиксированной длине балки. На основании частотного уравнения $\cos \sigma l \cdot \text{ch} \sigma l = -1$ имеем $p_r = \sigma_r^2 \sqrt{EI/\rho}$, где E, I – модуль упругости и экваториальный момент инерции, ρ – погонная масса. При $r = 1, r = 2$ корнями частотного уравнения являются $\sigma_1 l = 1,875; \sigma_2 l = 4,694$. Опуская элементарные выкладки, для первой формы колебаний получаем $m(t) = 0,243\rho l(t); c(t) = 3EI / l(t)^3$. Отсюда

$$p(t)^2 = p_0^2 / (1 + \alpha t)^4, \tag{36}$$

где $p_0^2 = c(l_0) / m(l_0), \alpha = v / l_0$.

После перехода к новой переменной $\tau = p_0 t$, принимая $v = p / p_0$, получаем $v = \tilde{v}$, где согласно (19) \tilde{v} отвечает семейству 1 точных решений при $\beta_1 = \alpha / p_0 = v / (l_0 p_0); \beta_2 = 1$.

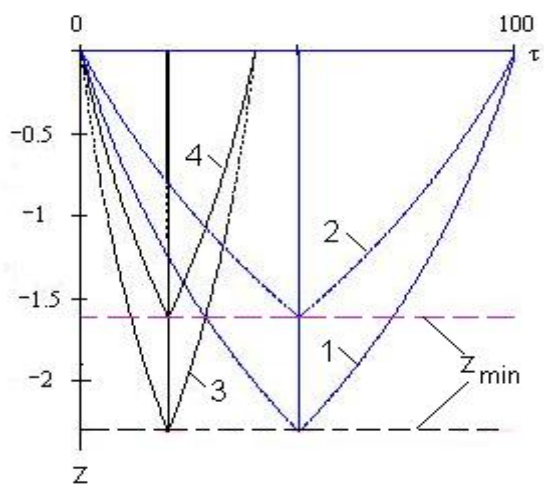


Рис.2. Графики $z(\tau)$: 1, 2 – $v_* = 0,1; 0,2$ при $\tau_* = 50$; 3, 4 – $v_* = 0,1; 0,2$ при $\tau_* = 50$.

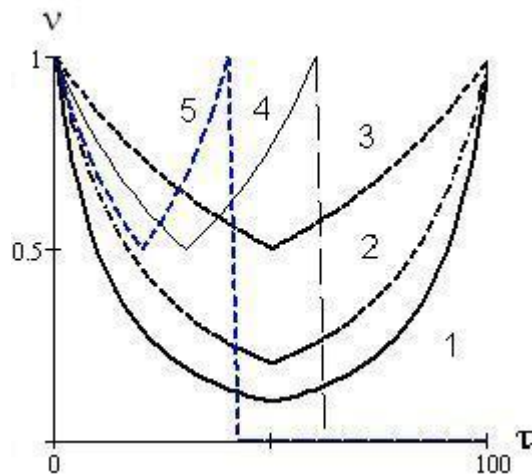


Рис.3. Графики $v(\tau)$: 1, 2, 3 – $v_* = 0,1; 0,2; 0,5$ при $\tau_* = 50$; 4, 5 – $v_* = 0,5$ при $\tau_* = 30; 20$.

На рис. 2, 3 отображены графики координаты условного осциллятора и соответствующие графики изменения безразмерной собственной частоты на интервале безразмерного времени $2\tau_*$, причём при $\tau = \tau_*$ происходит смена знака скорости v . Анализ этих графиков в первую очередь представляет интерес как возможность предсказать максимальное изменение

амплитуд свободных колебаний без решения исходного дифференциального уравнения. Действительно, согласно (3) имеем

$$\max y_* \leq A \exp[-0,5(z_{\min} - z_0)] \quad (37)$$

Приведенные графики иллюстрируют интересное свойство, что степень возрастания амплитуд к без учёта диссипации определяется лишь перепадом частот (параметр v_*) и не зависит от τ_* (рис.4, линии 1).

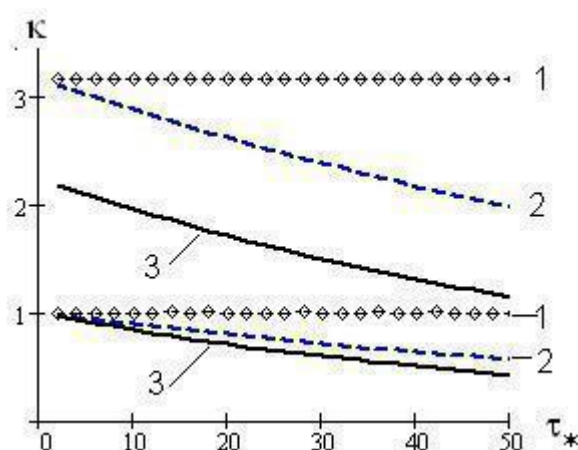


Рис. 4. Графики $\kappa(\tau_*)$: 1 – $v_* = 0,1; \delta = 0$; 2 – $v_* = 0,1; \delta = 0,03$; 3 – $v_* = 0,2; \delta = 0,03$.

При учёте конструкционного демпфирования имеем $q = y_* \exp[-\delta \int_0^t p(\xi) d\xi]$, где $\delta = \vartheta/(2\pi)$, ϑ – логарифмический декремент. На графиках нижние из двух одноимённых кривых 2 и 3 отвечают интервалу τ_* , а верхние – $2\tau_*$, т.е. полному циклу движения. Интеграл в показателе представляет собой изменение фазы колебаний, который после перехода к переменной τ равен $\tau/(1 + \beta_1 \tau)$.

На рис.5 приведены типовые графики свободных колебаний при отсутствии диссипации ($q = y_*$) и при её учёте. На графиках чётко виден рост амплитуд колебаний при переходе в зону низких частот.

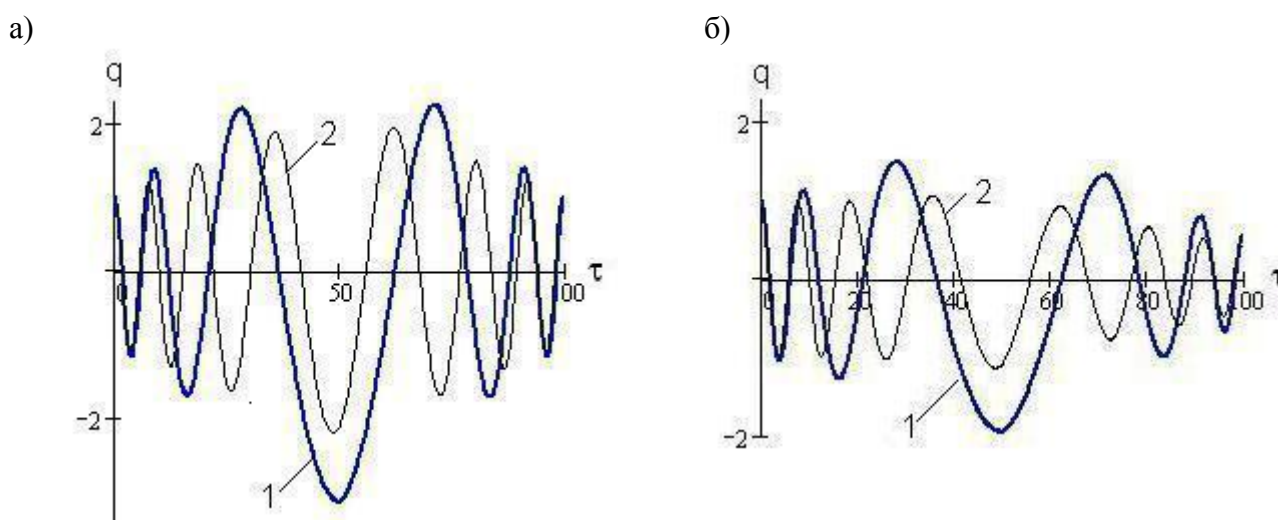


Рис. 5. Свободные колебания при $\delta = 0$ (а) и $\delta = 0,03$ (б): 1 – $v_* = 0,1$; 2 – $v_* = 0,2$.

Этот эффект, возникающий при нарушении условий динамической устойчивости на конечном интервале времени [2–6], при наличии диссипации проявляется в меньшей степени. В связи с этим может быть поставлена задача о критическом уровне диссипации, при котором обеспечивается затухающий характер свободных колебаний. На основании исследования этой проблемы применительно к нашему случаю получено следующее условие:

$$\delta > \delta_* = 0,5\beta_1 / (1 + \beta_1\tau). \quad (38)$$

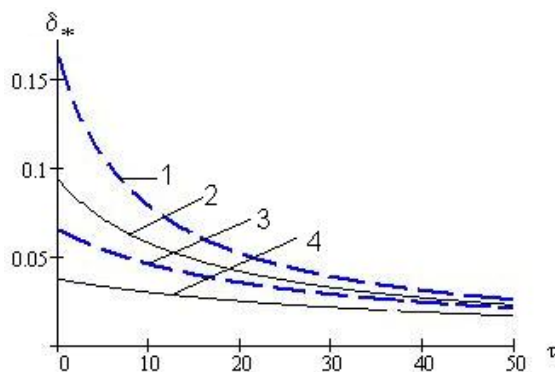


Рис. 6. Критическое значение коэффициента диссипации:
1, 2 – $\tau_* = 50$; $v_* = 0,1; 0,2$; 3, 4 – $\tau_* = 20$; $v_* = 0,1; 0,2$.

Можно показать, что амплитуда свободных колебаний лежит в интервале, ограниченном двумя предельными случаями, соответствующим скачкообразному и медленному изменению «собственной» частоты. При этом $A(0) / \sqrt{v_*} < \max y_* < A(0) / v_*$. При $v_*\tau_* > 2\pi$ изменение параметров можно считать медленным. Для определения вынужденных колебаний воспользуемся зависимостью (7), которая при учёте диссипации принимает вид

$$Y = \exp[-0,5z(\tau)] \int_0^\tau \{W(s) \exp[-0,5z(s) - \delta \int_s^\tau v(\xi) d\xi] \sin \int_s^\tau v(\xi) d\xi\} ds \quad (39)$$

Ниже приведены типовые графики вынужденных колебаний при $W = 1$, $\tau_* = 50$, $\delta = 0$ (рис.7, а), $\delta = 0,03$ (рис.7, б).

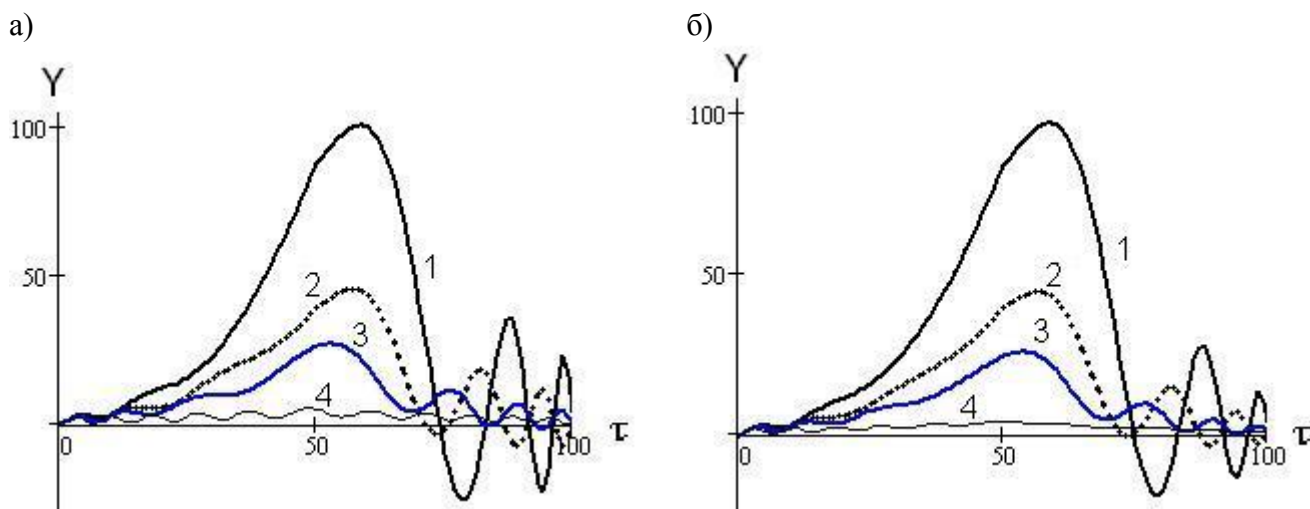


Рис. 7. Вынужденные колебания: $v_* = 0,1$; 2 – $v_* = 0,15$; 3 – $v_* = 0,2$; 4 – $v_* = 0,5$.

Из анализа графиков следует, что при существенном и резком изменении «собственных» частот система реагирует на постоянную силу почти как на мгновенное приложение нагрузки. В подобных случаях в пределах одного цикла диссипативные силы проявляются слабо.

Литература

1. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твёрдого тела. М.:Наука.1985.288.с.
2. Вульфсон И.И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени. //Прикладная математика и механика. №2. Т.33, 1969. С. 331–337.
3. Vulfson J.I. Analytical investigation of the vibration of mechanisms caused by parametric impulses. – Mechanism and Machine Theory. Vol.10, 1973. P.p. 305–313.
4. Вульфсон И.И. Динамические расчёты цикловых механизмов. Л.: Машиностроение, 1976. 309с.
5. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. 309 с.
6. Vulfson I. I. On the analytical investigation of nonstationary vibratory regimes by the method of fictitious oscillator // Вестник научно- технического развития. №3 (7), 2008. Pp.26–38.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.:Наука.1985. 783 с.
8. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: «Мир». 1968. 183 с.

Поступила: 18.04.11.