УДК 531.011

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА В КУРСЕ МЕХАНИКИ

© Ф.Ф. Прохоренко
Санкт - Петербургский государственный политехнический университет.
Санкт – Петербург, Россия
ff.hunt@mail.ru

Аннотация. *Предлагается получать уравнения Лагранжа из теоремы об изменении кинетической энергии для голономных и неголономных систем без использования понятий возможных , виртуальных , действительных перемещений и поворотов.*

Ключевые слова*: теорема об изменении кинетической энергии, уравнения Лагранжа для голономных и неголономных систем.*

Традиционно уравнения Лагранжа выводятся из уравнений Даламбера–Лагранжа для тел, состоящих из материальных точек, воздействия между которыми описываются только силами, хотя уравнения без какого-либо обоснования применяются для описания движения и твердых тел и твердых деформируемых тел, действия на тела - точки которых описываются силами и моментами, а в обобщенные координаты входят и углы поворота, что требует введения наряду с возможными (виртуальными) перемещениями $\delta \underline{r}$ и возможных поворотов $\delta \underline{\varphi}$. Это нетрудно сделать только для плоских движений, когда $\delta \underline{\varphi} = \underline{m}\, \delta \varphi$, где единичный вектор $\underline{m}$ перпендикулярен плоскости движения. В общем же случае

$$\delta \underline{\varphi} = \underline{\underline{Z}}^{-1} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{\underline{P}}}{\partial x_s} \cdot \underline{\underline{P}}^T \right) \right]_{\times} \delta x_s$$

где $\underline{\underline{P}}$ - тензор поворота, $\underline{\underline{Z}}$ - тензор-интегратор П.А. Жилина [1], - $\underline{\underline{A}}_{\times}$-векторный инвариант тензора $\underline{\underline{A}}$, x_s - обобщенные координаты; здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам.

Становится очевидной необходимость подробного изучения тензорного анализа, что для большинства технических факультетов ввиду принятой практики сокращения сроков изучения механики практически невозможно.

Вместе с тем следует заметить, что принцип Даламбера, опирающийся на первый фундаментальный закон изменения импульса (для точек–второй закон Ньютона) и на его обобщение для твердых тел-точек - на второй (закон изменения кинетического момента) требует введения новых понятий - возможных, виртуальных и действительных перемещений и поворотов. Подобный подход способен создать у изучающего механику впечатление, что кроме фундаментальных законов необходимы еще какие-то добавочные « принципы».

Мы покажем, что уравнения Лагранжа следуют из записанной в обобщенных координатах теоремы об изменении кинетической энергии, которая на основе первого и второго законов легко доказывается для систем, состоящих из материальных точек и твердых тел, воздействия на которые описываются силами и моментами; она же, разумеется , является частным случаем третьего фундаментального закона баланса энергии.

Принимается следующее утверждение: нестационарных связей в общепринятой со времен Лагранжа форме $\underline{R} = \underline{R}$ (x, t) нет; явное присутствие времени в описании положения тела объясняется тем, что некоторые обобщенные координаты по необъясняемым причинам постулируются известными функциями времени.

Обозначим все обобщенные координаты (в том числе и зависимости которых от времени объявляются известными) через $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$.Линейные скорости и угловые скорости являются **однородными** линейными функциями обобщенных скоростей

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial x_s}\dot{x}_s; \quad \underline{\omega} = \underline{p}_s\,\dot{x}_s\,, \qquad \underline{p}_s = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \underline{\underline{P}}}{\partial x_s}\cdot \underline{\underline{P}}^T\right)\right]_\times$$

и, поскольку общий вид кинетической энергии для тел- точек имеет вид

$T = \frac{1}{2}\, m\underline{v}_c \cdot \underline{v}_c + \frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot \underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}$, то кинетическая энергия всей системы будет **однородной квадратичной формой** обобщенных скоростей $T = T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\, a_{sk}(x)\dot{x}_s\dot{x}_k$.

Тогда $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial x_s}\dot{x}_s + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\ddot{x}_s = \frac{\partial T}{\partial x_s}\dot{x}_s + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\dot{x}_s\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\right)\dot{x}_s$.

По теореме Эйлера об однородных функциях $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\dot{x}_s = 2T$, следовательно

$$\dot{T} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_s}\right]\dot{x}_s$$

Мощность внешних и внутренних воздействий для тела-точки является однородной линейной формой обобщенных скоростей $N = \underline{F}\cdot \underline{v}_c + \underline{M}^c \cdot \underline{\omega} = Q_s \cdot \dot{x}_s$,
где коэффициенты при обобщенных скоростях **по определению** называются обобщенными силами. Теорема об изменении кинетической энергии $\dot{T} = N^{ext} + N^{int}$ принимает вид

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_s} - Q_s\right]\cdot \dot{x}_s = 0 \qquad (\textstyle\sum_s !) \qquad (1)$$

Вследствие того, что теорема верна для **всех** движений, которые определяются произвольными начальными условиями и произвольными же обобщенными силами и из-за независимости обобщенных скоростей (для голономных систем) все коэффициенты при скоростях равны нулю:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_s} = Q_s, \quad s = (1,2\dots n) \qquad (2)$$

Это и есть система уравнений Лагранжа, которая определяет **действительное** движение.

На первый взгляд может показаться, что перечисленных факторов произвольности и независимости скоростей недостаточно, чтобы каждая из скобок в сумме (1) была равна нулю, поскольку внутри скобок имеются те же скорости.

Заметим, что уравнение (1) получено на основе первых двух фундаментальных законов, а внутри скобок стоят проекции этих законов на независимые для голономных систем

базисные векторы $\frac{\partial \underline{R}}{\partial x_s}$ и $\underline{p}_s$ множества векторов положения материальных точек и тензоров поворота твердых тел, входящих в систему.

Рассмотрим для простоты тело , состоящее из материальных точек. Умножим каждое уравнение скалярно на $\frac{\partial \underline{R}_k}{\partial x_s}$ и просуммируем их:

$$m_k \frac{d\underline{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \underline{R}_k}{\partial x_s} = \underline{F}_k \cdot \frac{\partial \underline{R}_k}{\partial x_s}, \qquad (\textstyle\sum_k !), \quad (s=1,2\dots n). \qquad (3)$$

Справа в (3) стоит обобщенная сила Q_s, а левая часть стандартным образом (см. например [3]) преобразуется с использованием тождеств Лагранжа, которые в нашем подходе ввиду отсутствия времени в описании положения $\underline{R_k} = \underline{R_k}(x)$ совершенно очевидны:

$$\underline{v}_k = \dot{\underline{R}}_k = \frac{\partial \underline{R}_k}{\partial x_s}\dot{x}_s, \Rightarrow \frac{\partial \underline{v}_k}{\partial \dot{x}_s} = \frac{\partial \underline{R}_k}{\partial x_s},$$

и $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{R}_k}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial \underline{v}_k}{\partial x_s}$ ввиду изменения порядка дифференцирования.

Имеем $$m_k \frac{d\underline{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial \underline{R}_k}{\partial x_s} = \frac{d}{dt}\left(m_k \underline{v}_k \cdot \frac{\partial \underline{R}_k}{\partial x_s}\right) - m_k \underline{v}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{R}_k}{\partial x_s}\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(m_k \underline{v}_k \cdot \frac{\partial \underline{v}_k}{\partial \dot{x}_s}\right) - m_k \underline{v}_k \cdot \frac{\partial \underline{v}_k}{\partial x_s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_s}, \qquad (4)$$

что и требовалось показать.

Такой же результат получим и для твердого тела , умножая уравнение второго закона

$(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega})' = \underline{M}_c$ **на** $\underline{p}_s$:

$$(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega})' \cdot \underline{p}_s = \frac{d}{dt}\left[\left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right)\cdot \underline{p}_s\right] - \left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right)\cdot \frac{d\underline{p}_s}{dt}. \qquad (5)$$

С помощью тождеств типа Лагранжа для вращательных движений

$$\underline{p}_s = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \dot{x}_s}, \quad \dot{\underline{p}}_s = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} + \underline{\omega} \times \underline{p}_s \qquad (6)$$

(5) также приводится (см. приложение) к виду (4), где $T = \frac{1}{2}\,\underline{\omega}\cdot \underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}$.

Следует подчеркнуть, что изложенный выше подход позволяет вычислять обобщенные силы (воздействия), которые обеспечивают постулируемую ранее зависимость некоторых координат от времени.

Пример 1. Материальная точка массы **m** подвешена на нити, длина которой изменяется по закону *l(t)* .

Система имеет две обобщенные координаты - ***l*** и φ . Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}\, m(\dot{l}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2)$, мощность $N = \left(m\underline{g} + \underline{S}\right)\cdot \underline{v} = (mg\cos\varphi - S)\,\dot{l} + (-mgl\sin\varphi)\dot{\varphi}$

Уравнения Лагранжа

$$m(\ddot{l} - l\dot{\varphi}^2) = mg\cos\varphi - S$$
$$m\frac{d}{dt}(l^2\,\dot{\varphi}) = -mgl\sin\varphi$$

Из первого уравнения определяется натяжение нити S.

Заметим также, что запись теоремы в виде (1) позволяет получать уравнения и для неголономных систем с линейными связями между скоростями вида

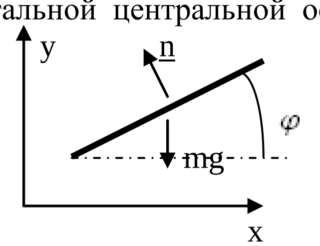
$$b_{mk}(x)\dot{x}_k = 0\,, \quad m = 1,2\dots q\ . \qquad (8)$$

Для этого необходимо выразить из (8) q скоростей через (n-q) «независимых» $\dot{x}_s$, подставить их в (1) и привести к аналогичной записи

$$[F_s(\ddot{x},\dot{x},x)]\,\dot{x}_s = 0, \quad s = 1,2\dots.n-q\,,$$

откуда следуют уравнения $F_s(\ddot{x},\dot{x},x)=0$, $s=1,2\ldots.n-q$, последние совместно с уравнениями связей (3) , которые, разумеется, дифференцируются, и замыкают задачу.

Пример 2. Движение стержня в вертикальной плоскости , при котором скорость центра масс направлена вдоль стержня. Масса стержня **m** , момент инерции относительно горизонтальной центральной оси ***J*.**



Обобщенные координаты – декартовы координаты центра масс x,y и угол поворота φ .

Кинетическая энергия $T=\frac{1}{2}$ m$(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ $+\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$, мощность $N=\left(\underline{mg}+\underline{S}\right)\cdot\underline{v}=(-mg\,sin\varphi)\,\dot{y}$, где перпендикулярная к стержню сила $\underline{S}=S\underline{n}$ обеспечивает выполнение уравнения связи $\underline{v}\cdot\underline{n}=-\dot{x}sin\varphi+\dot{y}cos\varphi=0$.

Уравнение (1) имеет вид $(m\ddot{x})\dot{x}+(m\ddot{y}+mg\sin\varphi)\dot{y}+(J\ddot{\varphi})\dot{\varphi}=0$.

Подставляя в него уравнение связи $\dot{y}=tg\varphi\,\dot{x}$ и $\ddot{y}=\ddot{x}\,tg\varphi+\frac{1}{cos^2\varphi}\dot{x}\dot{\varphi}$, получим

$$\left[m\ddot{x}(1+tg^2\varphi)+m\dot{x}\dot{\varphi}\frac{sin\varphi}{cos^3\varphi}+mg\,tg\varphi\right]\dot{x}+[J\ddot{\varphi}]\dot{\varphi}=0,$$

откуда $\begin{cases}\ddot{x}+\dot{x}\dot{\varphi}\,tg\varphi+g\sin\varphi\cos\varphi=0\\ J\ddot{\varphi}=0\end{cases}$

Второе уравнение сразу дает $\varphi=\omega t+\alpha$, а первое заменой $\dot{x}=u,\ddot{x}=\frac{du}{d\varphi}\omega$ приводится к линейному уравнению $\frac{du}{d\varphi}+u\,tg\varphi+\frac{g}{\omega}\sin\varphi\cos\varphi=0$, решение которого имеет вид

$u=A\cos\varphi+\frac{g}{\omega}\cos^2\varphi$, откуда находим $x(t)$, а из уравнения связи $y(t)$. .

$$x(t)=\frac{A}{\omega}sin\varphi+\frac{g}{2\omega}t+\frac{g}{4\omega^2}\sin 2\varphi+B,$$

$$y(t)=-\frac{A}{\omega}\cos\varphi-\frac{g}{4\omega^2}\cos 2\varphi+C\ ;\ \varphi=\omega t+\alpha.$$

Эта задача приводится в книге [2], где она решалась методом неопределенных коэффициентов Лагранжа и с помощью уравнений Аппеля.

В заключение замечу, что автору неизвестны примеры, где предлагаемый способ приводил бы к результатам, отличным от получаемых из уравнений Чаплыгина, Аппеля, Воронца.

Приложение.

Тождества типа Лагранжа для вращательных движений и их применение для получения уравнений.

Первое тождество следует из формулы Пуассона:

$$\dot{\underline{\underline{P}}}=\frac{\partial\underline{\underline{P}}}{\partial x_s}\dot{x}_s=\left(\underline{p}_s\dot{x}_s\right)\times\underline{\underline{P}}=\underline{\omega}\times\underline{\underline{P}}\quad\Rightarrow\quad\underline{p}_s=\frac{\partial\underline{\omega}}{\partial\dot{x}_s}$$

Второе получим, приравнивая смешанные производные от тензора поворота по координате x_s и по времени t:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\underline{\underline{P}}}{\partial x_s}\right]=\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\frac{d\underline{\underline{P}}}{dt}\right]\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\underline{p}_s\times\underline{\underline{P}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\underline{\omega}\times\underline{\underline{P}}\right)\Rightarrow$$

$$\dot{\underline{p}}_s\times\underline{\underline{P}}+\underline{p}_s\times\left(\underline{\omega}\times\underline{\underline{P}}\right)=\frac{\partial\underline{\omega}}{\partial x_s}\times\underline{\underline{P}}+\underline{\omega}\times\left(\underline{p}_s\times\underline{\underline{P}}\right).$$

Умножим (для удобства) это равенство справа на $\underline{\underline{P}}^T$ $(\underline{\underline{P}}\cdot\underline{\underline{P}}^T=\underline{\underline{E}})$

$$\dot{\underline{p}}_s\times\underline{\underline{E}}+\underline{p}_s\times\left(\underline{\omega}\times\underline{\underline{E}}\right)=\frac{\partial\underline{\omega}}{\partial x_s}\times\underline{\underline{E}}+\underline{\omega}\times\left(\underline{p}_s\times\underline{\underline{E}}\right)$$

и с помощью тождеств $\underline{a} \times \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \times \underline{a}$ и $\underline{a} \times \underline{\underline{E}} \times \underline{b} = \underline{b}\,\underline{a} - (\underline{b} \cdot \underline{a})\underline{\underline{E}}$

получим $\dot{\underline{p}}_s \times \underline{\underline{E}} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} \times \underline{\underline{E}} + \underline{p}_s\underline{\omega} - \underline{\omega}\,\underline{p}_s$.

Последние два слагаемых – кососимметрический тензор, представимый в виде $(\underline{\omega} \times \underline{p}_s) \times \underline{\underline{E}}$, откуда и следует второе тождество (7)

$$\dot{\underline{p}}_s = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} + \underline{\omega} \times \underline{p}_s.$$

С помощью этих тождеств покажем справедливость преобразования

$$(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega})^{\cdot} \cdot \underline{p}_s = \frac{d}{dt}\left[\left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right) \cdot \underline{p}_s\right] - \left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right) \cdot \frac{d\underline{p}_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_s}.$$

для вращательной составляющей энергии $T = \frac{1}{2}\,\underline{\omega} \cdot \underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}$.

С учетом симметричности тензора инерции и первого тождества имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} = \left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right) \cdot \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \dot{x}_s} = \left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right) \cdot \underline{p}_s.$$

Вычислим теперь $\frac{\partial T}{\partial x_s} = \left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right) \cdot \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} + \frac{1}{2}\,\underline{\omega} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\underline{\underline{I}}^c\right) \cdot \underline{\omega}$.

Имеем $\frac{\partial}{\partial x_s}\underline{\underline{I}}^c = \frac{\partial}{\partial x_s}\left[\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{I}}_0^c \cdot \underline{\underline{P}}^T\right] = \frac{\partial \underline{\underline{P}}}{\partial x_s} \cdot \underline{\underline{I}}_0^c \cdot \underline{\underline{P}}^T + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{I}}_0^c \cdot \frac{\partial \underline{\underline{P}}^T}{\partial x_s} =$

$$= \underline{p}_s \times \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{I}}_0^c \cdot \underline{\underline{P}}^T + \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{I}}_0^c \cdot \left(\underline{p}_s \times \underline{\underline{P}}\right)^T = \underline{p}_s \times \underline{\underline{I}}^c - \underline{\underline{I}}^c \times \underline{p}_s .$$

Теперь $\frac{1}{2}\,\underline{\omega} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\underline{\underline{I}}^c\right) \cdot \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \left[\underline{p}_s \times (\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega})\right] = \left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right) \cdot \left(\underline{\omega} \times \underline{p}_s\right)$

и, с учетом второго тождества

$$\frac{\partial T}{\partial x_s} = \left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right) \cdot \left[\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial x_s} + \underline{\omega} \times \underline{p}_s\right] = \left(\underline{\underline{I}}^c \cdot \underline{\omega}\right) \cdot \dot{\underline{p}}_s .$$

Литература

1. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве.- Санкт-Петербург,2001.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике.- М., Наука, 1966.
3. Айзерман М.А. Классическая механика.- М., Наука, 1974.

Поступила: 14.02.11.