УДК 534

РАСЧЕТ СЛУЧАЙНЫХ ВИБРОПОЛЕЙ В ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ И ОГРАНИЧИТЕЛЯМИ ХОДА МЕТОДАМИ ДИФФУЗИОННЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В.Л. КРУПЕНИН

Изучаются случайные вибрации решетчатой конструкции с периодической структурой, колеблющейся вблизи плоского препятствия, установленного параллельно плоскости статического равновесия конструкции. Сама конструкция образована системой безынерционных упругих струн, образующих прямоугольные ячейки, в вершине каждой из которых находятся точечные абсолютно твердые тела. Возбуждение колебаний осуществляют случайные широкополосные силы типа белых шумов. При ряде предположений задача точно решается методами диффузионных марковских процессов, которые дают возможность найти представления для многомерных совместных плотностей вероятностей, описывающих случайный виброударный процесс.

1. Рассмотрим прямоугольную решетку [1], составленную из N_1xN_2 упругих линейных струн, защемленных на концах и имеющих соответственно длины L_1 и L_2 (рис.1). Каждая струна нумеруется при помощи индексов k = 1,2,., N_1 и q= 1,2.. N_2. Решетка содержит N_1N_2 вершин, в каждой из которых помещены точечные абсолютно твердые тела с массами m. Предполагается, что прямоугольные ячейки решетки одинаковы, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка (дискретный аналог мембраны) анизотропна. Струнные элементы предполагаются безынерционными. Крепления струн в узлах считаются абсолютно жесткими, а натяжения струн настолько большими, что их изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» имеет длину ΔL_1; «вертикальная» - ΔL_2 . Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение T_1 , а «вертикальные участки» - соответственно T_2.

Далее предполагается, что параллельно плоскости статического равновесия решетки на расстоянии $\Delta>0$ установлена прямая стенка, с которой точечные тела, находящиеся в узлах решетки могут совершать абсолютно упругие соударения (удары предполагаются прямыми и центральными).

Таким образом, динамика решетчатой конструкции может быть описана посредством $N= N_1N_2$ функций состояния $u_{kq}(t)$, где индексы $k=1,2,..\ N_1$; $q=1,2,..\ N_2$. При этом каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Будем считать, что первый по счету индекс (в данном случае k – нумерует струну, расположенную «слева направо» или наоборот - рис.1), а второй индекс (в данном случае q – «снизу вверх» или наоборот, рис 1).

В соответствии со сказанным, если при $t=t_0$ для каких либо k и q происходит соударение, то [2,3]

$$\dot{u}_{kq}(t_0-0)= -\dot{u}_{kq}(t)(t_0+0)<0\ ;\ u_{kq}(t_0) = \Delta;\ \ u_{kq}\leq \Delta. \qquad (1)$$

Третье входящее сюда соотношение показывает невозможность точечных тел оказаться «за ограничителем».

Пусть вынуждающие силы, действующие на каждое из массивных точечных тел [2,3], даются случайными некоррелированными широкополосными процессами $\xi_{kq}(t)$ типа белых шумов с одинаковыми интенсивностями 2S:

$<\xi_{kq}\,\xi_{rs}>=2S\delta_{kq}\,\delta_{rs}\ \ \delta(t-t^{/})$; δ_{kq}, δ_{rs} –символы Кронекера (индексы k, q $=1,2,..\ N_1$; r, $s=1,2,..\ N_2$) угловые скобки обозначают операцию статистического усреднения; $\delta(t)$ – δ –функция Дирака. Модель системы построим следующим образом.

Считая, что функции состояния координаты u_{kq} отсчитываются от точек, лежащих в плоскости равновесия конструкции, а также предполагая, что рассеяние энергии пропорционально абсолютным скоростям каждой частицы, запишем систему линейных дифференциальных уравнений, описывающую движение решетчатой конструкции в промежутках между соударениями. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то для всех значений индексов имеем N уравнений:

$$m\ddot{u}_{kq}+b\dot{u}_{kq}+c_1(2u_{kq}-u_{(k-1,q)}-u_{(k+1,q)})+c_2(2u_{kq}-u_{(k,q-1)}-u_{(k,q+1)})=\xi_{kq}(t); \qquad (1)$$

здесь соответственно обозначено:$c_{1,2} = T_{1,2} / \Delta L_{1,2}$– коэффициенты упругости b – коэффициент демпфирования. Граничные условия защемления можно записать как $u_{k,q}=0$, при $k=0;(N_1+1)$ и $q=0;(N_2+1)$ (ср. [1-3]).

Функция Гамильтона $H(u_{kq};y_{kq})\equiv H(u_{11},u_{12},\ldots,u_{1,N1},\ldots u_{N2,N2};y_{11},y_{12},\ldots,y_{1,N1},\ldots y_{N2,N2})$, такой системы, определяющая уравнения движения (1) может быть записана в виде:

$$H(u_{kq}; y_{kq})=\sum_{(k,q)} {}^1\!/_2\, y^2_{kq}+{}^1\!/_2\,[\sum_{(k)} c_1(u_{k1}-u_{k,N2})^2+\sum_{(q)} c_2(u_{1q}-u_{N1,q})^2$$

$$+\sum_{(k=2)} c_2(u_{kq}-u_{k,(q-1)})^2+\sum_{(q=2)} c_1(u_{1q}-u_{N1,q})^2]+\ldots\ldots, \quad (2)$$

где суммирование ведется по индексам k и q, изменяющимся в указанных диапазонах и введено обозначение $y_{kq}\equiv u_{kqt}$ – абсолютная скорость каждого точечного тела. Без ограничения общности, предполагается, что m=1, так что гамильтоновы переменные здесь (y_{kq},u_{kq}); суммирование в третьем и четвертом членах начинается от значения k,q=2; многоточие обозначает отброшенные члены высших порядков.

2. Для решения поставленной задачи, то есть для описания искомого случайного процесса $\{u_{kq}(t);y_{kq}(t))\}$ воспользуемся методами диффузионных марковских процессов [4-6]. Предполагая процесс стационарным, будем искать его 2N – мерную стационарную совместную плотность вероятностей $p(u_{11},u_{12},\ldots,u_{1,N1},\ldots u_{N2,N2}; y_{11},y_{12},\ldots,y_{1,N1},\ldots y_{N2,N2})\equiv p(u_{kq},y_{kq})$; $(N=N_1N_2)$. Запишем уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для уравнений движения (1) [4]:

$$\sum_{(k,q)} [\{H,p\}_{kq}-b\,\partial/\partial y_{kq}(y_{kq}p)-{}^1\!/_2\, S\, \partial^2 p/\partial y^2_{kq}]=0, \quad (3)$$

причем $\{H,p\}_{kq}\equiv(\partial H/\partial y_{kq})(\partial p/u_{kq})-(\partial H/\partial u_{kq})(\partial p/y_{kq})$ – скобка Пуассона для частицы, расположенной в узле решетки, пронумерованном индексами k и q.

Уравнение (3) необходимо решать с учетом условий (1). Первое из этих условий приводит к требованию четности функции $p(u_{kq},y_{kq})$ по скоростям y_{kq} и, кроме того, недостижимость бесконечных энергий приводит к требованию стремления этой функции к нулю при $y_{kq}\to\pm\infty$. Второе условие (1) приводит к ограничениям на область изменения координат. Описанные условия и дают ограничения, добавляемые к уравнению ФПК (3).

Функция $p(u_{kq}(t);y_{kq}(t))$ от 2N $(N=N_1N_2)$ переменных, удовлетворяющая (3) и указанным ограничениям – описывает известное в статистической физике каноническое распределение Гиббса [4] (ср. [2,3]), имеющее вид:

$$p(u_{kq};y_{kq})=C\exp\{-2b/S[H(u_{kq};y_{kq})]\},\ u_{kq}\in \mathbf{X}=\{u_{kq}\,|\,-\infty<u_{kq}\le\Delta\}, \quad (4)$$

где множество **X** описывает ограничения, накладываемые на координаты системы, С – постоянная нормировки, определяемая из соотношения

$$\int_{\mathbf{X}}\int_{-\infty}^{\infty} p(u_{kq};y_{kq})\mathbf{du_{kq}}\mathbf{dy_{kq}}=1, \quad (5)$$

где символы $\mathbf{du_{kq}}$ и $\mathbf{dy_{kq}}$ обозначают произведения соответствующих дифференциалов. Распределение (4) удовлетворяет всем сформулированным выше дополнительным условиям. И при его посредстве можно полностью описать искомый процесс.

В рамках данной модели это описание будет точным.

3. Распределение Гиббса отвечает статистически независимым случайным процессам $u_{kq}(t)$ и $y_{kq}(t)$. Выполнив в (4) интегрирование по всем $u_{kq} \in \mathbf{X}$**,** приходим к известному [4-6] распределению Максвелла по скоростям:

$$p(y_{kq}) = C_1 \exp\,[-2b/\,S \sum_{(k,q)} {}^1\!/_2\; y^2_{kq}]. \qquad (6)$$

Данное N – мерное распределение является нормальным. Для того чтобы привести выражение (6) к «классическому» виду достаточно, отказавшись от двойной индексации, перенумеровать координаты и перейти к «сплошной» нумерации от 1 до $N=N_1N_2$. Распределение (6) многократно изучалось [5,6]. Для рассматриваемых здесь виброударных процессов наибольший интерес представляют характеристики импульсов ударов $J_{kq} =2|y_{kq}|$. Воспользуемся соотношениями, полученными в [2,3].

После соответствующего интегрирования, оказывается $C_1=[b/\pi S_0]^{0,5N}$. Для определения совместной N – мерной плотности вероятностей $p(\mathbf{J})=p(J_{11},J_{12},\ldots.J_{N1N2})$. Рассматривая случайные процессы J_{kq} как детерминированные функции случайных процессов y_{kq}, с учетом их стационарности, находим

$$p(\mathbf{J}) =[b/\pi S_0]^{0,5N}\, C_1 \exp\,[-b/\,4S \sum_{(k,q)} J^2_{kq}],\ .\ J_{kq} \geq 0. \qquad (7)$$

Формула (7) несет основную информацию о силах удара в случае, если возник случайный виброударный процесс. Неравенства, входящее в (7), означают, что распределения импульсов - усеченные нормальные. Случайные процессы $J_{kq}(t)$ – независимы. Легко получить их одномерные или какие-либо многомерные характеристики.

Рассмотрим, например, одномерные характеристики. Плотность вероятностей процесса $J_{\alpha\delta}$ для фиксированного узла, пронумерованного индексами α и δ, получим, проинтегрировав (7) по всем J_{kq}, при $k \neq \alpha$, $q \neq \delta$: $p(J_{\alpha\delta})=(b/\pi S)^{0,5} \exp\,[-b/\,4S\, J^2_{\alpha\delta}\,]$, $J_{\alpha\delta} \geq 0$.

Для нечетных и четных начальных моментов имеем соответственно: $M^{(2n+1)}(J_{\alpha\delta})=0,5(b/\pi S)^{0,5} n![b/2\pi S]^{-(n+1)}$; $M^{(2n)}(J_{\alpha\delta})=(2n-1)!!(2S/b^{-1})^n$. В частности, для математического ожидания (n=0) найдем $M^{(1)}(J_{\alpha\delta})=(4S/\pi b)^{0,5}$. Подобным образом определяются и центральные моменты. Например, для дисперсии импульса находим после вычислений: $D(J_{\alpha\delta})=2S(1-2\pi^{-1})b^{-1}$.

4. Рассмотрим случайные конфигурации, возникающие при вибрации решетки. Выполнив в (5) интегрирование по скоростям, приходим к распределению Больцмана по координатам [4-6]:

$$p(u_{kq})=C_2 \exp\,[-2b/SU(u_{kq})],\ u_{kq} \in \mathbf{X}=\{u_{kq}| -\infty < u_{kq} \leq \Delta\}, \qquad (8)$$

где U – потенциальная энергия системы, C_2 – нормировочная постоянная (ввиду громоздкости явное выражение для нее не приводится - ср.[3]). В данном случае [см.(2)]

$$U(u_{kq})={}^1/_2\,[\sum_{(k)} c_1(u_{k1}-u_{k,N2})^2+\sum_{(q)} c_2(u_{1q}-u_{N1,q})^2+\sum_{(k=2)} c_2(u_{kq}-u_{k,(q-1)})^2+\sum_{(q=2)} c_1(u_{1q}-u_{N1,q})^2]\ (9)$$

Имея соотношения (8) и (9), можно полностью описать «конфигурационные» характеристики системы: типы случайных профилей, их статистические характеристики и др.

Одной из наиболее актуальных оказывается задача об определении частот появления тех или иных случайных конфигураций решетки при выбросе узловых тел на ограничитель.

Легко видеть, что при функционировании рассматриваемой системы наиболее часто будет регистрироваться равновесная конфигурация. Определим среднюю «частоту» появления такой конфигурации Ω как среднее число пересечений равновесного уровня $u_{kq}=0$ ($k=1,2,\ldots N_1$; $q=1,2,\ldots N_2$) при $y_{kq}>0$:

$$\Omega=\int_0^\infty \prod_{(k)}\prod_{(q)} y_{kq}\, p(0,0,\ldots;y_{11},,,,,,,, y_{kq}, \quad y_{N1N2})\mathbf{dy_{kq}},$$

или, внося сюда (4) и, учитывая (9), найдем искомое значение средней частоты

$$\Omega=C\int_0^\infty \prod_{(k)}\prod_{(q)} y_{kq} \exp\,[-2b/\,S\ \sum_{(k,q)}\ {}^1/_2\ y^2_{kq}]\,\mathbf{dy_{kq}}= C(S/8b)^n\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Рассмотрим все конфигурации решетки такие, что в некоторый произвольный момент времени хотя бы одно из узловых тел взаимодействует с ограничителем. Обозначим такую конфигурацию $u[\lambda,\Delta]$, где индекс $\lambda\in\Lambda$ изменяется на некотором множестве (Λ) и нумерует каждую из описанных конфигураций. (Число элементов множества Λ равно, очевидно, 2^N.) Обозначим среднюю частоту появления конфигурации $\omega\{u[\lambda,\Delta]\}$. Подсчет проведем по формуле:

$$\omega\{u[\lambda,\Delta]\}= C\int_0^\infty \prod_{(k)}\prod_{(q)} y_{kq} \exp\,\{-8b/S[U[u[\lambda,\Delta]]+\sum_{(k,q)}\ {}^1/_2\ y^2_{kq}]\,\mathbf{dy_{kq}},$$

где $U[u[\lambda,\Delta]]$– значение потенциальной энергии (9) при реализации конфигурации, нумеруемой индексом λ.

Из этой формулы и также формулы (10) следует, что

$\omega\{u[\lambda,\Delta]\}=\Omega\exp\{-8b/S[U[u[\lambda,\Delta]]\}.$

Обозначим $\eta(\lambda.,\Delta;U)\equiv\omega\{u[\lambda,\Delta]\}/\Omega$ относительную частоту появления конфигурации $u[\lambda,\Delta]$. Из последнего соотношения следует:

$$\eta(\lambda.,\Delta;U)=\exp\{-8b/S[U[u[\lambda,\Delta]]\}. \quad (11)$$

Таким образом, как и в случае простых цепочек [2], относительно чаще смогут появляться конфигурации, обладающие меньшей потенциальной энергией. То есть, чем меньше изломов имеет конфигурация, тем относительно чаще она появляется. При этом наличие экспоненты в формуле (11) показывает, что рост потенциальной энергии конфигурации весьма быстро делает весьма маловероятной возможность регистрации каких-либо «экзотических» конфигураций с сильно изломанными профилями. Сказанное оказывается тем более верным при больших уровнях затухания.

На рис 2 показаны варианты относительно часто регистрируемых профилей. На рис. 3 – показан пример относительно редко регистрируемого профиля.

В заключении заметим, что сделанный вывод полностью справедлив только при линейности безинерционных элементов решетки. Введение нелинейных элементов может исказить или даже существенно изменить описанную выше картину. Однако использованная методика анализа существенных изменений не претерпит.

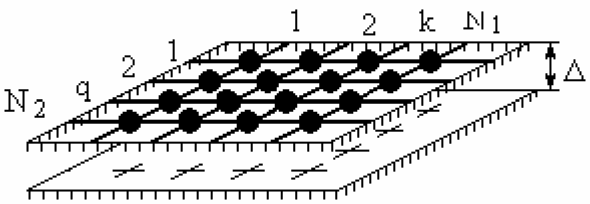

Рис. 1

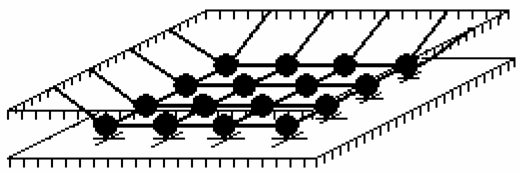

Рис 2.

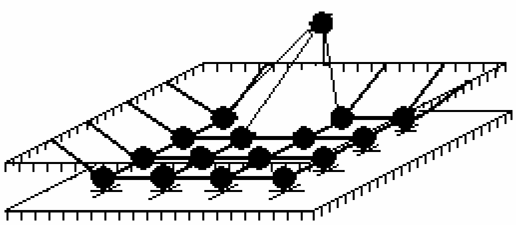

Рис 3.

Литература

1. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
2. Крупенин В.Л. К расчету виброударных систем с регулярной структурой при случайном возбуждении// Машиноведение.-1984.-№6.-С. 22-29.
3. V.I. Babitsky, V.L. Krupenin Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
4. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. - М.: Наука, 1980.-336 с.
5. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. –336 с.
6. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. - М.: Наука, 1980.- 368 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фона фундаментальных исследований (проект 05--08-50183)

Д.т.н. Крупенин Виталий Львович, 924-9292, 923-9940.

Москва,101830, Грибоедова,4 ИМАШ РАН, К.47. Лаборатория вибротехнических систем.

Поступила: 23 сентября 2007 г.