УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗГИБА МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК

© А.А. Саркисян

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна, Гюмри, Армения

armenuhis@mail.ru

Аннотация. *Построена модель динамического изгиба микрополярно-упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений.*

В точной постановке плоской задачи для полосы микрополярной теории упругости со свободным вращением и на основе построенной одномерной прикладной модели микрополярной балки изучается задача о распространении волны. В случае длинных волн показывается совпадение характеристического уравнения распространения волны по указанным обеим моделям.

Ключевые слова: *микрополярно -упругий, балка, изгиб, динамика, модель*

Введение. Микрополярная теория упругости является одной из основных моделей сред с внутренней структурой. Эффекты микрополярности материала особенно существенны в тонких телах (балки, пластинки, оболочки). Современные достижения в области теории микрополярных тонких балок, пластин и оболочек освещены в работах [1-3]. Отметим, что проблема построения моделей микрополярных тонких балок, пластин и оболочек поставлена С. А. Амбарцумяном [4].

В работах С. О. Саркисяна [5-7] развит метод гипотез построения моделей микрополярно–упругих тонких балок, пластин и оболочек, который опирается на асимптотическом анализе изучения свойств решений плоских и пространственных граничных задач микрополярной теории упругости в тонких областях. В указанных моделях микрополярно–упругих тонких балок, пластин и оболочек полностью учитываются поперечно сдвиговые и родственные им деформации.

В данной работе развивается метод гипотез [5-7], на основе которого построена модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений. Далее, изучается задача о распространении плоской волны (в точной постановке) в микрополярно- упругой полосе. В длинноволновом приближении показывается совпадение характеристического уравнения распространения волны с аналогичным уравнением, полученном на основании построенной прикладной модели микрополярной балки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропный микрополярно - упругий параллелепипед постоянной высоты $2h$, длины a и постоянной толщины, равной $2h_1 = 1$. Координатная плоскость $x_1 x_3$ разместим в срединной плоскости параллелепипеда. Ось x_3 будем направить по высоте, а ось x_1 - по длине параллелепипеда, который делит высоту $2h$ пополам. Будем считать, что в параллелепипеде по направлении оси x_2 осуществлено плоское напряженное состояние.

Основные уравнения плоской динамической задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (или иначе, по общему континууму Коссера) имеют вид [8]:

Уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}-(\sigma_{13}-\sigma_{31})=J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2}\quad (1.1)$$

Физико-геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1}=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{33}),\quad \gamma_{13}=\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+\omega_2=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{13}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{31},$$

$$\gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=\frac{1}{E}(\sigma_{33}-\nu\sigma_{11}),\quad \gamma_{31}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\omega_2=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{31}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{13},\quad (1.2)$$

$$\chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}=\frac{1}{B}\mu_{32},\quad \chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}=\frac{1}{B}\mu_{12}.$$

Здесь, $\sigma_{11},\sigma_{13},\sigma_{31},\sigma_{33}$ - силовые напряжения; $\mu_{12},\ \mu_{32}$ - моментные напряжения, $\gamma_{11},\gamma_{33},\gamma_{13},\gamma_{31}$ -деформации; χ_{32},χ_{12} -изгиб-кручение; V_1,V_3 - линейные перемещения, ω_2 - независимый поворот точек прямоугольника $(0\le x_1\le a,\ -h\le x_3\le h)$ вокруг оси x_2; $E,\ \mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)},\ \alpha,\ B$ -упругие константы материала микрополярного тела.

На лицевых линиях прямоугольника $x_3=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия:

$$\sigma_{31}=\tilde p_1,\quad \sigma_{33}=\pm\tilde p_3,\quad \mu_{32}=\pm\tilde m_2.\quad (1.3)$$

На кромках $(x_1=0,x_1=a)$ прямоугольника примем нижеследующие основные варианты граничных условий плоской задачи микрополярной теории упругости:

1) $\sigma_{11}=p_1^*(x_3,t),\ \sigma_{13}=p_3^*(x_3,t),\ \mu_{12}=m_2^*(x_3,t)$, (1.4)

2) $\sigma_{11}=p_1^*(x_3,t),\ V_3=V_3^*(x_3,t),\ \mu_{12}=m_2^*(x_3,t)$, (1.5)

3) $V_1=V_1^*(x_3,t),\ V_3=V_3^*(x_3,t),\ \omega_2=\omega_2^*(x_3,t)$. (1.6)

При помощи начальных условий, при $t=0$, задаются значения перемещений V_1,V_3, независимого поворота ω_2 и компонентов линейной и вращательной скоростей точек тела:

$$V_1\big|_{t=0}=f_1(x_1,x_3),\quad V_3\big|_{t=0}=f_3(x_1,x_3),\quad \omega_2\big|_{t=0}=\varphi_2(x_1,x_3)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=F_1(x_1,x_3),\quad \frac{\partial V_3}{\partial t}\Big|_{t=0}=F_3(x_1,x_3),\quad \frac{\partial\omega_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=\Phi_2(x_1,x_3)\quad (1.7)$$

где $f_1,f_3,F_1,F_3,\varphi_2,\Phi_2$ -заданные функции в области указанного прямоугольника.

2. Модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких балок. Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования краевых и начально-краевых задач (1.1)-(1.7) в тонкой прямоугольной области, позволяют в основу построения прикладной одномерной модели микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, как в случае статики, ставить следующие достаточно общие предположения (гипотезы), которые формулированы в работах С. О. Саркисяна [5-7]:

а) нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси симметрии прямоугольника x_1, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений V_1, V_3 и свободного поворота ω_2 по толщине прямоугольника:

$$V_3 = w(x_1,t), \quad V_1 = x_3\psi_1(x_1,t), \ \omega_2 = \Omega_2(x_1,t) \tag{2.1}$$

где w -прогиб балки; Ω_2-угол свободного поворота, а ψ_1-полный угол поворота нормального элемента.

Как убедимся, для компонент вектора перемещения эта гипотеза представляет собой известную классическую гипотезу Тимошенко для упругих балок [8,9], поэтому, гипотезу (2.1) полностью, как в работах [5-7], назовем обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в случае микрополярных балок.

Кинематическую гипотезу (2.1) дополним следующей статической гипотезой:
б) при определении деформаций, изгиба -кручений, силовых и моментных напряжений, для силового напряжения σ_{31} сначала примем

$$\sigma_{31} = \overset{0}{\sigma}_{31}(x_1,t)\,. \tag{2.2}$$

После определения указанных величин, окончательно, значение σ_{31} определим как сумму значения (2.2) и результата интегрирования первого уравнения движения из (1.1), для которого потребуем условие, что усредненное по высоте прямоугольника величина была равна нулю;
в) в обобщенном законе Гука (1.2) будем пренебрегать силовое напряжение σ_{33} относительно силового напряжения σ_{11}.

В соответствии с принятыми законами распределения перемещений и поворота (2.1), а также, предположениями б) и в), для деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений из (1.1)-(1.3) получим следующие формулы:

$$\gamma_{11} = x_3 K_{11}(x_1,t), \ \gamma_{31} = \Gamma_{31}(x_1,t), \ \gamma_{13} = \Gamma_{13}(x_1,t), \ \gamma_{33} = 0, \ \ \chi_{12} = \kappa_{12}(x_1,t), \ \ \chi_{32} = 0$$

$$K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \ \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \ \ \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{11} = x_3 \hat{\sigma}_{11}(x_1,t), \ \hat{\sigma}_{11} = EK_{11}, \ \sigma_{13} = (\mu+\alpha)\Gamma_{13} + (\mu-\alpha)\Gamma_{31},$$

$$\sigma_{31}^0 = (\mu+\alpha)\Gamma_{31} + (\mu-\alpha)\Gamma_{13}, \ \ \sigma_{31} = \sigma_{31}^0(x_1,t) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2}\right)\left(\frac{\partial \hat{\sigma}_{11}(x_1,t)}{\partial x_1} - \rho\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}\right) \tag{2.3}$$

$$\sigma_{33} = -x_3\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right), \ \sigma_{33} = x_3\frac{\tilde{p}_3}{h},$$

$$\mu_{12} = \mu_{12}(x_1,t) = B\kappa_{12}, \ \ \mu_{32} = -x_3\left[\frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) - J\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2}\right], \ \mu_{32} = x_3\frac{\tilde{m}_2}{h}$$

С целью приведения двумерной задачи (1.1)-(1.7) к прикладной одномерной, что уже выполнено для деформаций, изгиба-кручений, перемещений, поворота, силовых и моментных напряжений, в модели микрополярных балок вместо компонент тензоров силового и моментного напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные по высоте прямоугольника характеристики -усилия (N_{13}, N_{31}) и моменты (M_{11}, L_{12}) [5].

В итоге, основная система динамических уравнений изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

Уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\widetilde{p}_3, \quad N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 2h\widetilde{p}_1,$$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + N_{31} - N_{13} = 2Jh\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - 2\widetilde{m}_2 \qquad (2.4)$$

Соотношения упругости

$$N_{13} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{13} + (\mu-\alpha)\Gamma_{31}], \; N_{31} = 2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{31} + (\mu-\alpha)\Gamma_{13}],$$

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}K_{11}, \quad L_{12} = 2Bh\kappa_{12} \qquad (2.5)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \;\; \kappa_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \qquad (2.6)$$

Система динамических уравнений изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок (2.4)-(2.6) представляет собой систему уравнений шестого порядка. Это система из 11-ти уравнений относительно 11-ти неизвестных функций: $w, \psi_1, \Omega_2, \Gamma_{13}, \Gamma_{31}, K_{11}$, $\kappa_{12}, N_{13}, N_{31}, M_{11}, L_{12}$.

«Смягченные» граничные условия на торце балки (например, на $x_1 = 0$) будут выражаться так:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \psi_1 = \psi_1^*, \; N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \; L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \Omega_2 = \Omega_2^* \qquad (2.7)$$

Начальные условия следует ставить для перемещения w, поворотов ψ_1, Ω_2, а также для линейных и угловых скоростей: $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_2}{\partial t}$.

В модели (2.4)-(2.6) микрополярных балок с независимыми полями перемещений и вращений полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Если в модели микрополярных балок (2.4)-(2.7) условно принимать $\alpha = 0$, в итоге, будет отделяться модель классической теории упругих тонких балок Тимошенко [8,9] (с незначительным отличием, связанной со статической гипотезой б)).

3. Распространение волн в микрополярно–упругом полосе. Объектом исследования будет полоса $(S\{x_1, x_3\}: \; -\infty < x_1 < \infty, \; |x_3| \le h)$ упругой среды, толщиной $2h$, с ограничивающими плоскостями $x_3 = \pm h$, свободными от силовых и моментных напряжений:

$$\sigma_{31} = 0, \; \sigma_{33} = 0, \;\; \mu_{32} = 0. \qquad (3.1)$$

Будем исходить из системы основных уравнений (1.1),(1.2) - плоской задачи микрополярной теории упругости со свободным вращением.

Указанную систему уравнений можем привести к следующему виду:

$$\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + (\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} + \left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} + \mu - \alpha\right)\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_3} - 2\alpha\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} = \rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}$$

$$(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2} + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2} + \left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} + \mu - \alpha\right)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1 \partial x_3} + 2\alpha\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = \rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} \qquad (3.2)$$

$$B\left(\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_3^2}\right) + 2\alpha\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right) - 4\alpha\omega_2 = J\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2}$$

Исследуем задачу о распространении плоской волны в направлении оси x_1. Если зададим перемещения следующим образом

$$V_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}, \qquad V_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \tag{3.3}$$

то систему уравнений (3.2) динамической плоской задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений можем привести к более удобному виду (для построения точного решения поставленной задачи):

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi - \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\omega_2 = 0, \quad \left(\Delta - v_0^2 - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\omega_2 + \frac{2\alpha}{B}\Delta\Psi = 0 \tag{3.4}$$

где

$$c_1 = \sqrt{\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\rho(\lambda+2\mu)}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu+\alpha}{\rho}}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{B}{J}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{4\alpha}{B}}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \tag{3.5}$$

к которому следует присоединить граничные условия (3.1).

Отметим, что из (3.4) можем получить отдельные уравнения относительно трех функций Φ, Ψ, ω_2:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \left[\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - v_0^2 - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \eta_0^2\Delta\right]\Psi = 0$$

$$\left[\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - v_0^2 - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \eta_0^2\Delta\right]\omega_2 = 0 \tag{3.6}$$

где принято следующее обозначение

$$\eta_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{B(\mu+\alpha)}}. \tag{3.7}$$

Решение системы уравнений (3.6) будем искать по методу В. Новацкого в виде гармонических волн [8]

$$\Phi = \Phi^*(x_3)e^{i(\xi x_1 - pt)}, \quad \Psi = \Psi^*(x_3)e^{i(\xi x_1 - pt)}, \quad \omega_2 = \omega_2^*(x_3)e^{i(\xi x_1 - pt)}, \tag{3.8}$$

где ξ -волновое число, p -частота колебаний.

Подставляя (3.8) в (3.6) приходим к решению системы отдельных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\Phi^*(x_3)$, $\Psi^*(x_3)$, $\omega_2^*(x_3)$:

$$\frac{d^2\Phi^*}{dx_3^2} - k^2\Phi^* = 0, \quad \text{ãäå} \quad k = \sqrt{\xi^2 - \frac{p^2}{c_1^2}} \tag{3.9}$$

$$\frac{d^4\Psi^*}{dx_3^4} - \left[2\xi^2 + v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right]\frac{d^2\Psi^*}{dx_3^2} + \left[\xi^4 + \xi^2\left(v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right) - \frac{p^2}{c_2^2}\left(v_0^2 - \frac{p^2}{c_4^2}\right)\right]\Psi^* = 0 \tag{3.10}$$

$$\frac{d^4\omega_2^*}{dx_3^4} - \left[2\xi^2 + v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right]\frac{d^2\omega_2^*}{dx_3^2} + \left[\xi^4 + \xi^2\left(v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right) - \frac{p^2}{c_2^2}\left(v_0^2 - \frac{p^2}{c_4^2}\right)\right]\omega_2^* = 0 \tag{3.11}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (3.9)-(3.11) для обратно-симметричной относительно координаты x_3 задачи (т.е. для задачи изгиба) можем представить в следующем виде:

$$\Phi^*(x_3) = A_1 sh(kx_3), \ \Psi^*(x_3) = A_2 ch(k_1x_3) + B_2 ch(k_2x_3), \omega_2^*(x_3) = A_3 ch(k_1x_3) + B_3 ch(k_2x_3) \tag{3.12}$$

где

$$k_{1,2}^2 = \xi^2 + \frac{1}{2}\left[v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2} \pm \sqrt{\left(v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2} \right)^2 + 4\frac{p^2}{c_2^2}\left(v_0^2 - \frac{p^2}{c_4^2} \right)} \right] \quad (3.13)$$

A_1, A_2, B_2, A_3, B_3 -произвольные постоянные.

Если при помощи полученных решений для функций Ψ и ω_2 будем удовлетворять двум последним уравнениям из системы (3.4), то получим

$$A_3 = -\widetilde{T}_1 A_2, \quad B_3 = -\widetilde{T}_2 B_2, \quad (3.14)$$

где

$$\widetilde{T}_1 = \frac{\mu+\alpha}{2\alpha}\left(\xi^2 - k_1^2 - \frac{p^2}{c_2^2} \right), \quad \widetilde{T}_2 = \frac{\mu+\alpha}{2\alpha}\left(\xi^2 - k_2^2 - \frac{p^2}{c_2^2} \right) \quad (3.15)$$

Теперь подставим полученный результат (3.12) в (3.8), а затем и в (3.3), окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} V_1 &= [i\xi A_1 sh(kx_3) + A_2 k_1 sh(k_1 x_3) + B_2 k_2 sh(k_2 x_3)]e^{i(\xi x_1 - pt)} \\ V_3 &= [A_1 k sh(kx_3) - i\xi(A_2 ch(k_1 x_3) + B_2 ch(k_2 x_3))]e^{i(\xi x_1 - pt)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Имея в виду (3.16), из (1.2), для величин σ_{31}, σ_{33}, μ_{32} получим:

$$\sigma_{31} = [2i\mu\xi k A_1 ch(kx_3) + (\{(\mu+\alpha)k_1^2 + (\mu-\alpha)\xi^2\}A_2 - 2\alpha A_3)ch(k_1 x_3) + \\ + (\{(\mu+\alpha)k_2^2 + (\mu-\alpha)\xi^2\}B_2 - 2\alpha B_3)ch(k_2 x_3)]e^{i(\xi x_1 - pt)}$$

$$\sigma_{33} = \left[A_1\left(2\mu\xi^2 - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{p^2}{c_1^2} \right) sh(kx_3) - 2i\mu\xi(A_2 k_1 sh(k_1 x_3) + B_2 k_2 sh(k_2 x_3)) \right] e^{i(\xi x_1 - pt)} \quad (3.17)$$

$$\mu_{32} = B[A_3 k_1 sh(k_1 x_3) + B_2 k_2 sh(k_2 x_3)]e^{i(\xi x_1 - pt)}.$$

Далее подставляя выражения из (3.17) в граничные условия (3.1), в результате после некоторых преобразований, имея в виду (3.14), получим однородную линейную систему из двух алгебраических уравнений

$$A_1 2i\mu\xi k ch(kh) + A_2\left\{ [(\mu+\alpha)k_1^2 + (\mu-\alpha)\xi^2 + 2\alpha\widetilde{T}_1]ch(k_1 h) - \right.$$

$$\left. -[(\mu+\alpha)k_1^2 + (\mu-\alpha)\xi^2 + 2\alpha\widetilde{T}_2]\frac{\widetilde{T}_1 k_1 sh(k_1 h)}{\widetilde{T}_2 k_2 sh(k_1 h)} ch(k_2 h) \right\} = 0 \quad (3.18)$$

$$A_1\left(2\mu\xi^2 - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{p^2}{c_1^2} \right) sh(kh) - A_2 2\mu i\xi\left(k_1 sh(k_1 h) - \frac{\widetilde{T}_1 k_1}{\widetilde{T}_2} sh(k_1 h) \right) = 0.$$

Система этих уравнений будет иметь ненулевое решение, если ее определитель будет равна нулю. В итоге, приходим к следующему характеристическому (трансцендентному) уравнению:

$$\grave{a}'\left(\frac{\widetilde{T}_2 k_2}{th(k_1 h)} - \frac{\widetilde{T}_1 k_1}{th(k_2 h)} \right) th(kh) = \frac{4\mu^2\xi^2 k_1 k_2 k(\widetilde{T}_2 - \widetilde{T}_1)}{\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}k^2 - \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\xi^2}, \quad (3.19)$$

где $a' = \mu(k_1^2 + \xi^2) + \alpha(k_1^2 - \xi^2) + 2\alpha\widetilde{T}_1 = \mu(k_2^2 + \xi^2) + \alpha(k_2^2 - \xi^2) + 2\alpha\widetilde{T}_2$. (3.20)

Если длина волны по сравнению с толщиной полосы велика, то значения $kh, k_1 h, k_2 h$ можно отнести к весьма малым, и в уравнении (3.19) можно заменить гиперболические тангенсы их аргументами [8]. Таким образом, проведя некоторые преобразования, для задачи изгиба микрополярной полосы в случае длинных волн приходим к следующему характеристическому уравнению

$$\left(\xi^2-\frac{J}{B}p^2\right)\left(\xi^2-\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\rho p^2\right)-\frac{1}{B}\rho p^2=0. \qquad (3.21)$$

Отметим, что в работе [11] построена упрощенная модель микриполярно -упругой балки со свободным вращением (в котором фактически не учитываются влияния изгибающего момента M_{11} от силового напряжения σ_{11}). Показан [12], что если распространение волны в бесконечной балке изучать по модели [11], то полученное характеристическое уравнение будет совпадать с уравнением длинных волн (3.21).

Теперь, если гиперболические тангенсы заменить первыми двумя членами из соответствующего степенного ряда [13] и проводить некоторые выкладки, на основе (3.19) приходим к следующему характеристическому уравнению

$$\begin{gathered}\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\xi^4-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{J}{B}p^2\xi^2-\rho p^2\xi^2+\frac{J\rho}{B}p^4-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{1}{B}\rho p^2-\frac{h^2}{3}(\rho p^2-E\xi^2)\times\\ \times\left[\xi^4+\xi^2\left(\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{1}{B}-\frac{\rho}{\mu+\alpha}p^2-\frac{J}{B}p^2\right)-\frac{\rho}{\mu+\alpha}p^2\left(\frac{4\alpha}{B}-\frac{J}{B}p^2\right)\right]=0\end{gathered} \qquad (3.22)$$

Будем рассматривать аналогичную задачу о распространении волны на основе уточненной модели (2.4)-(2.6) микрополярной балки (по сравнению с упрощенной моделью [11]), при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации, а также, влияние усредненного момента M_{11}. Для изучения процесса распространения волны изгиба вдоль средней линии балки представим решение указанной задачи в виде

$$w=\widetilde{A}e^{i(\xi x_1-pt)},\qquad \Omega_3=\widetilde{B}e^{i(\xi x_1-pt)},\qquad \psi_1=\widetilde{C}e^{i(\xi x_1-pt)}. \qquad (3.23)$$

Подставляя (3.23) в систему уравнений (2.4)-(2.6), и требуя ненулевое решение, в результате получим то же характеристическое уравнение (3.22), которое получено на основании точного решения плоской задачи микрполярной теории упругости со свободным вращением, в случае длинных волн.

Таким образом, и при точном решении динамической задачи о распространении плоской волны в тонкой микрополярной бесконечной полосе (в случае длинных волн), и при решении той же задачи на основе прикладных-одномерных моделей тонких балок, приходим к одинаковым характеристическим уравнениям. На основе указанного исследования можем заключить, что применение асимптотического подхода интегрирования системы уравнений плоской задачи микрополярной теории упругости и основанное на этом подходе метод гипотез работ [5-7] адекватным образом заменяют двумерные задачи одномерными (в зависимости от точности) моделями.

Литература

1. *Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A.* 2009. “On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography”. // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
2. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ. 1999. 328с.
3. *Саркисян С. О.* Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек.// Известия НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. № 2. С. 84-95.
4. *Амбарцумян С. А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении. 1999. 214 с.

5. *Саркисян С. О.* Прикладные теории микрополярных упругих тонких балок.// Доклады НАН РА. 2011. Т. 111. № 2.
6. *Саркисян С. О.* Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин.// Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. № 1.
7. *Саркисян С. О.* Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек.// Доклады АН России. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с.
9. *Пелех Б. Л.* Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наукова думка. 1977. 183с.
10. *Перцев А.К., Платонов Э. Г.* Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: “Судостроение”. 1987. 316с.
11. *Саркисян С.О., Атоян А.А.* Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин // Доклады НАН Армении. 2004. Т. 104. №4. С.287-294.
12. *Атоян А. А., Саркисян С. О.* К задаче о распространении плоской волны в микрополярной упругой бесконечной полосе// Прикладная механика и технологии машиностроения. Сб. науч. тр./ Под редакцией Ерофеева, С. И. Смирнова, Г. К. Сорокина. Н/Новгорон: Изд.-во “Интелсервис”. 2004. Вып. 1(7). С. 67-74.
13. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. 1984. 228 с.

Поступила: 24.01.11.