

УДК 621.01: 534.1

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ ЦИКЛОВЫХ МАШИН, ВКЛЮЧАЮЩИХ КРУТИЛЬНО-ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© И.И. Вульфсон

Санкт - Петербургский государственный университет технологии и дизайна
Санкт-Петербург, Россия; vujo@rambler.ru

***Аннотация.** На базе теории регулярных систем разработана методика частотно-го и модального анализа узлов многосекционной машины для случая, когда колебательная система образует решётку, в которой крутильная и изгибная подсистемы связаны между собой подсистемой с переменными параметрами, схематизирующей ряд идентичных цикловых механизмов. При медленном изменении параметров внутри каждого кинематического цикла выявлены частотные диапазоны повышенной плотности, на которых возникает расщепление «собственных» частот и вырождение некоторых нестационарных форм колебаний.*

***Ключевые слова:** Колебания, машина, механизм, колебательные цепочки, системы с переменными параметрами, частотный и модальный анализ.*

1. Введение. Теория регулярных колебательных систем восходит к работам Борна и Кармана, посвящённым исследованию теплоёмкости кристаллов [1]. Эти работы легли в основу так называемой теории цепочек, с помощью которой удаётся осуществить аналитическое описание динамических характеристик моделей с большим числом степеней свободы, базируясь на анализе одного структурного элемента системы. Основные направления дальнейшего развития этой теории нашли отражение в монографиях [2–5]. В машинах циклового действия и автоматических линиях приходится сталкиваться с регулярными колебательными системами в связи с широким распространением динамически идентичных модулей, используемых для реализации однотипных технологических и транспортных операций [6–11]. В подобных случаях ввиду естественного стремления к унификации и взаимозаменяемости отдельных узлов машины возникает определенная повторяемость блоков динамической модели приводов. Такая ситуация, в частности, встречается в машинах текстильной, легкой, пищевой, полиграфической и ряда других отраслей промышленности при повышенной протяженности зоны технологической обработки.

Применительно к машинам с цикловыми механизмами теория регулярных колебательных систем нуждается в дополнительной разработке. Во-первых, динамические модели приводов имеют более сложную внутреннюю структуру повторяющихся модулей, которые образуют не только односвязные цепочки, но и разветвлённые, кольцевые и разветвлённо-кольцевые колебательные системы. Кроме того, такая необходимость связана со специфическими особенностями цикловых механических систем, среди которых отметим нелинейность функции перемещения, нестационарность динамических связей, возможность нарушения кинематического контакта в зазорах и др. В данной статье рассматриваемая проблема конкретизирована для случая, когда колебательная система представляет собой решётку, в которой крутильная и изгибная подсистемы связаны между собой подсистемой с переменными параметрами, имитирующей ряд идентичных цикловых механизмов.

2. Динамическая модель. Рассматривается динамическая модель привода длинного исполнительного органа с повторяющимися блоками (модулями) идентичной динамической

структуры (рис.1,а). Модель отображает следующие структурные элементы привода: 1 – главный вал, 2 – исполнительный орган, 3 – цикловые механизмы, осуществляющие программное поступательное движение исполнительного органа согласно заданной функции положения $\Pi(\varphi)$ [6]. При этом главный вал и исполнительный орган схематизированы в виде крутильной и изгибной подсистем с распределёнными параметрами, а цикловые механизмы в виде подсистем с дискретно заданными параметрами (рис.1,б). Динамические характеристики элементов кинематической цепи, осуществляющей связь главного вала с двигателем θ , в общем случае могут быть учтены соответствующими значениями динамической жёсткости на «входе».

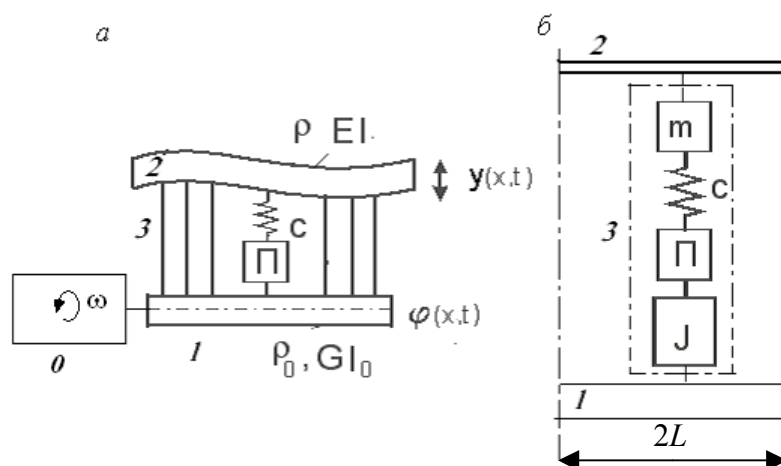


Рис.1

В отличие от динамической модели, исследованной в работе [11], в данной статье рассматривается более общий случай регулярной системы, когда главный вал исполнительный орган схематизированы в виде подсистем с распределёнными параметрами при произвольном числе механизмов n . При этом модель имеет вид длинной рамы с переменными параметрами. На выстоях исполнительного органа, а также в окрестности малых значений $d\Pi/d\varphi$ динамическая связь между крутильной и изгибной колебательными системами по существу разрывается. В подобных случаях выявляются некоторые эффекты, свойственные системам переменной структуры.

Примем следующие условные обозначения: E, G – модули упругости и сдвига; I_0 – полярный момент инерции главного вала; ρ_0, ρ – погонный момент инерции главного вала и погонная масса исполнительного органа; I_i, m_i – дискретно заданные моменты инерции и массы; c_i – коэффициенты жёсткости; $2L$ – длина повторяющегося блока (модуля).

При принятой схематизации привода сосредоточенные моменты инерции I и массы m отнесены к подсистеме механизма. При этом каждый модуль представляет собой совокупность трёх участков – до механизма (участок 1), механизм (участок 2), за механизмом (участок 3).

Для математического описания модели воспользуемся аппаратом модифицированных матриц перехода [6–8]. От традиционно используемых матриц перехода модифицированные матрицы отличаются тем, что в них учтено медленное изменение параметров, соответствующее линеаризации нелинейной функции положения в окрестности программного движения. При этом $\Pi(\varphi) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)\Delta\varphi$, где $\varphi_* = \omega t$; $\Delta\varphi$ – возникающая при колебаниях динамическая ошибка в рассматриваемом сечении главного вала; $(\cdot)' = \partial\Pi/\partial\varphi$.

Согласно методу условного осциллятора свободные колебания ищем в форме

$$\Delta\varphi_* = X(\varphi_*) \sin \int p(\varphi_*) d\varphi_*; \quad \Delta y = Y(\varphi_*) \sin \int p(\varphi_*) d\varphi_*,$$

где X, Y – амплитуды крутильных и изгибных колебаний.

Переход через произвольный модуль s для определенной формы колебаний соответствует следующей трансформации шестимерных векторов состояния $\mathbf{T}_{s-1} \rightarrow \mathbf{T}_s$,

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{\Gamma} \mathbf{T}_{s-1}, \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{\Gamma}$ – матрица перехода, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(X, M_\varphi, Y, \alpha, M_y, Q)$, где $M_\varphi, M_y, \alpha, Q$ – амплитудные значения для моментов при крутильных и изгибных колебаниях, углов поворота сечений и поперечных сил.

Представим матрицу переноса как

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_3 \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{\Gamma}_1, \quad (2)$$

где $\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{\Gamma}_3$ – матрицы перехода для участков 1 и 3, $\mathbf{\Gamma}_2$ – матрица перехода механизма,

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_\varphi & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_y \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\mathbf{\Gamma}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta_\varphi(p) & \sigma p^{-1} \sin \theta_\varphi(p) \\ -\sigma^{-1} p \sin \theta_\varphi(p) & \cos \theta_\varphi(p) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_y = \begin{pmatrix} \kappa_1(p) & \kappa_2(p)L & \kappa_3(p)L^2(EI)^{-1} & \kappa_4(p)L^3(EI)^{-1} \\ \kappa_4(p)\xi^4(p)L^3 & \kappa_1(p) & \kappa_2(p)L(EI)^{-1} & \kappa_3(p)L^2(EI)^{-1} \\ \kappa_3(p)\xi^4(p)L^2EI & \kappa_4(p)\xi^4(p)L^3EI & \kappa_1(p) & \kappa_2(p)L \\ \kappa_2(p)\xi^4(p)LEI & \kappa_3(p)\xi^4(p)L^2EI & \kappa_4(p)L^3 & \kappa_1(p) \end{pmatrix},$$

где $\theta_\varphi(p) = pL\sqrt{\rho_0/(GI_p)}$; $\sigma = (GI_p\rho_0)^{-0,5}$; $\xi(p) = \sqrt[4]{\rho p^2/(EI)}$; $\kappa_j = K_j(\theta)/\theta^{j-1}$ ($j = \overline{1,3}$); K_j – функции Крылова при аргументе $\theta = \theta(p) = L\alpha(p)$.

При реальных значениях параметров функции Крылова обычно можно представить в виде усечённых рядов Маклорена. Тогда функции κ_j принимают вид $\kappa_1 \approx 1 + \theta^4/4!$; $\kappa_2 \approx 1 + \theta^4/5!$; $\kappa_3 \approx 1/2 + \theta^4/6!$; $\theta^4 \approx 1/6 + \theta^4/7!$. В отличие от функций Крылова при $\theta \rightarrow 0$ ни одна из функций κ_j не стремится к нулю, что повышает точность расчётов и устраняет трудности при предельных переходах. Отметим, что случай $\theta = 0$, отвечает ситуации, когда собственные частоты системы пренебрежимо мало зависят от инерционных характеристик балки. Матрица $\mathbf{\Gamma}_2$ (механизм) имеет следующий вид:

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c\Pi'_* - Jp^2 & 1 & -c\Pi'_* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c\Pi'_* & 0 & mp^2 - c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Pi'_* = \Pi'(\varphi_*)$, где аргумент φ_* играет роль «медленного времени». (При определении матрицы Γ_2 предполагается, что шарнирное соединение между механизмом и балкой.)

Матрице перехода Γ отвечает следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^6 + h_1\lambda^5 + h_2\lambda^4 + h_3\lambda^3 + h_2\lambda^2 + h_1\lambda + 1 = 0. \quad (3)$$

Здесь учтено, что в силу динамической симметрии модуля при изменении порядка нумерации сечений его динамические свойства сохраняются неизменными. При этом уравнение (3) является возвратным. Порядок характеристического уравнения будем трактовать как порядок регулярности, которым во многом определяется уровень виброактивности и динамической связанности подсистем.

Корни характеристического уравнения можно определить как собственные значения матрицы Γ . Однако при этом остаётся в скрытой форме структура решения, описываемого в общем случае комбинацией тригонометрических и гиперболических функций. Для определения коэффициентов уравнения (3) h_i воспользуемся методом Д.К.Фаддеева [12], согласно которому запишем следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\text{Sp } \mathbf{G}_1; & \mathbf{B}_1 &= \mathbf{G}_1 - h_1 \mathbf{E}^0; & \mathbf{G}_2 &= \mathbf{G}_1 \mathbf{B}_1; \\ h_2 &= -\frac{1}{2} \text{Sp } \mathbf{G}_2; & \mathbf{B}_2 &= \mathbf{G}_2 - h_2 \mathbf{E}^0; & \mathbf{G}_3 &= \mathbf{G}_1 \mathbf{B}_2; \\ h_3 &= -\frac{1}{3} \text{Sp } \mathbf{G}_3; & \mathbf{B}_3 &= \mathbf{G}_3 - h_3 \mathbf{E}^0; & \mathbf{G}_4 &= \mathbf{G}_1 \mathbf{B}_3; \\ & & & & & \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\mathbf{G}_1 = \Gamma$; $\text{Sp } \mathbf{G}_i$ – след матрицы \mathbf{G}_i ; \mathbf{E}^0 – единичная матрица.

Следует иметь в виду, что все матрицы и коэффициенты, входящие в (4) являются функциями безразмерного времени φ_* и искомым «собственными» частот p . Можно показать, что $\mathbf{B}_6 = \mathbf{G}_6 - (\text{Sp } \mathbf{G}_5) \mathbf{E}^0 / 6 = 0$; $h_6 = -\frac{1}{7} \text{Sp } \mathbf{G}_6 = 1$ [12]. Этим можно воспользоваться для контроля правильности вычислений. Матрицы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_5$ служат матричными коэффициентами присоединённой матрицы

$$\mathbf{B}(\lambda) = \lambda^5 \mathbf{E}^0 + \lambda^4 \mathbf{B}_1 + \lambda^3 \mathbf{B}_2 + \lambda^2 \mathbf{B}_3 + \lambda \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_5. \quad (5)$$

Используя известную подстановку $z = \lambda + \lambda^{-1}$, применяемую для возвратных уравнений, приведём (3) к виду кубического уравнения

$$z^3 + h_1 z^2 - (3 - h_2) z - 2h_1 + 3h_3 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет три действительных различных корня, если

$$\Lambda = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^3 < 0, \quad (7)$$

где $\Lambda_1 = -\frac{h_1^3}{27} + \frac{(3+h_2)h_1}{6} + \frac{2h_1-3h_3}{2}$; $\Lambda_2 = -[3(3+h_2)+h_1]/9$.

В этом случае $z_1 = -2w \cos \frac{\phi}{3}$, $z_{2,3} = 2w \cos \frac{\pi \pm \phi}{3}$, где $w = \text{sgn } \Lambda_1 \sqrt{|\Lambda_2|}$, $\phi = \arccos(\Lambda_1/w^3)$.

Характеристические числа λ являются корнями уравнения $\lambda^2 - z\lambda + 1 = 0$:

$$\lambda_{kj} = 0,5z_k \pm \sqrt{0,25z_k^2 - 1}, \quad (8)$$

где $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$ (знаки «плюс» и «минус»).

Из (8) следует, что (7) является необходимым, но недостаточным условием действительности характеристического числа λ_{kj} , и дополнительным условием служит $|z_k| > 2$. При $|z_k| < 2$ функции $\lambda_{kj}(p, \phi_*)$ представляют собой взаимно сопряжённые комплексные числа. Принимая в (8) $\text{Re} \lambda_{kj} = 0,5z_k = \cos \gamma_k$, имеем $\lambda_{kj} = \cos \gamma_k \pm i \sin \gamma_k = e^{\pm i \gamma_k}$. Этому случаю соответствует тригонометрическая форма частного решения. При $\Lambda > 0$ уравнение (6) имеет одно действительное решение и два комплексных: $z_1 = -2w \text{ch} \frac{\phi_1}{3}$; $z_{2,3} = w(\text{ch} \frac{\phi_1}{3} \pm i\sqrt{3} \text{sh} \frac{\phi_1}{3})$, где $\phi_1 = \text{Arcsch} \frac{\phi_1}{3}$. При $\Lambda = 0$ ($\Lambda_1^2 = -\Lambda_2^3$) из трёх действительных корней два корня совпадают.

На рис.2 приведены типовые графики $\Lambda(p)$ и $|z_k|$. При $\Lambda > 0$ имеем единственный действительный корень $|z_1| < 2$ (кривая 1) и два комплексных корня $|z_{2,3}|$ (кривая 2) при $\text{Im}(z_{2,3}) \neq 0$ (кривая 4). При $\Lambda < 0$ имеем три действительных корня (кривые 1,2,3), из которых два отвечают $|z| < 2$. На кривой 2 показана точка бифуркации B, соответствующая расщеплению частот.

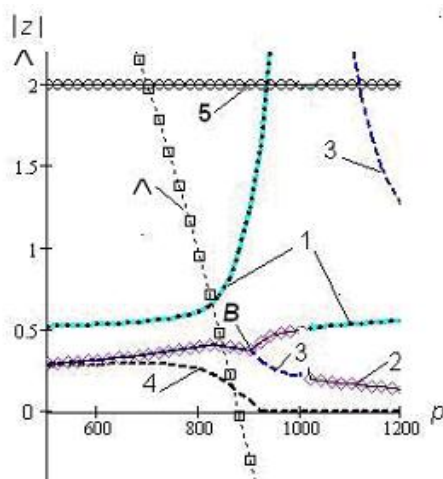


Рис.2

На рис.3 приведены типовые графики модуля $|\lambda_j(p)|$ и аргумента $\arg \lambda_j(p)$ характеристических функций при $\varphi_* = 1$ (индексы отвечают номеру корня). Поскольку элементы матрицы перехода являются медленно меняющимися функциями, графики покрывают целые области значений. Внутри этих областей располагаются кривые, определяемые «собственными» частотами $p(\varphi_*)$, которые выявляются при учёте граничных условий (см. ниже).

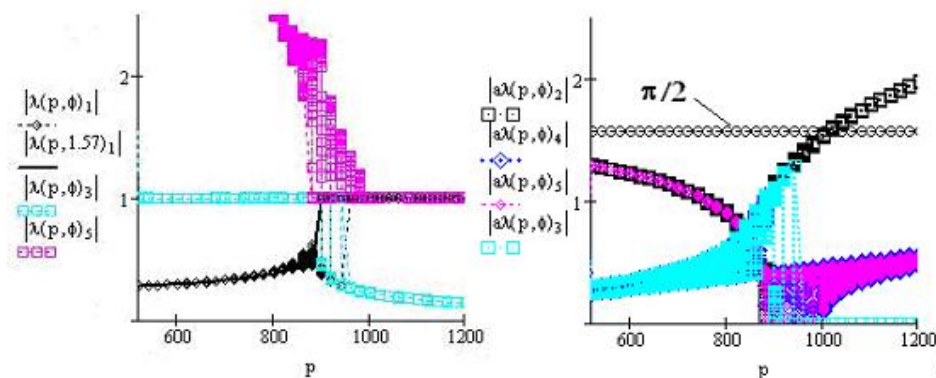


Рис.3

3. Частотный анализ. При частотном и модальном анализе могут быть использованы несколько способов, которые с теоретических позиций являются эквивалентными. Однако при реализации некоторых из них возникают определённые вычислительные трудности, связанные с большой размерностью системы, а также с быстро возрастающими гиперболическими функциями и их разностями. Из-за этого получение удовлетворительной точности при расчётах нередко становится проблематичной задачей. В нашем случае задача дополнительно усложняется из-за переменности параметров системы, а иногда и переменности граничных условий. Как показал анализ, в данной задаче наиболее эффективным оказался несколько модифицированный метод начальных параметров, применение которого проиллюстрируем на примере модели привода петлеобразующих органов трикотажной машины [6]. Для облегчения оценки взаимовлияния крутильной и изгибной подсистемы модуля введём в рассмотрение критерий

$$\chi = \sqrt{\frac{GI_p(\rho L + m)L^2}{12EI(\rho_0 L + J)}}, \quad (9)$$

который в первом приближении равен отношению парциальных частот этих подсистем.

Сначала рассмотрим односторонний привод, когда главный вал в сечении $s = 0$ соединён с передаточными механизмами, связанными с двигателем. Не сужая область применения данного подхода, примем, что сечение $s = 0$ главного вала вращается с постоянной угловой скоростью ω . Это допущение, соответствующее отсутствию колебаний на «входе», легко устраняется за счёт введения динамической жёсткости передаточных механизмов. Однако в данном случае дальнейшее усложнение и без того сложной модели представляется нецелесообразным, так при этом могут быть завуалированы динамические эффекты, возникающие непосредственно в исследуемой регулярной системе.

Вектор состояния в сечении s определяется как

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{\Gamma}^s \mathbf{T}_0, \quad (10)$$

где $T_0 = (0, M_{\varphi_0}, Y_0, \alpha_0, 0, 0)^T$; $M_{\varphi_0}, Y_0, \alpha_0$ – неизвестные граничные условия при $\varsigma = 0$.

При $s = n$ имеем $T_n = (X_n, 0, Y_n, \alpha_n, 0, 0)^T$. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} g_{22}(p, \varphi_*)M_{\varphi_0} + g_{23}(p, \varphi_*)Y_0 + g_{24}(p, \varphi_*)\alpha_0 &= 0; \\ g_{52}(p, \varphi_*)M_{\varphi_0} + g_{53}(p, \varphi_*)Y_0 + g_{54}(p, \varphi_*)\alpha_0 &= 0; \\ g_{65}(p, \varphi_*)M_{\varphi_0} + g_{63}(p, \varphi_*)Y_0 + g_{64}(p, \varphi_*)\alpha_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь $g_{jk}(p, \varphi_*)$ – соответствующие элементы матрицы $\Gamma^n = \|g_{jk}\|$ при $j = 2, 5, 6$; $k = 2, 3, 4$. Обращая определитель системы (10) в нуль, получаем частотное уравнение. Отметим, что в виду переменности g_{jk} , для каждой формы колебаний имеем медленно меняющееся значение частоты свободных колебаний.

При двустороннем приводе примем $T_n = (0, M_{\varphi_n}, Y_n, \alpha_n, 0, 0)$, что соответствует допущению $X_n = 0$. Тогда частотное уравнение примет вид $\det \Gamma^n = 0$ при $j = 1, 5, 6$; $k = 2, 3, 4$. На рис.4,а,б для типового случая ($\chi = 1,04$) приведены диапазоны «собственных» частот $p(\varphi_*)$ при одностороннем и двустороннем приводе.

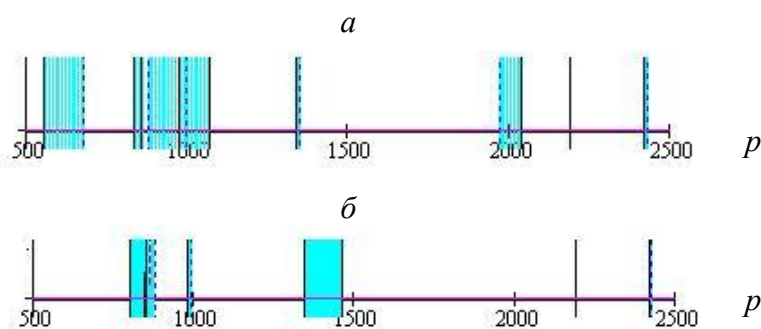


Рис.4

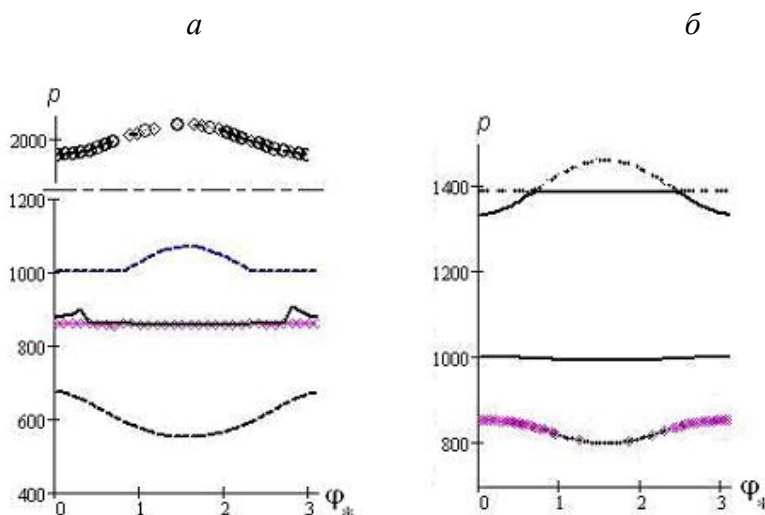


Рис.5

На рис.5 для рассматриваемого примера приведены графики изменения $p(\varphi_*)$ на половине периода кинематического цикла. На графиках видны случаи расщепления частотного спектра, возникающие при «перескоках» с одной формы на другую и вырождении некоторых форм колебаний. С переменностью «собственных» частот связано появление областей, выделённых на рис.3, 4, что особенно заметно при одностороннем приводе. Кроме того, как и следовало ожидать, при двустороннем приводе частотный спектр смещается в сторону больших значений.

4. Нестационарные формы колебаний. Для определения вектора состояния T_s на основании (10) необходимо с точностью до постоянной найти неизвестные граничные условия M_{φ_0}, α_0 . В данной задаче удобно задать $Y_0 = Y_0^*$, (например, $Y_0^* = 1$). Тогда

$$\begin{bmatrix} M_{\varphi_0} \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} g_{52}(p, \varphi_*) & g_{54}(p, \varphi_*) \\ g_{63}(p, \varphi_*) & g_{63}(p, \varphi_*) \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_{53}(p, \varphi_*) \\ g_{63}(p, \varphi_*) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Таким образом, все элементы вектора T_0 теперь известны.

На рис.6 приведены типовые графики нестационарных форм колебаний для одностороннего привода. На графиках нечётные числа отвечают формам крутильных колебаний на главном валу, а чётные – формам изгибных колебаний исполнительного органа; звёздочка соответствует нижней границе диапазона ($\varphi_* = 0$).

На диапазоне низших частот $550 \div 655 \text{ с}^{-1}$ (рис.6,а) формы колебаний близки к статическим деформациям при убывающей с ростом $\Pi'(\varphi_*)$ динамической жёсткостью. На следующем частотном диапазоне $855 \div 865 \text{ с}^{-1}$ (рис.6,б) при изменении $\varphi_* = 0, \pi/2$ происходит существенная трансформация форм (см. кривые 2, 2*). На рис. 6,в приведены формы колебаний (кривые 1, 1*, 2, 2*) при частотах, примыкающих к предыдущему диапазону (см.рис.4,а), которые также свидетельствуют о скачкообразном изменении форм колебаний внутри кинематического цикла. Интересно, что форма крутильных колебаний главного вала в этом случае близка к первой форме, однако при существенном отличии форм на рабочем органе. Кроме того, на графике показаны одноузловые формы, возникающие при частоте $\square 2000 \text{ с}^{-1}$ (кривые 3,4).

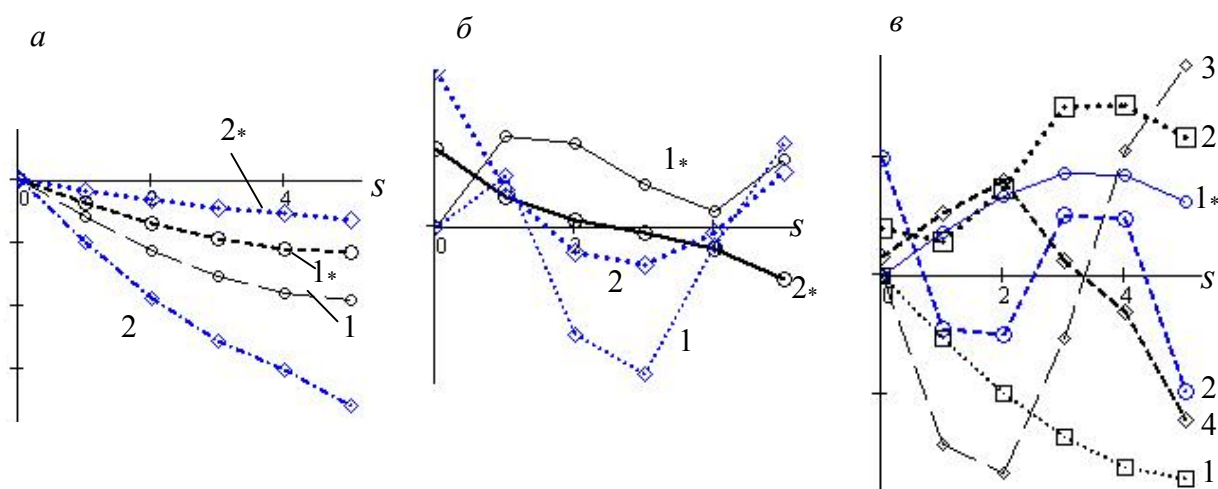


Рис.6

Аналогичные графики форм для двустороннего привода приведены на рис.7. Ввиду возрастания крутильной жёсткости в данном случае изменение формы на главном валу проявляется в меньшей степени. При низких частотах $800 \div 850 \text{ с}^{-1}$ (рис.7,а) наблюдается пере-
скок с безузловой формы на одноузловую, а при частотах $\square 1390 \text{ с}^{-1}$ (рис.7,б, кривые 1,2) и $\square 1460 \text{ с}^{-1}$ (кривые 3,4) вид формы при изменении φ_* сохраняется неизменным.

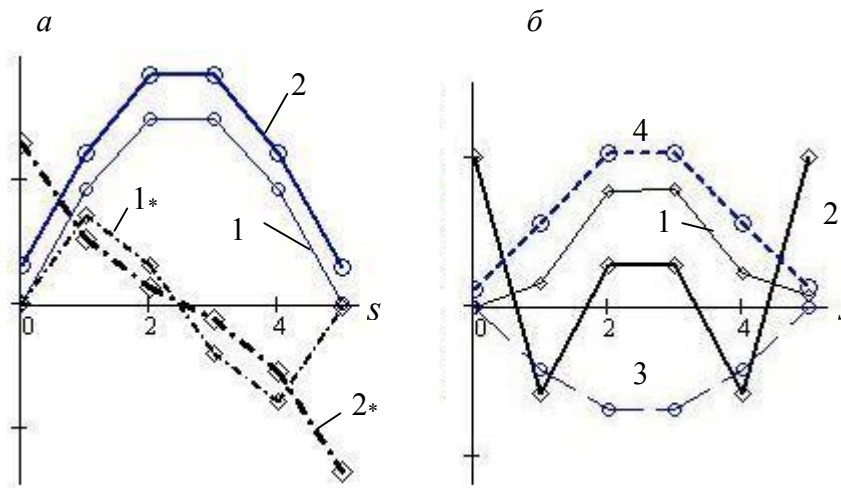


Рис.7

Приведенная методика представляет интерес для динамического синтеза колебательных систем данного класса. В частности, не составляет трудности оценить степень связанности крутильной и изгибной подсистем и возможность декомпозиции исходной динамической модели. Так, например, при увеличении критерия χ (см. формулу (9)) форма 2* (см. рис. б,а, 7,а) приближается к наклонной прямой. Это означает, что исполнительный орган на данной частоте проявляет себя как недеформируемое твёрдое тело [13]. Следует также отметить важность предварительной оценки вырождения форм и появления новых форм в пределах кинематического цикла, поскольку с этим связан эффект пространственной локализации и рост виброактивности системы.

Возможен и другой способ определения форм колебаний, основанный на разложении вектора состояния по собственным векторам:

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{V}\Psi^s\mathbf{V}^{-1}\mathbf{T}_0 \quad (13)$$

Здесь \mathbf{V} – собственный вектор матрицы $\mathbf{\Gamma}$, $\Psi^s = \text{diag}\{\lambda_1^s, \dots, \lambda_6^s\}$. Однако, как показывают вычисления, при реализации этого подхода проявляется повышенная чувствительность к точности расчёта для случая, когда колебательная система образует решётку, в которой крутильная и изгибная подсистемы связаны между собой подсистемой с переменными параметрами, имитирующей ряд идентичных цикловых механизмов.

Литература

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470с.
2. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд.-во иностр. лит. 1959.

3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997. 496с.
4. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем.– М: Наука, 1989. 216с.
5. Индейцев Д.А., Кузнецов Н.Г., Мотыгин О.В. и др. Локализация линейных волн. – СПб.: Изд-во С.Петербур. ун-та, 2007. 342с.
6. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. 309с.
7. Vulfson I. Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives. New-York, London: Hemisphere publishing corporation, 1988. 99p.
8. Dresig H., Vulfson I.I.: Dynamik der mechanismen, Springer, Wien, New York, 1989. 328 S.
9. Вульфсон И.И. Регулярные крутильные колебательные системы с сосредоточенными параметрами приводов цикловых машин разветвлённо-кольцевой структуры // Теория механизмов и машин. Т.6. №1 (11). 2008. С. 48–54.
10. Вульфсон И.И. Исследование колебаний многосекционных приводов цикловых машин разветвлённо-кольцевой структуры. // Проблемы машиностроения и надежности машин. №2, 2009. С. 23–29.
11. Вульфсон И.И. Методика частотного анализа многосекционных приводов цикловых машин, образующих крутильно-изгибные системы разветвлённо-кольцевой структуры. // Теория механизмов и машин. Т.7. №1(13). 2009. С. 32–41.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
13. Вульфсон И.И. Частотный анализ мультимодульного привода для поступательного программного движения исполнительных органов. // Вестник научно-технического развития. №9 (25). 2009. С. 7–17.

Поступила: 27.12.2010.