

УДК 621.01: 534.1

ВЫНУЖДЕННЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИВодОВ ЦИКЛОВЫХ МАШИН С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РАЗВЕТВЛЁННО- КОЛЬЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

© И.И. Вульфсон

Санкт - Петербургский государственный университет технологии и дизайна
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. На базе теории регулярных систем разработана методика анализа вынужденных колебаний узлов многосекционной машины для случая, когда колебательная система состоит из динамически идентичных модулей кольцевой структуры, связанных между собой общим главным валом. При этом регулярная система приобретает разветвленно-кольцевую структуру. Для отдельного модуля и системы в целом введено понятие «порядок регулярности», которым во многих случаях определяется уровень пространственной локализации колебаний и виброактивности привода.

Ключевые слова: Колебания, машина, цикловой механизм, регулярные системы.

1. Введение. В работе [1] при исследовании колебаний в цикловых механических системах кольцевой структуры было установлено, что разрывы некоторых динамических связей в цепочке исполнительного органа привода приводит к существенному снижению уровня колебаний. При этом секции привода представляют собой конструктивно и динамически идентичные повторяющиеся модули, состоящих из участков главного вала и рабочего органа, которые вместе с приводными цикловыми механизмами образуют реономную колебательную систему разветвленно-кольцевой структуры, обладающую регулярными или квазирегулярными свойствами. Использование многократно дублированных цикловых механизмов преследует цель повышения жесткости и уменьшения динамических ошибок кинематических характеристик длинных исполнительных органов, используемых во многих технологических машинах при повышенной протяженности зоны обработки изделия. Однако, как показано в работе [1], при наличии зазоров увеличение числа механизмов может вызвать отрицательный динамический эффект, состоящий в пространственной локализации колебаний в секциях наиболее удалённых от «входных» сечений главного вала. Это во многих случаях также оправдывает переход от приводов кольцевой структуры к приводам разветвленно-кольцевой структуры. Следует также в виду, что при этом облегчаются условия сборки и реализация современных тенденций при конструировании с использованием модульного принципа создания машин на базе унифицированных узлов.

Методика частотного и модального анализа приводов многосекционных цикловых машин изложена в работе [2]. В данной статье разработана методика аналитического исследования вынужденных колебаний подобных систем.

2. Динамическая модель. Исследуемая динамическая модель (рис.1) в основном идентична рассмотренной в работе [2] и отличается от неё наличием вынуждающих моментов, а также учётом диссипативных характеристик, которыми ранее при частотном и модальном анализе можно было пренебречь. В рамках данной статьи ограничимся рассмотрением квазигармонических колебаний. В этом случае для учета конструкционного демпфирования воспользуемся представлением коэффициента жесткости в комплексном виде, предложенного Е.С. Сорокиным [3]. При этом $\tilde{c} = c(1 + 2\delta i)$, $\tilde{c}_v = c_v(1 + 2\delta_v i)$ ($v = 0, 1, 2$); $\Delta\tilde{c} = \Delta c(1 + 2\delta_1 i)$,

где $c, c_v, \Delta c$ – соответствующие коэффициенты жесткости; $\delta = \psi / (4\pi)$, $\delta_v = \psi_v / (4\pi)$; ψ, ψ_v – коэффициенты рассеяния; $i = \sqrt{-1}$. Кроме того, примем следующие условные обозначения: J_v – моменты инерции, Π – кинематический аналог циклового механизма ($\Pi(\varphi)$ – функция положения); ω – номинальная угловая скорость главного вала.

В качестве обобщенных координат примем динамические ошибки главного вала $x_j = \varphi_{1j} - \varphi_1^0$ и исполнительного органа $y_j = \varphi_{2j} - \varphi_2^0$, где $\varphi_{1j}, \varphi_{2j}$ – абсолютные угловые координаты инерционных элементов главного вала и исполнительного органа, j – номер сечения, $\varphi_1^0 = \omega t$, $\varphi_2^0 = \Pi(\varphi_1^0)$. При безззорном контакте в кинематических парах и относительно малых динамических ошибках произведем линеаризацию функции положения $\Pi(\varphi_{1j})$ в окрестности программного движения:

$$\Pi(\varphi_j) = \Pi(\varphi_j^0 + x_j) \approx \Pi(\varphi_1^0) + \Pi'(\varphi_1^0)x_j,$$

где штрих отвечает дифференцированию по φ_1^0 .

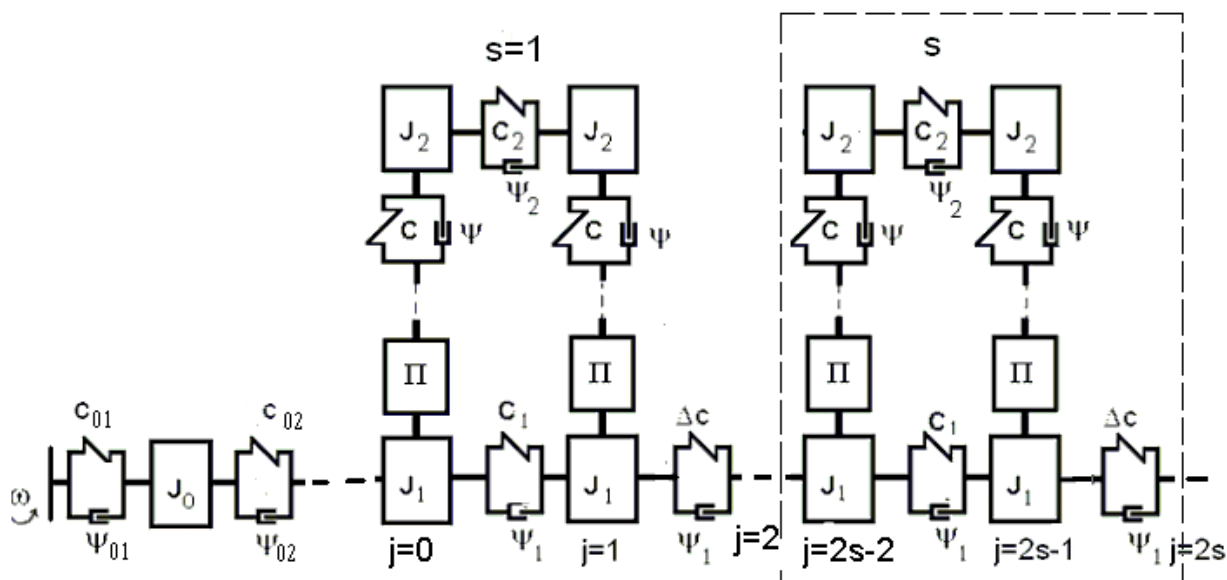


Рис. 1. Динамическая модель

Оговаривая малость динамических ошибок, следует иметь в виду, что ускорения и нагрузки, вызванные этими ошибками, могут быть соизмеримыми, а во многих случаях – существенно превосходить соответствующие характеристики, возникающие за счет программного движения. Поэтому относительно малые значения x_j, y_j свидетельствуют лишь о приемлемой кинематической точности, но ни в коем случае не оправдывают игнорирование возбуждаемых колебаний при динамических расчетах (подробнее см. [4,5]).

3. Матрицы перехода. Одна из специфических особенностей цикловых механических систем состоит в том, что наиболее существенным возмущающим фактором является программное движение исполнительного органа. Чаще всего основными частотами гармонического кинематического возбуждения являются частоты ω и 2ω , связанные с моментом инерционных сил переносного движения исполнительного органа $M = -J_2\omega^2\Pi''$ и трансформацией этого момента при приведении к главному валу $M\Pi'$. Обычно низшие собственные частоты существенно выше приведенных частот, поэтому сначала проанализируем колеба-

ния под воздействием возмущения, возникающего от технологических и других сил, частота которых может быть соизмерима со спектром «собственных» частот. При этом следует иметь в виду, что спектр «собственных» частот является медленно меняющимися из-за переменности первой геометрической передаточной функции, которую примем в виде $\Pi'(\varphi_1^0) = \Pi'_* \sin \omega t$.

Выделим в динамической модели модуль s , ограниченный штриховой линией. Введем в рассмотрение следующие функции: $R_1 = A/B$; $R_2 = B^{-1}$; $R_3 = D/B$, где A, B – элементы первой строки, а C, D – элементы второй строки матрицы перехода циклового механизма [4]. В частности, если цикловой механизм образован последовательным соединением элементов $J_1 - \Pi - c - J_2$, то $A = \Pi'_* - J_1 \omega^2 m^2 / (\tilde{c} \Pi'_*)$; $B = (\tilde{c} \Pi'_*)^{-1}$; $C = (AD - 1) / B$; , где m – номер гармоники (см. ниже).

В каждом модуле $s = \overline{1, N}$ есть три характерных сечения: $j = 2(s - 1)$ («вход» – первый механизм), $j = 2s - 1$ (второй механизм), $j = 2s$ («выход»). Пусть к исполнительному органу в сечениях $j = 2(s - 1)$ и $j = 2s - 1$ приложен периодический вынуждающий момент $M(t)$, который представим в виде ряда Фурье

$$M(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m \exp(im\omega t) = M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} |M_m| \cos(m\omega t + \alpha_m), \quad (1)$$

где $M_m = \tau^{-1} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} M(t) \exp(-im\omega t) dt$; $\tau = 2\pi / \omega$, $\alpha_m = \arg M_m$.

Как уже отмечалось, строго говоря, параметры колебательной системы являются переменными, однако при отмеченных особенностях спектра «собственных» частот можно усреднить функцию Π' на периоде τ . Некоторые уточнения будут обсуждены ниже.

Далее запишем для гармоники m матричную зависимость, устанавливающую связь между комплексными векторами состояния в сечениях $j = 2(s - 1)$ и $j = 2s - 1$:

$$[a_1, Q_1, a_2, Q_2]_{j=2s-1}^T = \Lambda [a_1, Q_1, a_2, Q_2]_{j=2(s-1)}^T, \quad (2)$$

где a_v, Q_v – комплексные амплитуды колебаний и моментов в соответствующих сечениях главного вала ($v = 1$) и исполнительного органа ($v = 2$); $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_1$ – матрица перехода (индекс m здесь и ниже опущен).

Здесь

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 1 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R_2 & 0 & R_3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & c_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где Λ_1 соответствует передаточному механизму, а Λ_2 – упругодиссипативным характеристикам данного участка главного вала и исполнительного органа (инерционные характеристики включены в матрицу Λ_1 в качестве приведенных дополнительных составляющих моментов инерции J_1 и J_2).

К двум инерционным элементам рассматриваемого модуля s исполнительного органа приложены моменты $M = |M| \exp(i\omega t)$. Тогда с учетом правила знаков имеем:

$Q_2(2s-2) = -M$, $Q_2(2s-1) = M$. (В целях упрощения индексации номер сечения показан как аргумент функции.) Отсюда на основании (2), (3) имеем

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{43} [a_2(2s-2)] &= -\lambda_{41} [a_1(2s-2)] - \lambda_{42} [Q_1(2s-2)] + (1 + \lambda_{44})M; \\ -\lambda_{33} [a_2(2s-2)] + a_2(2s-1) &= \lambda_{31} [a_1(2s-2)] - \lambda_{34}M, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где λ_{ik} – соответствующие элементы матрицы перехода $\Lambda = \|\lambda_{ik}\|$.

На основании (2)–(4) исключим амплитудные функции колебаний и нагрузок исполнительного органа, после чего получаем следующие матричные рекуррентные зависимости:

$$\begin{bmatrix} a_1(2s-1) \\ Q_1(2s-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(2s-2) \\ Q_1(2s-2) \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $g_{11} = \lambda_{11} - \lambda_{13}\lambda_{41}\lambda_{43}^{-1}$; $g_{12} = \lambda_{12} - \lambda_{13}\lambda_{42}\lambda_{43}^{-1}$; $g_{21} = \lambda_{21} - \lambda_{23}\lambda_{41}\lambda_{43}^{-1}$; $g_{22} = \lambda_{22} - \lambda_{23}\lambda_{42}\lambda_{43}^{-1}$;
 $\xi_1 = \lambda_{13}\lambda_{43}^{-1}(1 + \lambda_{44}) - \lambda_{14}$; $\xi_2 = \lambda_{23}\lambda_{43}^{-1}(1 + \lambda_{44}) - \lambda_{24}$.

Матрица перехода от сечения $j = 2s-1$ до $j = 2s$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1(2s) \\ Q_1(2s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\tilde{c}^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(2s-1) \\ Q_1(2s-1) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Зависимости (5) и (6) определяют матрицу перехода для главного вала в границах одного модуля:

$$\begin{bmatrix} a_1(2s) \\ Q_1(2s) \end{bmatrix}^T = U \begin{bmatrix} a_1(2s-2) \\ Q_1(2s-2) \end{bmatrix}^T + M \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}^T, \quad (7)$$

где $U = \|u_{ik}\|$; $u_{11} = g_{11} + g_{21}\Delta\tilde{c}^{-1}$; $u_{12} = g_{12} + g_{22}\Delta\tilde{c}^{-1}$; $u_{21} = g_{21}$; $u_{22} = g_{22}$.

Относительно сечений $j = 2s$ рассматриваемая система имеет разветвленную структуру, а замкнутый контур отвечает лишь внутренней структуре каждого модуля. В общем случае каждый модуль может также иметь регулярную структуру. Введём понятие «порядок регулярности», под которым будем понимать порядок соответствующей матрицы перехода, равный L . При этом число реакций, возникающих при разрыве связей, равно $0,5L$. Для приведенной модели имеем $L = L_s = 4$ (модуль s) и $L = L_* = 2$ (цепочка, включающая N модулей).

4. Определение амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик. Рекуррентная зависимость (7) является матричной формой неоднородной системы разностных уравнений, решение которой может быть представлено в виде.

$$\begin{bmatrix} a_1(2s) \\ Q_1(2s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}^s \begin{bmatrix} a_1(0) \\ a_1(0)R_0 \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} z_{1s} \\ z_{2s} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Здесь $Z_s = [z_{1s}, z_{2s}]^T = \sum_{k=0}^{s-1} U^{s-k-1}\xi$; $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T$; $a_1(0)$ – комплексная амплитуда в сечении $j = 0$; $R_0 = (\tilde{c}_{02} - J_0\omega^2)\tilde{c}_{01}/(\tilde{c}_{01} + \tilde{c}_{02})$ – динамическая жесткость на «входе» регулярной части системы (в общем случае функция R_0 может иметь более сложный вид и включать характеристику двигателя и передаточных механизмов привода).

Для определения $a_1(0)$ воспользуемся граничным условием $Q_1(2N) = 0$ (отсутствие момента на конце главного вала). Используя (8), запишем

$$a_1(0)(u_{21}^{(N)} + u_{22}^{(N)}R_0) + Mz_{2,N} = 0.$$

Отсюда

$$a_1(0) = -\frac{M z_{2,N}}{u_{21}^{(N)} + u_{22}^{(N)} R_0} \quad (9)$$

Здесь и ниже $u_{vk}^{(s)}$ ($s = \overline{1, N}$) отвечает соответствующему элементу матрицы U^s .

На основании (8) и (9) при заданной частоте $m\omega$ определяются комплексные значения амплитуд колебаний и нагрузок главного вала в сечениях $j = 2s$ («выход» модуля s). Соответствующие амплитуды в промежуточных сечениях $j = 2s - 1$ теперь легко найти с помощью зависимости (6):

$$a_1(2s - 1) = a_1(2s) - Q_1(2s)\Delta\tilde{c}^{-1}; \quad Q_1(2s - 1) = Q_1(2s). \quad (10)$$

Более точный способ описания форм колебаний и учета граничных условий основан на использовании свойств регулярных колебательных систем [4,5,6]. Введем в рассмотрение следующие функции: $\chi = 0, 5(u_{11} + u_{22}) = 0, 5\text{Sp}U$, ($\text{Sp}U$ – след матрицы U); при $|\chi| \leq 1$ $\theta = \arccos \chi$, $f_s = \cos s\theta$, $v_s = \sin s\theta$; при $\chi > 1$ $\theta = \text{Arch}\chi$, $f_s = \text{ch } s\theta$, $v_s = \text{sh } s\theta$; при $\chi < -1$ $\theta = \text{Arch}|\chi| + i\pi$ ($i = \sqrt{-1}$). Тогда решение неоднородного разностного уравнения может быть представлено как

$$a_1(2s) = h_1 f_s + h_2 v_s + z_{1s} M, \quad (11)$$

где h_1, h_2 – медленно меняющиеся функции, определяемые из граничных условий.

Учёт граничных условий приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно h_1 и h_2 :

$$\left. \begin{aligned} h_1(u_{11} + u_{12}R_0 - f_1) + h_2v_1 &= 0; \\ h_1(u_{22}f_N - f_{N-1}) + h_2(u_{22}v_N - v_{N-1}) &= \mu. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Отсюда

$$h_1 = \mu\Psi_{12} / \Delta; \quad h_2 = \mu\Psi_{11} / \Delta, \quad (13)$$

где $\Delta = \Psi_{11}\Psi_{22} - \Psi_{12}\Psi_{21}$; $\Psi_{11} = -u_{11} - u_{12}R_0 + f_1$; $\Psi_{22} = u_{22}v_N - v_{N-1}$; $\Psi_{12} = v_1$; $\Psi_{21} = u_{22}f_N - f_{N-1}$; $\mu = (u_{22}\xi_1 - u_{12}\xi_2)M$.

Итак, зависимости, определяющие амплитудные значения для всех характерных сечений главного вала получены. Тем самым задача сведена к анализу амплитуд вынужденных колебаний исполнительного органа на каждом выделенном модуле s . На основании (2)) при учете (8) получаем

$$\left. \begin{aligned} a_2(2s) &= \lambda_{43}^{-1}[\lambda_{41}a_1(2s) + \lambda_{42}Q_1(2s) + (1 + \lambda_{44})M]; \\ a_2(2s - 1) &= \lambda_{31}[a_1(2s - 2)] + \lambda_{32}[Q_1(2s - 2)] + \lambda_{33}[a_2(2s - 2)] - \lambda_{34}M. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Полученные амплитудные значения являются комплексными величинами, модуль которых $|a_k|$ определяет амплитудно-частотную характеристику, а аргумент – фазочастотную характеристику.

Для иллюстрации разработанной методики расчета примем следующие исходные данные: $J_0 = 0,02$, $J_1 = 0,5$, $J_2 = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $c_{01} = c_{02} = 2 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $c_1 = 2,25 \cdot 10^4$, $c_2 = 2 \cdot 10^4$, $c = 1,5 \cdot 10^4$, $\Delta c = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $\delta = \delta_v 0,03$ (ввиду малых значений коэффициентов демпфирования δ_v модуль комплексной жесткости практически совпадает с коэффициентом жесткости соответствующего элемента). $P'_* = 1$; $N = s_{\max} = 4$ – число модулей.

Форма колебаний в зависимости от ω_m может описываться как тригонометрическими, так и гиперболическими функциями (см. выше). На рис. 2 приведены графики функции $\chi(\omega_m)$, устанавливающие границы соответствующих областей. Как уже отмечалось, при $|\chi| < \chi_* = 1$ форма тригонометрическая, а при $|\chi| > 1$ – гиперболическая. Сплошные линии графиков отвечают $\Pi'_* = 1$, а штриховые – $\Pi'_* = 0,2$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют $\varphi_1^0 = 0; 0,7; \pi/2$.

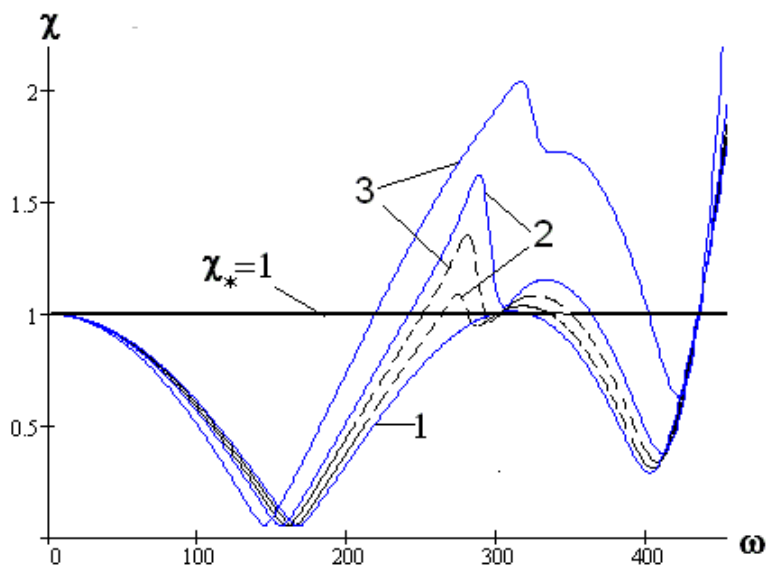


Рис.2. Области существования тригонометрических и гиперболических колебаний

Как следует из графика, при медленном изменении параметров за счет переменности геометрических характеристик механизмов в определенном частотном диапазоне возможны не только количественные, но и качественные изменения форм колебаний. С уменьшением Π'_* форма колебаний приближается к традиционному тригонометрическому виду.

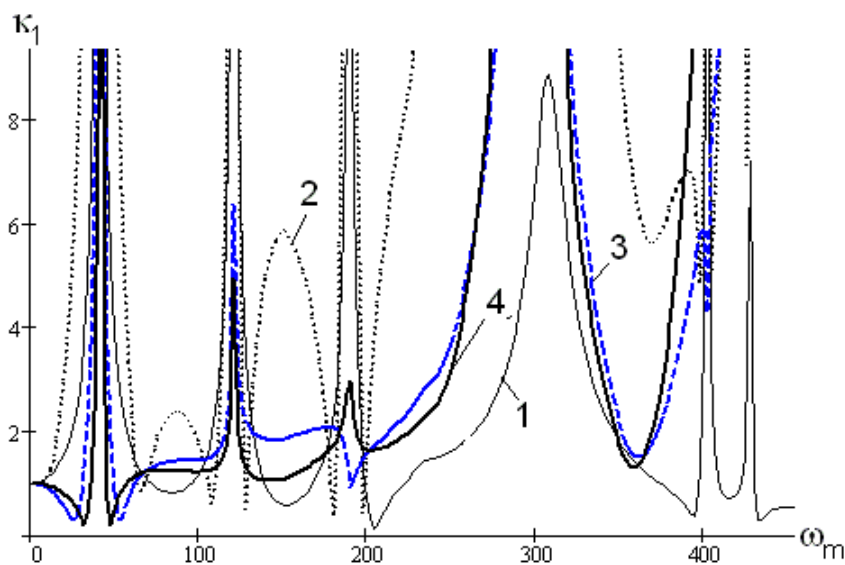


Рис.3. Амплитудно-частотные характеристики главного вала (случай 1).

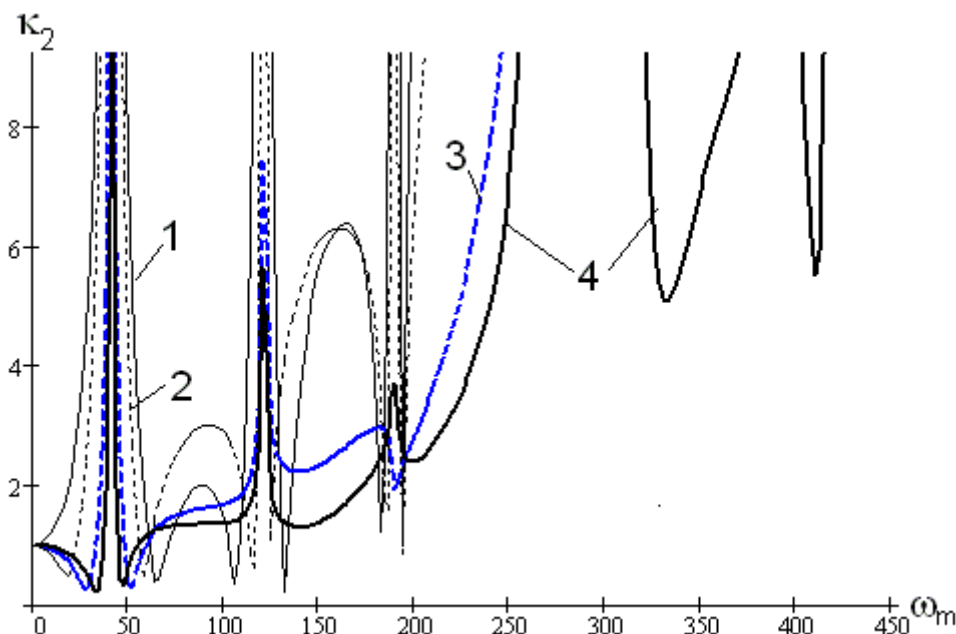


Рис.4. Амплитудно-частотные характеристики исполнительного органа (случай 1).

На рис.3,4 приведены нормированные амплитудно-частотные характеристики $\kappa_1(\omega_m, s) = [a_1(\omega_m) / |a_1(0)|]_{j=2s}$; $\kappa_2(\omega_m, s) = [a_2(\omega_m) / |a_2(0)|]_{j=2s}$, полученные на основании (12), (13), (14): (номер кривой отвечает значению s) при усреднённых значениях параметров (случай 1). Таким образом, функции κ_1 , κ_2 равны амплитуде вынужденных колебаний в соответствующем сечении, отнесенной к «статической» амплитуде ($\omega_m = 0$) в том же сечении. Как следует из графиков, наиболее сильное возбуждение имеет место в окрестности парциальной частоты исполнительного органа $k = \sqrt{c/J_2}$. При определении абсолютных значений амплитуд следует иметь в виду, что статическая амплитуда длинных главных валов может существенно возрастать по мере удаления от входного сечения, т.е. с увеличением номера s . Поэтому расчёту колебаний должна предшествовать оценка деформаций привода под действием кинестатических нагрузок.

5. Влияние переменности геометрических характеристик приводных цикловых механизмов. Выше при определении амплитуд вынужденных колебаний были использованы усредненные значения первой геометрической передаточной функции $\Pi'(\varphi_1^0)$. Как показано в [4], если Π' по сравнению с внешним возмущением является медленно меняющейся функцией (т.е. $\omega_m \ll \omega$), по существу, не происходит сколько-нибудь заметной частотной трансформации рассматриваемой гармоники. Учет переменности Π' в подобных случаях приводит лишь к амплитудной модуляции колебаний, напоминающей режим биений, и к некоторому «размыванию» резонансных пиков.

Рассмотрим случай, когда функция Π' и вынуждающий момент имеют соизмеримые частоты (случай 2). Такая ситуация обычно возникает, если возмущение вызвано силами инерции переносного движения при полнооборотном вращении входного звена. Тогда при $m = 1$ условия гармонического баланса соблюдаются при матрице перехода [3]

$$\Lambda_{\Pi} = \text{diag} \{0,5\Pi'_*, 2/\Pi'_*\}.$$

При этом переход через элемент Π сопровождается не только амплитудной, но и частотной трансформацией, а также замещением синусоидальных членов косинусоидальными и наоборот, что отвечает фазовым сдвигам на $\pi/2$.

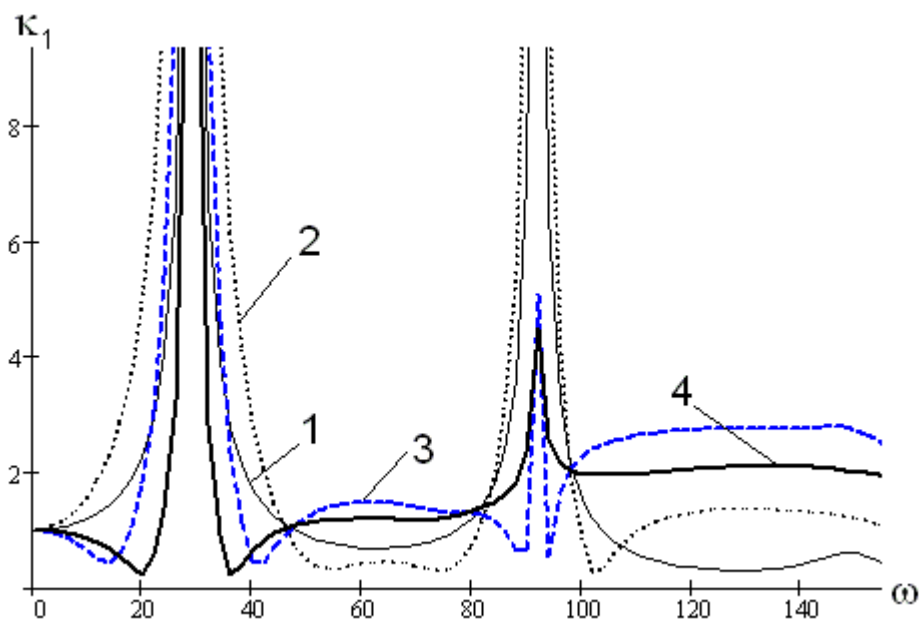


Рис.5. Амплитудно-частотные характеристики главного вала (случай2)

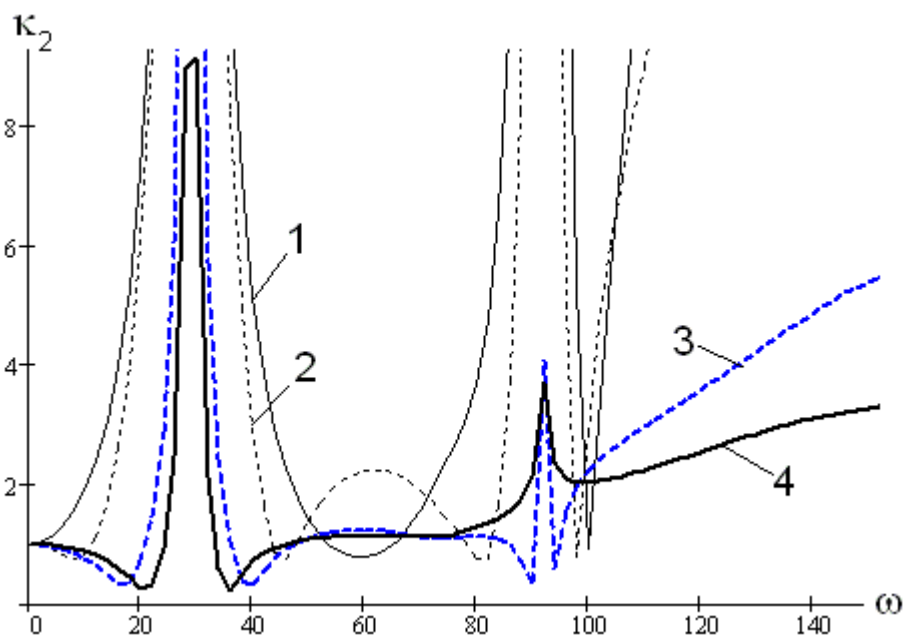


Рис.6. Амплитудно-частотные характеристики исполнительного органа (случай 2)

При применении матриц перехода рассматриваемого вида следует иметь в виду, что частота возбуждения на ведущей части в два раза превышает частоту на ведомой. При достаточном удалении частот ω и 2ω от резонансных зон вынужденные колебания по этим гармоникам близки к статической деформации под действием кинетостатической нагрузки. В подобных случаях частотная трансформация не столь существенна. Так, например, при отношении ω к низшей «собственной» частоте меньше, чем $1/8$, разница в коэффициентах динамичности по частотам ω и 2ω не превышает 5%. Использование матрицы перехода (15) в зависимостях (2), (3) приводит к коррективам функции R_1 , в которой теперь вместо ω следует подставить 2ω . При этом нормированные амплитудно-частотные характеристики ото-

бражаются графиками, приведенными на рис.5,6 (нумерация кривых соответствует номеру модуля s). Как следует из графиков, резонансные зоны по сравнению с ранее приведенными результатами смещаются к меньшим значениям ω .

Литература

1. **Вульфсон И.И., Преображенская М.В.** Исследование колебательных режимов, возбуждаемых при переключке в зазорах цикловых механизмов, соединенных с общим исполнительным органом. – Проблемы машиностроения и надежности машин. №1, 2008. С.33–39.
2. **Вульфсон И.И.** Регулярные крутильные колебательные системы с сосредоточенными параметрами приводов цикловых машин разветвленно-кольцевой структуры. // Теория механизмов и машин. Т.6. №1 (11).2008. С. 48–54.
3. **Сорокин Е.С.** Динамический расчет несущих конструкций. – М.: Госстройиздат, 1958. 325 с.
4. **Вульфсон И.И.** Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с
5. **Вульфсон И.И.** Колебания в машинах./Учебное пособие. – СПб.: СПГУТД, 2008. 260с.
6. **Бидерман В. Л.** Теория механических колебаний.– М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

Поступила: 30.11.10.