УДК 519.7

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТЕЛ С НАДРЕЗАМИ

**© Ю.Г. Матвиенко**

*Институт машиноведения РАН, Россия, Москва*

***Аннотация.*** *В настоящей статье предложены некоторые методологически единые подходы к описанию деформирования и разрушения тел, одинаково приемлемые как для тел с вырезами, так и для тел с трещинами.*

***Ключевые слова:*** *трещиностойкость тел с вырезами, когезионные напряжения.*

Перспективность развития подходов классической механики деформирования и разрушения тел с трещинами применительно к телам с вырезами и надрезами обусловлена целесообразностью неконсервативной оценки критического состояния и ресурса машин и конструкций при наличии в них трещиноподобных дефектов с ненулевым радиусом скругления вершины дефекта. При этом соответствующие критериальные уравнения и уравнения состояния тел с вырезами и надрезами позволяют устранить существующий разрыв между подходами классической механики разрушения и подходами, основанными на коэффициентах концентрации напряжений, используемых для описания деформирования и разрушения тел с концентраторами напряжений. В настоящей статье предложены некоторые методологически единые подходы к описанию деформирования и разрушения тел, одинаково приемлемые как для тел с вырезами, так и для тел с трещинами.

*Диаграммы трещиностойкости тел с вырезами.* Модель зоны предразрушения у вершины выреза и критерий осреднения нормальных напряжений в ней позволили сформулировать критерий разрушения для построения диаграмм трещиностойкости тел с U-образными вырезами произвольного размера в следующем виде [1-4].

$$K_{1notch} = K_{1C}\sqrt{1-\left(\frac{\sigma}{\sigma_{coh}}\right)^2}\left[1-\left(\frac{\sigma_{coh}}{\sigma}\right)^2\frac{1}{K_t^2}\right]^{-1/2}. \quad (1)$$

Здесь коэффициент интенсивности напряжений в вершине выреза обозначен как $K_{1notch}$, $K_t$ - теоретический коэффициент концентрации напряжений, $\sigma_{coh}$ - когезионные напряжения, действующие в зоне предразрушения, $\sigma$ - равномерно распределенные растягивающие напряжения, приложенные перпендикулярно плоскости выреза вдали от него.

Критерий разрушения (1) посредством теоретического коэффициента концентрации напряжений учитывает уменьшение степени стеснения деформаций у вершины выреза по сравнению с трещиной. В предельном случае, рассматривая трещину как острый вырез ($K_t \to \infty$), из критерия (1) получаем критерий разрушения тела с трещиной и соответствующую диаграмму трещиностойкости.

Будем полагать, что изменение степени стеснения деформаций в зоне предразрушения у вершины выреза обусловлено двумя независимыми факторами: конечностью радиуса скругления вершины выреза и несингулярной составляющей напряжений. В этом случае эффект несингулярных напряжений может быть учтен из следующей модели поля напряжений у вершины трещины.

В общем случае асимптотическое поле упругих напряжений у вершины трещины может быть представлено в виде известной суперпозиции сингулярной и несингулярной составляющих напряжений

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T\delta_{1i}\delta_{1j}, \qquad (2)$$

где $K$ - коэффициент интенсивности напряжений, $\delta_{ij}$ - символ Кронеккера, $f_{ij}(\theta)$ - угловая функция напряжений, $r$ - расстояние от вершины трещины. Несингулярная составляющая (Т-напряжения) представляет собой растягивающее (или сжимающее) напряжение и может быть использовано в качестве параметра стеснения деформаций у вершины трещины, влияющего на когезионные напряжения в зоне предразрушения [5].

В случае тел конечных размеров и различных схем нагружения для оценки Т-напряжений вводится безразмерный параметр двухосности $\beta$

$$T = \beta(l/B)\sigma, \qquad (3)$$

где $l$ и $B$ – длина трещины (выреза) и ширина тела, соответственно. Параметр $\beta$ может рассматриваться как мера стеснения деформаций в зоне предразрушения у вершины трещины. Параметр двухосности $\beta$ табулирован, а также представлен в виде графиков для тел различных геометрий и схем нагружения [3].

В настоящей работе когезионные напряжения в зоне предразрушения определены в соответствие с критерием текучести Мизеса

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_T) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 2\sigma_T^2 = 0, \qquad (4)$$

где $\sigma_T$ - предел текучести. Напряжения $\sigma_1, \sigma_2$ и $\sigma_3$ - главные напряжения, которые в зоне предразрушения приняты независимыми от расстояния от вершины трещины. Аналогично решению (2) напряжения $\sigma_2$, параллельные плоскости трещины могут быть представлены в виде $\sigma_2 = \sigma_1 + T$. Напряжения $\sigma_3$ равны $\nu(\sigma_1 + \sigma_2)$ и 0 для плоской деформации и плоского напряженного состояния, соответственно. В качестве когезионных напряжений $\sigma_{coh}$ приняты напряжения $\sigma_1$, которые могут быть представлены из критерия Мизеса (4) с учетом формулы (3) в виде

$$\frac{\sigma_{coh}}{\sigma_T} = -\frac{\beta}{2}\left(\frac{\sigma_C}{\sigma_T}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\beta\sigma_C}{\sigma_T}\right)^2 - \frac{(1+\nu^2-\nu)(\beta\sigma_C/\sigma_T)^2 - 1}{(1-2\nu)^2}} \qquad (5)$$

для плоской деформации и

$$\frac{\sigma_{coh}}{\sigma_T} = -\frac{\beta}{2}\left(\frac{\sigma_C}{\sigma_T}\right) + \sqrt{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{\beta\sigma_C}{\sigma_T}\right)^2} \qquad (6)$$

для плоского напряженного состояния.

Таким образом, когезионные напряжения для тел конечных размеров могут быть представлены в функции разрушающих напряжений $\sigma = \sigma_C$ и параметра двухосности $\beta$ (степени стеснения деформаций в когезионной зоне), что отражается на диаграммах трещиностойкости в соответствие с критериальным уравнением (1).

В общем случае параметр двухосности $\beta(l/B)$ и разрушающие напряжения $\sigma_C$ взаимозависимы, поскольку напряжения $\sigma_C$ также являются функцией размера трещины $l$. Поэтому, для расчета когезионных напряжений по формулам (5) и (6) в случае тела конечной геометрии и заданной схемы нагружения необходимо располагать зависимостью разрушающих напряжений и параметра двухосности от длины трещины (выреза).

Применение критериального уравнения диаграммы трещиностойкости тела с тонким U-образным вырезом с введением в него коэффициента безопасности проиллюстрировано на примере оценки допустимой глубины протяженных поверхностных дефектов в обечайке сосуда давления.

*Расчет J-интеграла для пластины с U- и V-образными вырезами и надрезами.* Для оценки J-интеграла тела произвольной геометрии с трещиной или вырезом, а также произвольной схемы нагружения успешно могут быть использованы численные методы, например, метод конечных элементов (МКЭ). Следует отметить, что численный анализ еще достаточно дорогостоящий и продолжительный по времени для широкомасштабных инженерных расчетов. Кроме того, часто возникают объективные трудности при использовании результатов численных расчетов для тел другой конфигурации и схемы нагружения, а также материалов с различающимися механическими и физическими свойствами. Вместе с тем, количество аналитических решений для оценки J-интеграла весьма ограничено и, главным образом, относится к телам с трещиной.

Сведение пути интегрирования к контуру вершины (в виде полуокружности радиуса $\rho$) U-образного выреза, свободному от напряжений, позволило получить простую формулу [3] для J-интеграла посредством выражения

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W(\theta)\rho\cos(\theta)d\theta \qquad (7)$$

и предположения о распределении плотности энергии деформации $W(\theta)$ на контуре вершины выреза в виде

$$W(\theta) = W_{\max}\cos(\theta). \qquad (8)$$

Здесь $\theta$ - угловая координата на контуре вершины выреза в полярной системе координат с полюсом в центре окружности выреза, $W_{\max}$ - максимальная плотность энергии деформации на поверхности вершины выреза, рассчитываемая аналитически для линейно упругого или нелинейно упрочняющегося материала, с учетом теоретических коэффициентов концентрации напряжений $K_t$.

Однако численные МКЭ оценки показали справедливость этих аналитических оценок значений $W(\theta)$ и J лишь для тел с достаточно острыми вырезами, т.е. $l/\rho \to \infty$.

Для установления общего закона распределения плотности энергии деформации $W(\theta)$ на контуре вершины тупых U- и V-образных вырезов (симметричных надрезов) в пластине при одноосном растяжении был проведен многопараметрический МКЭ анализ [6]. В расчетах варьировали остроту вырезов и надрезов в широком диапазоне $l/\rho$ ($l/\rho$ =4, 10, 25, 60, 150 и 400) с исходными углами раскрытия V-образных вырезов (надрезов) $0 \le 2\alpha \le 135^o$. Кроме того, исследовали эффект монотонно прикладываемых напряжений $\sigma$ ($\sigma/\sigma_T = 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6$ и $0{,}8$) и деформационного упрочнения материала на характер распределения $W(\theta)$.

Таким образом, более тщательный МКЭ анализ позволил установить общий аналитический вид распределения плотности энергии деформации $W(\theta)$ на контуре вершины вырезов и надрезов конечной остроты $l/\rho$ [6]

$$W(\theta) = W_{\max}\cos^{\delta}(\theta), \qquad (9)$$

где $\delta$ - показатель степени, расчетные формулы для которого приведены в [6]. Погрешность результатов расчета $\delta$ по приведенным формулам не превышала 1% по сравнению с результатами МКЭ расчета. Показано, что показатель степени в распределении плотности энергии деформации (9) зависит от вида U- и V-образных вырезов (надрезов), их остроты и исходного угла раскрытия V-образного выреза (надреза), но не зависит от приложенных напряжений и деформационного упрочнения материала [6]. Кроме того, при увеличении остроты $l/\rho$ показатель $\delta$ имеет тенденцию стремления к единице, т.е. к распределению плотности энергии деформации (8) для острых U-образных вырезов и надрезов.

Расчет J-интеграла для пластины с V-образным центральным вырезом и симметричными боковыми надрезами в условиях растяжения проводили по формуле

$$J = \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2-\alpha} W(\theta)\,\rho\cos(\theta)d\theta\,, \qquad (10)$$

которая для линейно упругого материала в случае плоской деформации принимает следующий вид

$$J_e = \frac{\rho\left(1-\nu^2\right)\left(K_t\sigma\right)^2}{E}\int_0^{\pi/2-\alpha}\left(\cos(\theta)\right)^{\delta+1}d\theta\,, \qquad (11)$$

где $\nu$ - коэффициент Пуассона. В выражении (11) в интегрировании по контуру рассматривается только вклад от криволинейной части вершины выреза, исключая вклад прямолинейных участков выреза. При исходном угле раскрытия вершины выреза $\alpha$ =0, V-образные вырез и надрезы трансформируются в U-образные. В случае нелинейно упрочняющегося материала J-интеграл может быть представлен в функции максимальных эквивалентных напряжений $\sigma_{\max}$ в вершине выреза (симметричных надрезов) в следующем виде

$$J = 2\rho\left[\frac{\left(\sigma_{\max}\right)^2}{2E} + \frac{n}{n+1}\frac{\left(\sigma_{\max}\right)^{n+1}}{K^n}\right]\int_0^{\pi/2-\alpha}\left(\cos(\theta)\right)^{\delta+1}\mathrm{d}\theta\,. \qquad (12)$$

При этом для расчетной оценки значения J максимальные эквивалентные напряжения на контуре выреза должны быть известны или вычислены аналитически или численно. Отметим, хорошее соответствие результатов оценок J-интеграла аналитическим и численным методами. Максимальная ошибка расчетов J по предложенным формулам с использованием максимальных эквивалентных напряжений Белтрами $\sigma_{\max}$ не превышает 5%.

Таким образом, предложенные аналитические формулы расчета плотности энергии деформации $W(\theta)$ на контуре вершины тупых вырезов и надрезов конечной остроты, а также расчета J-интеграла для линейно упругих и нелинейно упрочняющихся тел с вырезами и надрезами представляются достаточно эффективными в инженерных расчетах предельного состояния как тел с тупыми вырезами (надрезами), так и трещинами. При этом использование критерия разрушения $J = J_{\rho,c}$ предполагает экспериментальное определение упругопластической трещиностойкости $J_{\rho,c}$ при наличии надреза. Экспериментальная методика определения $J_{\rho,c}$ на нестандартных образцах или элементах конструкции с надрезами может быть основана на методе сепарабельных функций.

*Метод сепарабельных функций в механике разрушения.* Метод сепарабельных функций находит применение при вычислении коэффициентов $\eta$ для расчета J-интеграла по формуле

$$J = \eta\frac{A}{t\left(B-l\right)}, \qquad (13)$$

и при экспериментальном определении трещиностойкости $J_c$ материалов на нестандартных образцах с трещиной [3, 7], но и позволяет определять трещиностойкость $J_{\rho,c}$ материалов на нестандартных образцах при наличии надрезов. В формуле (13) $A$ - общая площадь под диаграммой «приложенная нагрузка $P$ – смещение точек приложения нагрузки $\Delta$», $l$ - длина надреза, $t$ - толщина и $B$ - ширина образца. Следует отметить, что метод позволяет исключить необходимость вычисления коэффициента интенсивности напряжений в вершине надреза для определения упругой составляющей J-интеграла для определения трещиностойкости $J_{\rho,c}$ при наличии надреза.

Сущность метода сепарабельных функций заключается в следующем [3]. Предполагается, что приложенная к образцу (или элементу конструкции с надрезом) нагрузка может быть представлена в виде произведения двух функций: геометрической функции, отражающей особенности геометрии образца, надреза и схемы нагружения, и деформационной функции, характеризующей свойства материала. При этом, в рассмотрение вводится сепарабельный параметр $S_{ij}$ как отношение нагрузок $P(l, \Delta)$ идентичных образцов, но с различающимися размерами надрезов $l_i$ и $l_j$, во всем диапазоне изменения смещения точек приложения нагрузки. Для экспериментального определения коэффициента $\eta$ необходимо испытать, по крайней мере, 3 образца с различающимися размерами надрезов. Сепарабельный параметр $S_{ij}$ диаграммы $P-\Delta$ каждого испытанного образца получается делением нагрузок этой диаграммы на нагрузки диаграммы базового образца при одинаковом смещении точек приложения нагрузок. Далее необходимо определить сепарабельные константы для каждого испытанного образца на зависимостях «сепарбельный параметр $S_{ij}$ - смещение точек приложения нагрузки». Наклон прямой линии, проведенной через сеперабельные константы на диаграмме $\log(S_{ij})-\log(B-l_i/B)$, дает коэффициент $\eta$ для испытанных образцов с надрезом, что позволяет рассчитать по формуле (13) трещиностойкость при наличии надреза.

Вышерассмотренный метод сепарабельных функций был использован при экспериментальном определении трещиностойкости нестандартных криволинейных образцов, вырезанных из труб стали API 5L X52, с V-образными надрезами при испытании на трехточечный изгиб.

Таким образом, модели и критериальные уравнения классической механики разрушения тел с трещинами адаптированы к анализу деформирования и разрушения тел с вырезами и надрезами. Это позволяет унифицировать модели, критерии и методы расчета текущего, критического и безопасного состояний элементов машин и конструкций как с тупыми вырезами и надрезами, так и с трещинами.

## Литература

1. Матвиенко Ю.Г. Анализ допустимых размеров трещиноподобных дефектов на основе диаграмм трещиностойкости// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. № 2. С. 110-115.
2. Матвиенко Ю.Г., Приймак О.А., Элкснин В.В. Методика оценки допустимой глубины протяженного поверхностного дефекта в сосудах давления// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. № 6. С. 49-54.
3. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006. 328 с.
4. Матвиенко Ю.Г. Влияние двухосного нагружения на диаграммы трещиностойкости тел с трещинами и тонкими вырезами// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 5. С. 37-41.
5. Broberg K.B. Influence of *T*-stress, cohesive strength and yield strength on the competition between decohesion and plastic flow in a crack edge vicinity// International Journal of Fracture. 1999. Vol. 100. P. 133-142.
6. Berto F., Lazzarin P., Matvienko Yu.G. J-integral evaluation for U- and V-blunt notches under Mode I loading and materials obeying a power hardening law// International Journal of Fracture. 2007. Vol. 146. P. 33-51.
7. Kim Y.S., Matvienko Yu.G., Jeong H.C. Development of experimental procedure based on the load separation method to measure the fracture toughness of Zr-2.5Nb tubes// Key Engineering Materials. 2007. Vol. 345-346. P. 449-52.

*Поступила: 06.07.10.*