

УДК 534

## ОБЗОР ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ВИБРОУДАРНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ШИРОКОПОЛОСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

© В.Л. Крупенин

**Аннотация.** Дается обзор динамики виброударных систем со многими степенями свободы в случае, когда вынужденные случайные колебания возбуждаются широкополосными процессами типа белых шумов. Методы расчета основаны на теории диффузионных марковских процессов. Рассматриваются линейные и решетчатые конструкции с одномерными и многомерными соударениями. Обсуждаются перспективы дальнейшего развития изучения данного класса задач и их принципиальных обобщений.

**Ключевые слова:** случайные виброударные процессы; двумерные решетчатые системы; трехмерные виброударные цепочки, стопки соударяющихся решеток, методы диффузионных марковских процессов; каноническое распределение Гиббса; распределение Больцмана; распределение Максвелла.

1. В работах [1,2] изучались одномерные цепочки точечных тел, соударяющиеся с неподвижными ограничителями, которые могли быть расположены как с обеих сторон от тел, так и вовсе отсутствовать. Нити предполагались невесомыми и натянутыми, заделанными на краях. Приведем пример такой системы (рис.1).

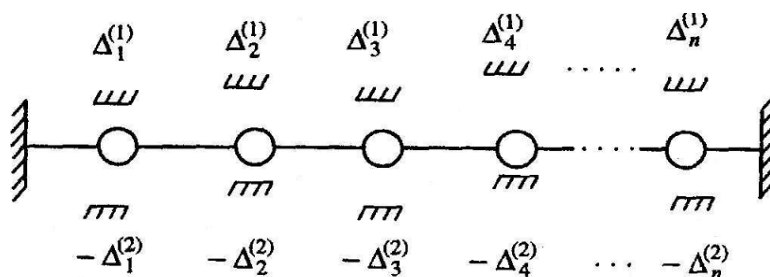


Рис.1

Предполагая, что сопротивление движению пропорционально абсолютным скоростям частиц, запишем определяющие уравнения движения, в линейном приближении:

$$\begin{aligned} m u_{1tt} + 2b u_{1t} + c(2u_1 - u_2) &= \xi_1(t), & m u_{ktt} + b u_{kt} + c_1(2u_k - u_{k-1} - u_{k+1}) &= \xi_k(t); \\ m u_{Ntt} + 2b u_{Nt} + c(2u_N - u_{N-1}) &= \xi_N(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где нижняя индексация по независимой переменной обозначает дифференцирование.

Силы возбуждения  $\xi_k(t)$ , приложенные к каждому из тел, предполагаются некоррелированными случайными процессами типа белых шумов с одинаковыми интенсивностями  $S$ . Таким образом  $\langle \xi_k \xi_r \rangle = S \delta_{kr} \delta(t - t')$ ;  $\delta_{kr}$  - символ Кронекера. Угловые скобки обозначают операцию статистического усреднения.

Теперь введем условия удара. Предполагая соударения абсолютно упругими, запишем их в виде неких граничных условий

$$-\Delta_{(k)}^{(2)} \leq u_k \leq \Delta_{(k)}^{(1)}; u_k = -\Delta_{(k)}^{(2)}; u_{ki}(t_0-0) = -u_{ki}(t_0+0) < 0; \quad (2)$$

$$u_k = \Delta_{(k)}^{(1)}; u_{ki}(t_0-0) = -u_{ki}(t_0+0) < 0.$$

Граничные условия (2) определяют силы упругих ударов в каждой из 4N ударных пар. Приводя остальные параметры системы к единичной массе и, положив  $m=1$ , Запишем гамильтониан системы в виде:

$$H(u; y) = \sum 1/2 y_k^2 + 1/2 c [u_1^2 + u_N^2 + \sum c_2 (u_q - u_{Nq})^2] + \dots \quad (3)$$

где суммирование по  $k$  ведется от 1 до  $N$ ; суммирование по  $q$  – в пределах от 2 до  $N-1$ ;  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ ;  $y = (y_1, y_1, \dots, y_N)$  – векторы фазовых координат;  $y_k = u_{ki}$ , многоточие обозначает отброшенные ангармонические члены..

Для решения поставленной задачи, то есть для описания искомого случайного процесса  $\{u_k(t); y_k(t)\}$  воспользуемся методами диффузионных марковских процессов [3-7]. Предполагая процесс стационарным, будем искать его  $2N$  – мерную стационарную совместную плотность вероятностей  $p(u_1, u_2, \dots, u_N; y_1, y_1, \dots, y_N) \equiv p(u_k, y_k)$ . Запишем уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для уравнений движения (1) и гамильтониана (3) в виде [7]:

$$\sum_{k=1}^N [\{H, p\}_k - 2b \partial (y_k p) / \partial y_k - 1/2 S \partial^2 p / \partial y_k^2] = 0, \quad (4)$$

причем  $\{H, p\}_k \equiv (\partial H / \partial y_k) (\partial p / \partial u_k) - (\partial H / \partial u_k) (\partial p / \partial y_k)$  – скобка Пуассона для  $k$ -й частицы.

Граничные условия к уравнению (4) оказываются такими. Первое условие (2) ограничивает изменение координат системы в определенных пределах. Другие условия (2) в силу произвольности чисел  $\Delta_{(k)}^{(1),(2)}$  приводят к требованию четности  $p(u, y)$  по скоростям  $u_k$ ; недостижимость бесконечных энергий приводит к требованию стремления этой функции к нулю, если хотя бы при одном  $k$ :  $u_k \rightarrow \pm \infty$

Решение уравнения (4) дает известное в статистической физике каноническое распределение Гиббса:

$$p(u_k; y_k) = C \exp \{-4bS^{-1} H(u_1, u_2, \dots, u_N; y_1, y_1, \dots, y_N)\}; -\Delta_{(k)}^{(2)} \leq u_k \leq \Delta_{(k)}^{(1)}. \quad (5)$$

Постоянная нормировки отвечает условию:

$$\int \int_{X \rightarrow \infty} p(u; y) du dy = 1; X = \{-\Delta_{(k)}^{(2)} \leq u_k \leq \Delta_{(k)}^{(1)}\}.$$

Здесь интегрирование ведется по всем фазовым переменным, а  $dz = dz_1 dz_2 \dots dz_n$ .

Нельзя не отметить, что задачу можно существенно расширить, отказавшись от предположения об одномерности движения  $u_k$  и, соответственно, от столь специального вида ограничителей (см. ниже).

2. Вернувшись к распределению (5), отмечаем, что по скоростям мы приходим к хорошо изученному распределению Максвелла

$$p(y_1, y_1, \dots, y_N) = C_2 \exp \{-2bS^{-1} \sum_{k=1}^N y_k^2\}. \quad (6)$$

Это распределение удобно здесь использовать для вычисления статистических характеристик импульсов ударов  $J_k = 2|y_k|$ . После простых вычислений находим усеченное распределение ( $J$  – вектор импульсов)

$$p(J) = [2b/\pi S]^{0,5N} \exp [-b/2S \sum_{k=1}^N J_k^2], J_k \geq 0, \quad (7)$$

При посредстве этой формулы можно получить всю необходимую информацию об импульсах и силовых воздействиях в системе. Например, для нечетных и четных начальных моментов одномерных величин  $J_j$  после ряда вычислений [6] найдем:

$$m^{(2N+1)}(J) = \sqrt{\frac{2b}{\pi S}} \frac{N!}{2(b/2S)^{N+1}}; \quad m^{(2N)}(J) = Sb^{-1}(2N-1)!!.$$

Рассмотрим теперь распределение Больцмана по координатам:

$$p(u_1, u_2, \dots, u_N) = C_1 \exp \{-2bcS^{-1}[u_1^2 + u_N^2 + \sum c_2(u_q - u_{Nq})^2]\}, \Delta_{(k)}^{(2)} \leq u_k \leq \Delta_{(k)}^{(1)}. \quad (8)$$

Одна из основных проблем состоит в определении наиболее относительно часто встречающихся конфигураций, сопровождаемых соударениями с какими-либо ограничителями.

Подсчет проделаем, исходя из определения среднего числа пересечений равновесного уровня  $u_k = 0, k=1, 2, \dots, N$  с положительной скоростью, то есть при  $u_k > 0$ . Искомый средний уровень обозначим  $\omega_0$ . Имеем:

$$\omega_0 = \int_0^\infty y_1 y_2 \dots y_N p(0, 0, \dots, 0, y_1 y_2 \dots y_N) dy_1 dy_2 \dots dy_N,$$

что можно записать как

$$\omega_0 = C \int_0^\infty y_1 y_2 \dots y_N \exp \{-2bS^{-1} \sum_{k=1}^N y_k^2\} dy_1 dy_2 \dots dy_N \quad (9)$$

После интегрирования получаем:

$$\omega_0 = C \left( \frac{S}{4b} \right)^N.$$

Пусть  $u_a = (u_{1a}, u_{2a}, \dots, u_{Na})$  - какая-либо из конфигураций с ударами. Такая конфигурация содержит какое-то число тел, взаимодействующих с верхним (правым) ограничителем  $u_{ka} = \Delta_k^{(1)}$ , какое-то число тел, взаимодействующих с нижним (левым) ограничителем -  $u_{ja} = \Delta_j^{(1)}$ , и еще какое-то число тел, вообще не находящихся в контакте.

Пусть  $U(u_a)$  - потенциальная энергия системы при реализации конфигурации  $u_a$ . Средняя частота пересечения такой конфигурации определяется как

$$\omega_{0a} = \int_0^\infty y_1 y_2 \dots y_N \exp \{-2bS^{-1} [U(u_a) + \sum_{k=1}^N y_k^2]\} dy_1 dy_2 \dots dy_N. \quad (10)$$

Сравнив (16) и (17), найдем

$$\omega_{0a} = \exp \{ (-4 b/S) U(u_a) \} \omega_0.$$

Тогда  $\Lambda_a$  - относительная частота появления конфигурации:

$$\Lambda_a \equiv \omega_{0a}^{-1} \omega_{0a} = \exp \{ (-4 b S^{-1}) U(u_a) \}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что относительно часто будут появляться "виброударные" конфигурации с меньшими потенциальными энергиями, - такие конфигурации, естественно, обладают минимальным числом изломов: удар происходит только в одной паре или несколько ударов происходят синфазно. Напротив, при антифазных конфигурациях величины  $U(u_a)$  и, следовательно,

$L_\alpha$  растут. Таким образом, последующие диаграммы отвечающие профилям, данным на рис 2, а, б, в будут встречаться относительно реже предыдущих.

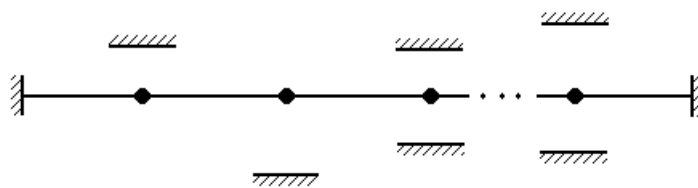


Рис. 2,а

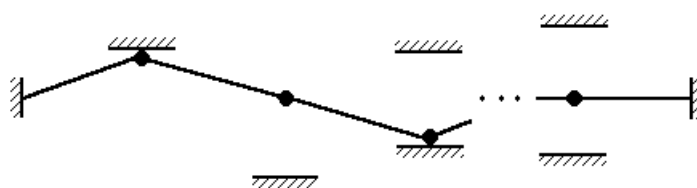


Рис. 2,б

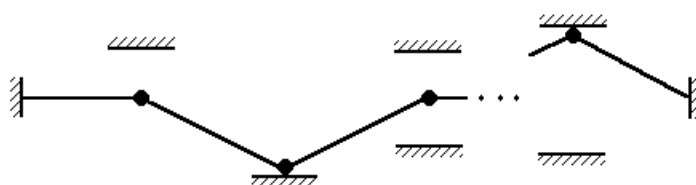


Рис. 2,в

3. Структура формулы (5) не изменится, если между ударами, в цепочке действуют также и гладкие нелинейные силы. Пусть потенциальная энергия  $U(u)$  отлична от квадратичной формы и содержит другие четные составляющие высших порядков (ангармонические члены), то есть гамильтониан системы (1) имеет вид:

$$H(u_k, y_k) = \sum 1/2 y_k^2 + 1/2 c [u_1^2 + u_N^2 + \sum c_2 (u_q - u_{Nq})^2] + \mu V(u_1, \dots, u_N), \quad (12)$$

где  $\mu$  - параметр, характеризующий влияние высших составляющих. В остальном структура формулы (12) – та же, что и (3). Отметив, также, что структура формул всех выведенных выше соотношений, описывающих конфигурации системы, не зависит от конкретного вида потенциальной энергии, внесем «потенциальную часть» (12) в (11). Имеем:

$$L_\alpha = \exp \{ (-4 b S^{-1}) U(u_\alpha) \} = \exp \{ (-2b S^{-1}) [U_0(u_\alpha) + \mu V(u_\alpha)] \}, \quad (13)$$

где  $U_0$  – квадратичный (главный) член представления потенциальной энергии. Таким образом,  $L_\alpha(u_\alpha) = L_0(u_\alpha) L_\mu(u_\alpha)$ , где первый множитель дается формулой (11) «линейный множитель», а второй («нелинейный») множитель вычисляется по той же формуле заменой  $U_0(u_\alpha)$  на  $\mu V(u_\alpha)$ .

Ясно, что для распространенных на практике «негуковских» нелинейностей, когда в представлении для  $\mu V$  будут присутствовать высшие нечетные степени  $u$ , относительная частота появления мгновенных конфигураций, отвечающих большим растяжениям, будет

только снижаться. В тоже время можно предложить классы потенциальных функций  $V$ , для которых ситуация будет обратной.

4. Можно, отказавшись от предположения об одномерности удара, получить весьма существенное обобщение исходной задачи. Допустим, что частицы системы совершают движения в пространстве  $\mathbf{R}^3$ . Пусть состояние каждой из  $n$  частиц системы определяется вектор – функцией

$\mathbf{r}_k(t) \in \mathbf{R}^3$  ( $k=1,2,\dots,n$ ), а уравнения движения трехмерной цепочки с граничными условиями жесткого заземления  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{0}$  принимают в отсутствие ударов вид

$$\begin{aligned} m\mathbf{r}_{1t} + 2b\mathbf{r}_{1t} + c(2\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \mu \partial V / \partial \mathbf{r}_1 = \xi_1(t), \quad m\mathbf{r}_{kt} + 2b\mathbf{r}_{kt} + c(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1} - \mathbf{r}_{k+1}) + \partial V / \partial \mathbf{r}_k = \xi_k(t), \\ m\mathbf{r}_{nt} + 2b\mathbf{r}_{nt} + c(2\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}) + \mu \partial V / \partial \mathbf{r}_n = \xi_n(t), \end{aligned} \quad (14)$$

причем нижняя индексация по времени  $t$  снова обозначает дифференцирование. Здесь силы упругости определяются потенциальной энергией.

$$U(r_1, \dots, r_n) = U_0(r_1, \dots, r_n) + \mu V(r_1, \dots, r_n) = \frac{1}{2} c [\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_n^2 + \sum (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1})^2] + \mu V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n), \quad (15)$$

где выражение  $\mathbf{r}_k^2 = |\mathbf{r}_k|^2$  – скалярный квадрат. Внешние случайные силы  $\xi_k(t)$  являются  $\delta$  – коррелированными стандартными белыми шумами, тензор корреляции которых имеет вид:  $\langle \xi_k^\alpha(t) \xi_k^\beta(t_1) \rangle = 2S \delta_{ik} \delta_{\alpha\beta} \delta(t-t_1)$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – векторные индексы.

Будем предполагать, что каждая частица находится в сферическом или кольцевом абсолютно жестком зазоре и удар – абсолютно упругий. На рис. 3 показан фрагмент двумерного варианта системы общего вида, то есть вместо условий удара типа (2) будем иметь, во-первых, геометрические ограничения вида  $|\mathbf{r}_k| \leq 0,5d_k$  ( $k=1,\dots,n$ ), где  $d_k$  – диаметр сферического зазора в  $k$ -й ударной паре, во-вторых, кинематические условия абсолютно упругого удара, происходящего в произвольный момент  $t = t_0$ .

$\mathbf{r}_{tkN}(t_0+0) = -\mathbf{r}_{tkN}(t_0+0)$ ,  $\mathbf{r}_{tkc}(t_0+0) = -\mathbf{r}_{tkc}(t_0+0)$ ,  $|\mathbf{r}_k(t_0)| = 0,5 d_k$ ,  
 $\mathbf{r}_{tkN}$  и  $\mathbf{r}_{tkc}$  – нормальная и касательная составляющие вектора скорости  $k$ -й частицы,  $k = 1, \dots, n$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{r}_{t\ k+}^2 = \mathbf{r}_{t\ k-}^2 \quad (16)$$

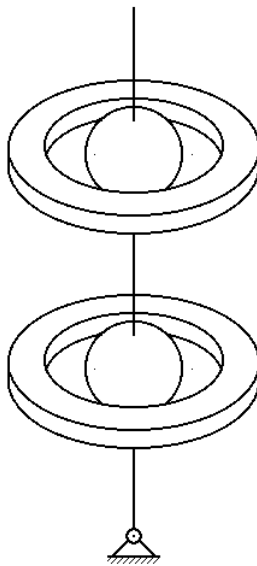


Рис. 3,а

Пусть  $\mathbf{p}_k = m\mathbf{r}_{tk}$  - импульсы частиц. Функцию Гамильтона записываем как  $H(\mathbf{r}_k; \mathbf{p}_k) = \sum 1/2 \mathbf{p}_k^2 + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ , где потенциальная энергия  $U$  дается (15). Стационарное уравнение ФПК для системы уравнений движения (18) имеет форму (4), где следует заменить скалярные величины векторными  $u_j \rightarrow \mathbf{r}_j$ ,

$$u_j \rightarrow \mathbf{p}_j$$

Искомая стационарная плотность вероятностей  $P(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = P(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ , удовлетворяющая естественным условиям невероятности достижения бесконечных импульсов, имеет вполне аналогичный формуле (7) вид

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_0 \exp[-4bS^l H(\mathbf{r}, \mathbf{p})], (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in \mathbf{G}. \quad (17)$$

Таким образом, снова получаем каноническое распределение Гиббса с добавлениями ограничений на область определения. Стационарная плотность вероятностей  $P(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  удовлетворяет сформулированным условиям "на бесконечности", так как  $H \geq 0$  при всех  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ . Кроме того, вид функции Гамильтона  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  отвечает условию (16) и, следовательно, условия удара удовлетворяются.

Геометрические ограничения, накладываемые на векторы  $\mathbf{r}_k$ , определяют  $6n$ -мерную область  $\mathbf{G} = \mathbf{X}_d \times \mathbf{R}^n$  определения функции  $P(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Причем  $\mathbf{X}_d = \{\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n); |\mathbf{r}_k| < 0,5d_k; k = 1, \dots, n\}$ .

Дальнейший анализ аналогичен проделанному. После соответствующих интегрирований правой части формулы (17) снова получим плотности вероятностей, характерные соответственно для распределения Максвелла по скоростям (импульсам) и распределения Больцмана с дополнительными ограничениями по координатам. При их посредстве можно досконально изучить любые характеристики процесса.

Например, имеет место аналог выведенной формулы (11) для относительной частоты появления той или иной конфигурации системы  $\mathbf{r}_a: \Lambda(\mathbf{r}_a) = \exp \{(-4bS^l)U(\mathbf{r}_a)\}$ . Для ударных конфигураций эта частота падает с соответствующим ростом числа изломов профиля. Поэтому в среднем она будет наибольшей для плоско поляризованных профилей с синхронными или одиночными ударами.

В приведенных рассуждениях требование "сферичности" зазоров совершенно не принципиально. Можно рассмотреть и геометрически более сложные зазоры. Важна лишь достаточная гладкость отражающих поверхностей: кинематические соотношения должны выполняться, а при наличии различного рода складок, углов и т.п. данные условия могут, естественно, и не иметь места.

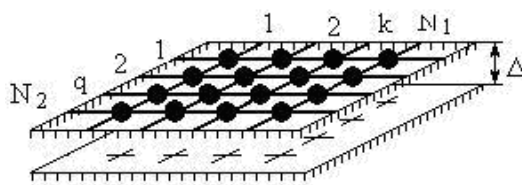


Рис. 3,б

5. Перейдем к 2D системам и рассмотрим в качестве примера случайные вибрации решетчатой конструкции с периодической структурой, колеблющейся вблизи плоского препятствия, установленного параллельно плоскости статического равновесия конструкции. Рассмотрим прямоугольную решетку [8], составленную из  $N_1 \times N_2$  упругих линейных струн, защемленных на концах и имеющих соответственно длины  $L_1$  и  $L_2$  (рис.3,б). Каждая струна нумеруется при помощи индексов  $k = 1, 2, \dots, N_1$  и  $q = 1, 2, \dots, N_2$ . Решетка содержит  $N_1 N_2$  вершин, в каждой из которых помещены точечные абсолютно твердые тела с массами  $m$ . Предполагается, что прямоугольные ячейки решетки одинаковы, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка (дискретный аналог

мембраны), возможно, анизотропна. Струнные элементы предполагаются безынерционными. Крепления струн в узлах считаются абсолютно жесткими, а натяжения струн настолько большими, что их изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» имеет длину  $\Delta L_1$ ; «вертикальная» -  $\Delta L_2$ . Пусть, далее, безынерционные «горизонтальные» участки имеют натяжение  $T_1$ , а «вертикальные» участки -  $T_2$ .

Предполагается, что параллельно плоскости статического равновесия решетки на расстоянии  $\Delta > 0$  установлена прямая стенка, с которой точечные тела, находящиеся в узлах решетки могут совершать абсолютно упругие соударения (удары предполагаются прямыми и центральными).

Таким образом, динамика решетчатой конструкции может быть описана посредством  $N = N_1 N_2$  функций состояния  $u_{kq}(t)$ , где индексы  $k=1,2,.. N_1$ ;  $q=1,2,.. N_2$ . При этом каждая из функций  $u_{kq}(t)$  изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Будем считать, что первый по счету индекс (в данном случае  $k$  – нумерует струну, расположенную «слева направо» или наоборот - рис.3,б), а второй индекс (в данном случае  $q$  – «снизу вверх» или наоборот, рис 3,б).

В соответствии со сказанным, если при  $t=t_0$  для каких-либо  $k$  и  $q$  происходит соударение, то [8]

$$u_{tkq}(t_0-0) = -u_{tkq}(t_0+0) < 0; u_{kq}(t_0) = \Delta; u_{kq} \leq \Delta \quad (18)$$

Третье входящее сюда соотношение показывает невозможность точечных тел оказаться «за ограничителем».

Пусть вынуждающие силы, действующие на каждое из массивных точечных тел [8], даются случайными некоррелированными широкополосными процессами  $\xi_{kq}(t)$  типа стандартных белых шумов с одинаковыми интенсивностями  $2S$ :

$\langle \xi_{kq} \xi_{rs} \rangle = 2S \delta_{kq} \delta_{rs} \delta(t-t')$ ;  $\delta_{kq}$ ,  $\delta_{rs}$  – символы Кронекера (индексы  $k, q = 1, 2, .. N_1$ ;  $r, s = 1, 2, .. N_2$ ) угловые скобки обозначают операцию статистического усреднения;  $\delta(t)$  –  $\delta$ -функция Дирака. Модель системы построим следующим образом.

Считая, что функции состояния координаты  $u_{kq}$  отсчитываются от точек, лежащих в плоскости равновесия конструкции, а также принимая прежнюю модель демпфирования, запишем систему линейных дифференциальных уравнений, описывающую движение решетчатой конструкции в промежутках между соударениями. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то для всех значений индексов имеем  $N$  уравнений:

$$m \ddot{u}_{tkq} + b \dot{u}_{tkq} + c_1 (2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)}) + c_2 (2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)}) = \xi_{kq}(t); \quad (19)$$

здесь соответственно обозначено:  $c_{1,2} = T_{1,2} / \Delta L_{1,2}$  – коэффициенты упругости  $b$  – коэффициент демпфирования. Граничные условия заземления можно записать как  $u_{k,q} = 0$ , при  $k=0; (N_1+1)$  и  $q=0; (N_2+1)$  ([8]). Функция Гамильтона такой системы  $H(u_{kq}; y_{kq}) \equiv H(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1, N_1}, \dots, u_{N_2, N_2}; y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1, N_1}, \dots, y_{N_2, N_2})$ , определяющая уравнения движения (19), может быть записана в виде:

$$H(u_{kq}; y_{kq}) = \sum \frac{1}{2} y_{kq}^2 + \frac{1}{2} [ \sum c_1 (u_{k1} - u_{k, N_2})^2 + \sum c_2 (u_{1q} - u_{N_1, q})^2 + \sum c_2 (u_{kq} - u_{(k, q-1)})^2 + \sum c_1 (u_{1q} - u_{N_1, q})^2 ] + \dots, \quad (20)$$

где суммирование ведется по индексам  $k$  и  $q$ , изменяющимся в указанных диапазонах и введено обозначение  $y_{kq} \equiv u_{kqt}$  – абсолютная скорость каждого точечного тела (взаимодействующей частицы). Без ограничения общности, предполагается, что  $m=1$ , так что гамильтоновы переменные здесь  $(y_{kq}, u_{kq})$ ; при этом суммирование в третьем и четвертом членах начинается от значения  $k, q=2$ ; многоточие обозначает отброшенные члены высших порядков.

6. Для решения поставленной задачи, то есть для описания искомого случайного процесса  $\{u_{kq}(t); y_{kq}(t)\}$  снова используем методы диффузионных марковских процессов [4-8]. Предполагая процесс стационарным, будем искать его  $2N$  – мерную стационарную совместную плотность вероятностей  $p(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1, N_1}, \dots, u_{N_2, N_2}; y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1, N_1}, \dots, y_{N_2, N_2}) \equiv p(u_{kq}, y_{kq})$ ; ( $N=N_1 N_2$ ). Уравнение ФПК для уравнений движения (19) сохраняет форму (4), однако фактически оно сильно усложняется из-за двойной индексации переменных:

$$\sum [\{H, p\}_{kq} - b \partial p(y_{kq}) / \partial y_{kq} - 1/2 S \partial^2 p / \partial y_{kq}^2] = 0, \quad (21)$$

причем  $\{H, p\}_{kq}$  – скобка Пуассона для частицы, расположенной в узле решетки, пронумерованном индексами  $k$  и  $q$  (см. выражение, данное после формулы (4)).

Ограничения на решения уравнений (21) аналогичны данным для более простых случаев выше.

Функция  $p(u_{kq}(t); y_{kq}(t))$ , зависящая от  $2N$  ( $N=N_1 N_2$ ) переменных, удовлетворяющая (21) и упомянутым ограничениям – снова описывает каноническое распределение Гиббса, имеющее здесь вид:

$$p(u_{kq}, y_{kq}) = C \exp\{-2b/S [H(u_{kq}, y_{kq})]\}, \quad u_{kq} \in X = \{u_{kq} | -\infty < u_{kq} \leq \Delta\}, \quad (22)$$

где множество  $X$  описывает ограничения, накладываемые на координаты системы,  $C$  – постоянная нормировки.

При посредстве (22) можно полностью описать искомым процесс. Как и ранее в рамках данной модели это описание будет точным для статистически независимых случайных процессов  $u_{kq}(t)$  и  $y_{kq}(t)$ . Проинтегрировав (22) по всем  $u_{kq} \in X$ , приходим к  $N$  – мерному распределению Максвелла по скоростям:

$$p(y_{kq}) = C_1 \exp[-(2b/S) \sum^{1/2} y_{kq}^2]. \quad (23)$$

Распределение (23) – нормальное; чтобы привести его к классическому виду достаточно, отказавшись от двойной индексации, перенумеровать координаты и перейти к «сквозной» нумерации от 1 до  $N$ . Распределение (23) многократно изучено (см., например выше). Характеристики случайных импульсов ударов определяются аналогично п.3

7. Рассмотрим теперь случайные конфигурации, возникающие при вибрации решетки. Выполнив в (5) интегрирование по скоростям, снова приходим к распределению типа Больцмана по координатам:

$$p(u_{kq}) = C_2 \exp[-(2b/S) U(u_{kq})], \quad u_{kq} \in X = \{u_{kq} | \Delta_{1kq} \leq u_{kq}(t) \leq \Delta_{2kq}\} \quad (24)$$

где  $C_2$  – нормировочная постоянная. Функция  $U$  – потенциальная энергия системы. В данном случае [см.(2)]

$$U(u_{kq}) = 1/2 [\sum c_1 (u_{k1} - u_{k, N_2})^2 + \sum c_2 (u_{1q} - u_{N_1, q})^2 + \sum c_2 (u_{kq} - u_{k, (q-1)})^2 + \sum c_1 (u_{1q} - u_{N_1, q})^2] \quad (25)$$

Имея соотношения (24) и (25), можно, как и ранее, полностью описать «конфигурационные» характеристики системы: типы случайных профилей, их статистические характеристики и др.

Одна из наиболее актуальных - задача об определении частот появления тех или иных конфигураций решетки при случайном выбросе узловых тел на ограничитель решается



аналогично предыдущему. Учитывая определенную 2D специфику задачи, приведем некоторые расчетные формулы. Легко видеть, что при функционировании рассматриваемой системы наиболее часто будет регистрироваться равновесная конфигурация. Определим среднюю «частоту» появления такой конфигурации  $\Omega$  как среднее число пересечений равновесного уровня  $u_{kq}=0$  ( $k=1,2,\dots,N_1; q=1,2,\dots,N_2$ ) при  $y_{kq}>0$ :

$$\Omega = \int_0^\infty \prod_{kq} y_{kq} p(0, 0, \dots; y_{11}, \dots, y_{kq}, \dots, y_{N_1 N_2}) dy_{kq}, \quad (26)$$

Здесь и ниже индексация и, соответственно суммирование и перемножения – двойные. Отсюда найдем искомое значение средней частоты

$$\Omega = C \int_0^\infty \prod_{kq} y_{kq} \exp[-(2b/S) \sum \sum^{1/2} y_{kq}^2] dy_{kq} = C(S/8b)^n \quad (27)$$

Рассмотрим все такие конфигурации, когда в некоторый момент времени хотя бы один из узлов взаимодействует с ограничителем. Обозначим такую конфигурацию  $u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})$ , где индекс  $\lambda \in \Lambda$  нумерует описанные конфигурации; число элементов этого множества не более чем  $2^{N+1}$ . Обозначим среднюю частоту появления рассматриваемой конфигурации  $\omega[u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})]$ . Подсчет проведем по формуле:

$$\omega[u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})] = C \int_0^\infty \prod_{kq} y_{kq} \exp\{-(8b/S)U[u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})]\} + \sum^{1/2} y_{kq}^2 \} dy_{kq},$$

где  $U[u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})]$  – соответствующее значение потенциальной энергии (25). Из последней формулы следует, что  $\omega[u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})] = \Omega \exp\{-(8b/S)U[u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})]\}$ .

Обозначим  $\eta(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq}; U) \equiv \omega[u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})] / \Omega$  относительную частоту появления конфигурации  $u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})$ . Из последнего соотношения получим:

$$\eta(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq}; U) = \exp\{-(8b/S)U[u(\lambda, \Delta_{1kq}, \Delta_{2kq})]\}. \quad (28)$$

Таким образом, как и в случае простых цепочек, относительно чаще смогут появляться конфигурации, обладающие меньшей потенциальной энергией. То есть, в частности, чем меньше изломов имеет конфигурация, тем относительно чаще она появляется. При этом наличие экспоненты в формуле (28) показывает, что рост потенциальной энергии конфигурации весьма быстро делает весьма маловероятной возможность регистрации каких-либо «экзотических» конфигураций с сильно изломанными профилями. Сказанное оказывается тем более верным при больших уровнях затухания.

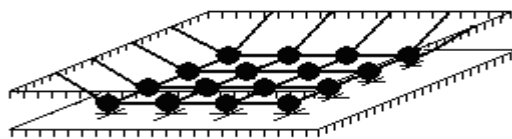


Рис.4,а

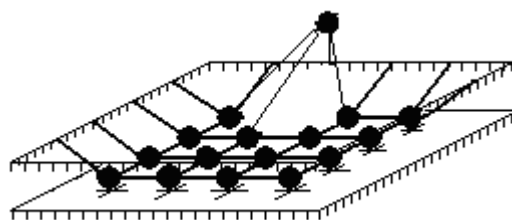


Рис.4,б

На рис 4, а и б показаны варианты относительно часто и относительно редко регистрируемых профилей в случае одностороннего ограничителя, представляющего собой прямую стенку. Сделанный вывод справедлив только при линейности безынерционных элементов решетки. Введение нелинейных элементов может исказить или даже существенно изменить описанную выше картину. Однако использованная методика анализа существенных изменений не претерпит.

8. Кратко опишем дальнейшее развитие этого круга задач. Во-первых, аналогично могут быть изучены 3D решетки, составленные из фрагментов, показанных на рис. 3,а . При этом задача будет «гибридом» задач, рассмотренных в п.п. 5 и 6. В данном обзоре из-за громоздкости формул приведение расчетных соотношений невозможно. Качественно, можно заметить, что как и ранее, относительно наиболее часто смогут регистрироваться «ударные» конфигурации с меньшими значениями потенциальной энергии. Более подробно такая задача будет рассмотрена в последующих работах.

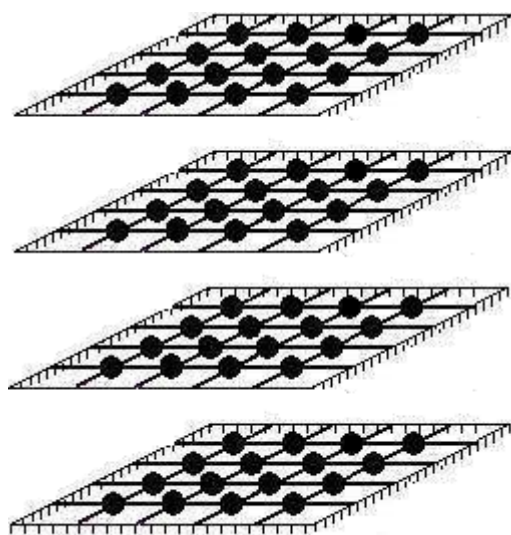


Рис.5,а

Во-вторых, возвращаясь к 2D – решетчатым конструкциям, рассмотрим системы, которые будем называть стопками решеток или просто стопками (рис.5,а ). Ясно, что стопки могут быть составлены совершенно по-разному даже при условии однотипности самих решеток. Элементы стопок (решетки) могут взаимодействовать друг с другом через линейные и нелинейные упругие, вязкие или вязко - упругие элементы, расположенные в различных местах стопок, но могут быть установлены с зазорами (рис.5,а ) и т.п. В последнем случае при условии, что каждая решетка возбуждается, так же как и в рассмотренном случае п. п. 6-8, снова одной из актуальных представляется задача определения вида относительно наиболее часто встречающихся конфигураций (ясно, что таким конфигурациям будет отвечать меньшая потенциальная энергия и меньшее число изломов). На рис.5, б обозначен пример относительно «частой» конфигураций для стопки, состоящей из двух решеток.

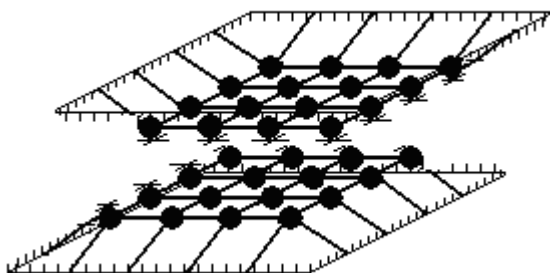


Рис.5,б

В-третьих, среди относительно наиболее часто встречающихся конфигураций непременно присутствуют и те, которые характеризуются синхронными ударами (выходом на ограничители) удаленных частиц систем. В детерминированном случае такие режимы движения называются хлопками. В длинноволновом приближении, когда осуществляется переход к распределенным ударным элементам [9-11], хлопки играют совершенно особую роль в динамике рассматриваемых систем: возникновение хлопков сопровождается динамическими эффектами, сходными с проявляющимися в так называемых ударных осцилляторах. Это различного рода затягивания (по частоте и амплитуде), неоднозначности зависимостей интегралов движения от частоты колебаний, срыв, явление жесткого запуска др. Более того именно хлопки оказываются режимами движения, свойства которых не зависят от метрических соотношений между параметрами систем [9-11] (например, от величин зазора и длина струны и т.д.). Характерен тот факт, что хлопки характеризуются минимальными значениями потенциальной энергии системы. Изучение проблем, названных в этом п. предполагается в дальнейшем.

В-четвертых, весьма интересными в приложениях могут оказаться задачи, в которых проведен отказ от предположения о независимости величин зазоров (натягов) от времени. Так могут быть рассмотрены задачи с изменяющимися во времени величинами  $\Delta=\Delta(t)$ . Определяющее распределение Гиббса принципиально не изменит своего вида. Изменения коснутся только вида нормировочных коэффициентов и ряда других характеристик. Считая, однако, что эволюция величин зазоров (натягов) – не быстрая:  $\Delta=\Delta(\epsilon t)$ , где  $\epsilon$  – малый параметр, можно в нулевом приближении считать, что стационарное приближение достаточно точно. Задачи указанного типа будут рассмотрены в дальнейших работах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-08-00500).

## Литература

1. Крупенин В.Л. К расчету виброударных систем с регулярной структурой при случайном возбуждении// *Машиноведение*.-1984.-№6.-С. 22-29.
2. Крупенин В.Л. Несимметричные колебания в системах, содержащих двойные ограничители// *ДАН*.-Т.341.-№1.-1995.
3. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. - М.: Наука, 1980.-336 с.
4. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. –336 с.
5. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. - М.: Наука, 1980.- 368 с.
6. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.

7. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
8. Крупенин В.Л. Случайные соударения решетчатой конструкции с периодической структурой и плоским ограничителем хода // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. -№4. -С. 105-109.
9. Cabannes H. Cordes Vibrantes avec Obstacles// -Acustica.-1984.-V.55-P.14-20.
10. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1998. - № 5 - С. 13-30.
11. Крупенин В.Л. К исследованию высших нелинейных форм колебаний виброударных систем с распределенными ударными элементами// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. -№4. С. 105-109.

*Поступила: 24.07.10.*