

УДК 534.1

## ОБ ЭФФЕКТЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВЫСШИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМ СТОЯЧИХ ВОЛН В ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ УДАРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ УДАРНЫХ ПАР

© В.Л. Крупенин

*Аннотация.* Приводятся результаты изучения виброударной системы с распределенным ударным элементом. Это - струна, плоское движение которой ограничивают абсолютно жесткое двусторонняя неподвижная преграда, а также дискретные аналоги такой системы. Изучены динамические эффекты, сопровождающие появление в такой системе стоячих периодических волн типа «высших форм хлопков». В консервативных системах такие режимы занимают особое место, подобное стоячим волнам типа «хлопков» в простейшей виброударной системе с распределенным ударным элементом. Кратко обсуждаются другие системы рассматриваемого класса или близкие к ним. Даны примеры полученных экспериментальных данных.

*Ключевые слова:* нелинейные формы колебаний; стоячие волны с трапецевидными профилями; хлопки; соударения, нелинейное уравнение Клейна – Гордона, эксперименты с распределенными системами.

1. В работах [1-7, 11, 12 и др.] теоретически и экспериментально изучались виброударные системы с распределенными ударными элементами, а также их дискретных аналогов. В частности, установлена возможность существования периодических режимов движения типа "хлопков". При их реализации относительно удаленные части ударных элементов - сосредоточенных или распределенных – могут синхронно соударяться с соответствующими частями различного рода ограничителей.

Рассмотрим малые поперечные колебания струны, расположенной между двумя абсолютно жесткими ограничителями хода, установленными параллельно оси ее статического равновесия (рис. 1).



Рис 1.

Трапецевидный профиль стоячей волны реализуется при начальных условиях специального вида (см. ниже). На рис. 2 показан дискретный аналог этой системы.

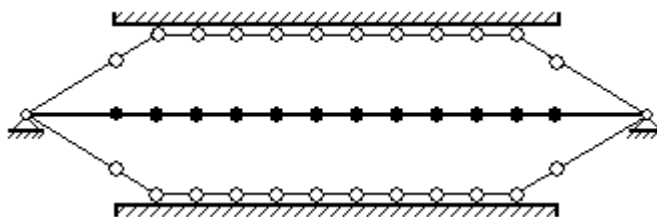


Рис. 2

Распределенная система, показанная на рис.1 может трактоваться как длинноволновой аналог этой дискретной системы. Именно распределенная система сейчас и будет подлежать изучению. Система предполагается симметричной: указанная ось равно отстоит от препятствий. Обозначим это расстояние  $\Delta$ , то есть общий зазор в системе равен  $2\Delta$ . Без ограничения общности погонная масса струны и ее плотность могут полагаться единичными. На рис 1 и 2 струна и ее дискретный налог показаны в три момента времени: во время прохождения положения равновесия и во время взаимодействия с ограничителями.

Рассматривается консервативный случай, когда нижнее препятствия неподвижны и возбуждение от внешних источников отсутствуют (см. далее).

Обозначив  $u(x,t)$  искомый прогиб, запишем часть сказанного в виде

$$|u(x,t)| \leq \Delta < 1; \quad x \in [-1/2, 1/2], \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Между касаниями струны с ограничителями, когда первое неравенство (1) – строгое, уравнение движение записывается в виде линейного волнового уравнения:  $\square u \equiv u_{tt} - u_{xx} = 0$ .

Положим, далее

$$u(\pm 1/2, t) = 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, t) = v_0(x). \quad (2)$$

При этом предполагается, что гладкость функции  $v_0(x)$  (начальной скорости) такова, что, по крайней мере, в обобщенном смысле [8] существование и единственность решения задачи Коши для решений линейного волнового уравнения  $\square u = 0$  и дополнительных условий (2).

Если в первом неравенстве (1) реализуется знак равенства, то происходит взаимодействие струны и ограничителя, который должен действовать на струну «от себя». Поэтому, если  $u \geq 0$  или  $u \leq 0$ , то соответственно

$$\square u \leq 0; \quad \square u \geq 0 \quad (3)$$

Оперируя с обобщенными решениями, потребуем, чтобы носитель сингулярной обобщенной функции [7, 8] выражающей силу ударного взаимодействия

$$\text{supp } \square u \subset \{(x,t); |u(x,t)| = \Delta\}. \quad (4)$$

Считая, что при взаимодействии энергия не теряется, постулируем здесь выполнение, имеющего место в соответствующей линейной системе, соотношения, выражающего закон сохранения энергии, то есть именно постулируем, что и в данном нелинейном случае в смысле обобщенных функций [4,5]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u_x|^2 + |u_t|^2) = \frac{\partial}{\partial x} (2u_t u_x) \tag{5}$$

Отсюда легко выводится:

$$u_t(x,t=0) = -u_t(x,t+0), (x,t) \in \text{supp } \square u, |u(x,t)| = \Delta. \tag{6}$$

То есть постулирование (5) приводит к континуальному аналогу гипотезы Ньютона для абсолютно упругого удара, который в данном случае и рассматривается. Вопрос о введении каких-либо гипотез рассеяния энергии при взаимодействиях такого рода представляет собой самостоятельную проблему. Один аспект этой проблемы кратко рассматривается ниже.

Условия ударного взаимодействия (3) - (5) определяют обобщенную функцию, описывающую ударное взаимодействие и обозначаемую ниже как  $\Phi(u)$ . При помощи этой функции уравнение можно записать как нелинейное уравнение Клейна – Гордона [5, 6]

$$\square u + \Phi(u) = 0. \tag{7}$$

2. Рассмотрим весьма принципиальный пример. Имея в виду изучать режимы движения (стоячие волны) в определенном смысле соответствующие собственным формам линейной струны, выберем начальные условия в виде

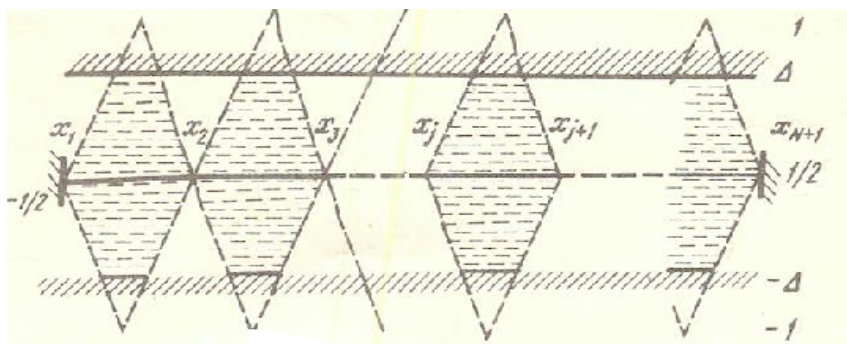
$$v_0(x) = 2 \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} N [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})]. \tag{8}$$

Здесь  $\eta(x)$  - единичная функция Хевисайда; отрезок  $[-1/2, 1/2]$  разбит на  $N$  равных частей; принято  $x_j = x_1 + (j-1)N^{-1}$ ,  $j=1, \dots, N$ ;  $x_1 = -1/2$ .

Выбранные начальные условия действительно в определенном смысле отвечает тем, что дают синусоидальные формы колебаний линейной струны и порождают семейство стоячих волн, имеющих «пилообразные» профили (рис.1,б – штриховые линии). Периоды колебаний, естественно, совпадают с периодами колебаний линейных форм  $T_{0N} = 2N^{-1}$ .

При установке вблизи струны двусторонних ограничителей, условиям (2) и (8) отвечает семейство  $T_N$  – периодических ( $T$  – периодических) стоячих трапециевидных волн  $u(x,t) = A_N(x,t)$   $T_N = 2\Delta N^{-1}$  [6] (см. рис.3,а).

. С соответствующих сторон к ограничителями со скоростями  $v = \pm 2N$  подходят прямолинейные отрезки струны  $[l_j^-, l_j^+] \subset [x_j, x_{j+1}]$ , причем, используя элементарные планиметрические построения, найдем:  $l_j^- = -1/2 [2(j-1) - N + \Delta] N^{-1}$ ;  $l_j^+ = -1/2 (2j - N - \Delta) N^{-1}$



а)

Затем эти участки в соответствии с (6) мгновенно отскакивают от ограничителей и совершают движения в обратном направлении. То есть через время  $1/2T_N$  те же участки соударяются с противоположенными ограничителями и так далее.

Аналитические выражения для членов семейства высших форм хлопков  $\{A_N\}$  можно получить при помощи методов частотно-временного анализа [5,7]. Так как найденные стоячие волны, очевидно, удовлетворяю условию  $u(x,t) = -u(x, t + 1/2T_N)$ , то периодические волны семейства  $\{A_N\}$ , удовлетворяющие уравнению (7), должны удовлетворять интегральному уравнению вида [5,7]:

$$A_N(x,t) = - \int_0^{1/2T} \int_{1/2}^{-1/2} \chi(x,y;t-s) \Phi[A_N(y,s)] dy ds. \quad (9)$$

Здесь  $\chi(x,y;t)$  – симметричная периодическая функция Грина (ПФГ) линейной задачи, представимая в виде ряда

$$\chi(x,y;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(t) \sin[(\pi n(x+1/2))] \sin[(\pi n(y+1/2))]. \quad (10)$$

Здесь обозначено  $\chi_n(t)$  - симметричные ПФГ линейных осцилляторов с собственными частотами  $\Omega_n = \pi n l^{-1}$ . При  $t \in [0, 1/2T]$  указанные ПФГ даются конечными формулами [5, 7]:

$$2\chi_n(t) = \sin \Omega_n(t - 1/4T) [\Omega_n \cos 1/4\Omega_n T]^{-1}, \quad (11)$$

причем это представление имеет место только в пределах указанного полуинтервала. Для получения полного представления необходимо продолжить функцию (11) для всех  $t$ , исходя из условий  $\chi_n(t) = -\chi_n(t + 1/2T)$  [7].

В силу того, что семейство функций  $\{A_N\}$  заведомо отвечает условиям удара (3), (4), (5) [(6)], в частности

$$A_t^2 + A_x^2 = 4N^2, \quad A_t A_x = 0, \quad (12)$$

при помощи (9) можно получить искомые аналитические представления этого семейства.

Учитывая, что функция  $\Phi[A_N(x,t)]$  по сути описывает мгновенный и синхронный отскок от ограничителей  $N$  отрезков с длинами  $|l_j^+ - l_j^-|$ , в результате которого скорость движения отрезка меняет знак со значения  $+2N$  на  $-2N$  или наоборот, используем (9) и запишем:

$$A_N(x,t) = \sum_{j=1}^N (-1)^j 2N \int_{l_j^-}^{l_j^+} \chi(x,y;t-t_0) dy. \quad (13)$$

Причем здесь при рассмотрении установившегося режима удары совмещены с моментом времени  $t=t_0 + 1/2kT$  и при реализации форм колебаний  $\{A_N\}$ , полагается, что в момент времени  $t=t_0 + 1/2\Delta N^{-1}$  взаимодействие отрезка, пронумерованного индексом  $j=1$ ,

происходит с верхним ограничителем (рис.3,а). Затем через половину периода - с нижним и так далее.

Принимая во внимание (10), (11), (13), а также пользуясь вычислениями, проделанными ранее в [3, 5], получим после ряда преобразований:

$$A_N(x,t) = \sum_{k=1}^N k^{-1} \Lambda_{kN} \sin\left[\frac{1}{2}N^{-1}k\pi(1-\Delta)\right] \sin\left[\frac{1}{2}N^{-1}k\pi(x+\frac{1}{2})\right] \chi_k(t-t_0). \quad (14)$$

Отметим, что для получения конечного выражения  $\chi_k(t-t_0)$  необходимо учесть, что представление (11) верно только при  $(t-t_0) \in [0, \frac{1}{2}T]$ . Вне данного полуинтервала формула (11) нуждается в корректировке (см.[7]).

**3.** Специфические начальные условия (8), вообще говоря, представляются весьма трудно реализуемыми на практике. Рассмотрим более общие начальные условия. Полагая ограничиться начальными условиями в определенном смысле подобным тем, что порождают стандартные формы собственных колебаний струны в линейном случае (например, когда в условиях (2)  $v_0(x) = N\pi \sin[N\pi(x+\frac{1}{2})]$ ;  $N = 1, 2, \dots$ ), снова разобьем отрезок  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  на  $N$  отрезков  $[x_j, x_{j+1}]$ .

Положим теперь:

$$v_0(x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} v_j(x) [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})]; \quad v_j(x) \geq 0; \quad \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_j(x) dx = 2. \quad (15)$$

Воспользуемся методиками, развитыми, например, в [1, 4, 5]. Идея состоит в преобразовании исходной задачи к виду, при реализации которого, сформулированные в п.1 условия удара, могли бы удовлетвориться автоматически. При этом преобразованию подлежат как искомая функция, так и независимые переменные. Для того чтобы последующие построения были бы математически корректными, сделаем два дополнительных предположения.

Во-первых, предположим, что для всех  $j$  функции  $v_j(x)$  непрерывно дифференцируемы на отрезках  $[x_j, x_{j+1}]$ .

Во-вторых, предположим, что функция  $V(x) = \int v_0(x) dx$  - дважды непрерывно дифференцируема на отрезке  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , причем  $V'(-\frac{1}{2}) = V'(\frac{1}{2}) = 0$ . Из этих двух предположений, а также из (15) выводится, что

$$\int_{-1/2}^{1/2} |v_0(x)| dx = 2N; \quad V'(x) \geq 0 \quad (16)$$

Будем искать решение задачи (7), (2) [(15)] в следующем виде:

$$u(x,t) = A_N [y_1(x,t), y_2(x,t)], \quad y_{1,2}(x,t) = g(x+t) \pm g(x-t). \quad (17)$$

То есть указанное преобразование как раз и должно осуществляться посредством описанного в п.2 семейства  $\{A_N\}$ . Функцию  $g$  определим в три шага, «сконструировав» ее при помощи начальных условий (15). При  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  положим:

$$g(x) = (4N^{-1}) \int |v_0(x)| dx + C_0 \equiv (4N)^{-1} V(x) + C_0, \quad (18)$$

где константа  $C_0$  определяется далее. Из выше сказанного следует, что функция  $g(x)$  – дважды непрерывно дифференцируемая. Проведем доопределение этой функции вне отрезка  $[-1/2, 1/2]$ . Вначале для  $x \in [1/2, 3/2]$  положим

$$g(x) = 1/2 - g(1-x). \quad (19)$$

Тогда простые вычисления дают:  $g(1/2) = 1/4$ ;  $C_0 = (4N)^{-1} V(1/2)$ ;  $g(-1/2) = -1/4$ ;  $g''(1/2) = 0$ . И таким образом функция  $g(x)$  оказывается дважды непрерывно дифференцируемой и на отрезке  $[-1/2, 3/2]$ .

Наконец положим для всех  $x \in ]-\infty, \infty[$  :

$$g(x+2) = 1 + g(x). \quad (20)$$

Тогда из сделанных выше предположений и формулы (16) следует, что функция  $g(x)$  дважды непрерывно дифференцируема на всей числовой оси. Кроме того, в соответствии с проделанным построением функции  $g(x)$  [см. (18) – (20)], а, также учитывая (16), можно заключить, что функция  $g$  – не убывает на всей числовой оси, так как  $g'(x) = (4N)^{-1} V'(x) \geq 0$ .

Можно легко установить, что соотношение (19) остается верным для всех  $x \in ]-\infty, \infty[$ , а также, что  $g(x) = 1/2 - g(1-x)$ .

Возвращаясь к представлениям (17), и принимая во внимание подробно описанные свойства функции  $g$  устанавливаем также и свойства функций  $y_{1,2}(x,t)$ . Имеем, после элементарных преобразований:

$$y_1(x,t+2) = y_1(x,t); \quad y_2(x,t+2) = y_2(x,t) + 2; \quad (21)$$

$$-1/2 \leq y_1(x,t) \leq 1/2, \quad y_1(\pm 1/2, t) = 1/2. \quad (22)$$

4. Дальнейшей целью является установления того факта, что представление (17)  $u(x,t) = A_N[y_1(x,t), y_2(x,t)]$  удовлетворяет условия (1) – (5) [(6)] и, следовательно, определяет решение задачи (7), (2), (15).

Рассмотрим, во-первых, начальные и граничные условия (2), (15). Для второго (нетривиального) начального условия с учетом (17), (8), (15), (16) и (18) получаем после дифференцирования:

$$u_t(x,0) = 4 g'(x) \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} N [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})].$$

Используя связь функции  $g(x)$  с функциями  $v_j(x)$ , определяющими начальные условия будем иметь:

$$u_t(x,0) = \left| \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} v_j(x) [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})] \right| \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} [\eta(x-x_i) - \eta(x-x_{i+1})].$$

Исходя из определения функции Хевисайда, получаем требуемое. Аналогично устанавливается выполнимость первого (тривиального) начального условия (2), а также и граничных условий (здесь оказывается необходимым воспользоваться соотношениями (22)).

Перейдем к проверке выполнимости условий удара. Ввиду свойств форм  $\{A_N\}$  (см. рис. 3,а) легко увидеть, что первое неравенство (1) выполняется автоматически.

В соответствии с определением функций  $y_{1,2}(x,t)$ , они, очевидно, удовлетворяют линейному волновому уравнению. Поэтому, подставляя сюда первое равенство (17),



получим  $\square u = 2 g'(x+t) g'(x-t) \square A_N$ , где дифференцирование проводилось в смысле обобщенных функций. Отсюда, с учетом неубывания функции  $g(x)$  и выполнения условия (3) для семейства форм  $\{A_N\}$ , получаем, что при  $u \geq 0$  или  $u \leq 0$  имеет место  $\square u \leq 0$ ;  $\square u \geq 0$  соответственно, то есть соотношение (3) действительно имеет место и при использовании преобразования (17); подобное утверждение относится и к (4).

Для проверки выполнимости постулируемого условия (5), примем во внимание установленную выше гладкость функции  $g(x)$ , а также соотношения (12), после вычислений получим требуемое выполнение (5), так как обе части этого соотношения оказываются равными одной и той же величине  $16N^2 [g'(x+t) g''(x+t) - g'(x-t) g''(x-t)]$ .

Таким образом (17) определяет искомое решение задачи с начальными условиями, определяемыми с помощью представления (15). Из соотношений (14) следует представление для трансформируемых форм колебаний струны при ее взаимодействии с двусторонним ограничителем хода:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^N k^{-1} \Lambda_{kN} \sin[1/2 N^1 k \pi (1-\Delta)] \sin[1/2 N^1 k \pi (y_1(x,t) + 1/2)] \chi_k [y_2(x,t) - t_0]. \quad (23)$$

Из (21) и (23) следует, что периодичность трансформированных форм стоячих волн возможна лишь при соизмеримости периодов колебаний линейной струны  $T_0 = 2$  и периодов форм  $\{A_N\}$   $T_N = 2\Delta N^1$ , то есть при рациональных значениях зазора  $2\Delta$ . В общем случае формула (23) описывает почти -периодический процесс [ср. 1, 4, 5, 6].

Таким образом, оказывается, что данного типа начальных условий, семейство  $\{A_N\}$  поставляет пример единственного периодического виброударного процесса, сохраняющего периодичность вне зависимости от значения зазора. Показывается, что этот факт остается в силе и при более общих, нежели (15), начальных условиях.

**5.** Ниже будут приведены результаты экспериментов, показывающих реализацию трапециевидных волн на практике. Предварим описание этих результатов несколькими принципиальными замечаниями.

**а.** В общем, неконсервативном случае, в уравнении движения должны быть добавлены члены, отвечающие возбуждению колебаний и диссипации энергии в системе. Полагая эти члены малыми, вместо (7) получим весьма общее уравнение движения типа

$$\square u + \Phi(u) = \varepsilon H(t, x, u, \dots) \quad (24)$$

Регулярных аналитических методик интегрирования уравнения типа (24), по видимому, не разработано. Для периодических стоячих волн имеется, однако, возможность, воспользовавшись принципом энергетического баланса [6, 7], и, считая например, решение близким к решению консервативной задачи, найти условие существования такого режима, поддерживаемого за счет возбуждающих сил, компенсируемых действующие силы диссипации. Подобные режимы именуется нелинейными резонансными режимами [6, 7].

Обозначив решение консервативной задачи  $u(x,t) = A_N [J(\omega); x, t]$ , где  $J(\omega)$  – параметр ( $\omega = 2\pi/T$  – частота колебаний), однозначно связанный с полной энергией системы (в данном случае это может быть либо плотность ударного импульса, либо полный ударный импульс [3, 6, 10, 11]), можно записать

$$\int_0^E H(t, x, u, \dots) u_i(x, t) dt = 0$$

Условия разрешимости этого уравнения и определяют условия существования нелинейных резонансных режимов.

**б.** Можно показать, что представителям семейства трапециевидных форм (хлопков)  $\{A_N [J(\omega); x, t]\}$ , где введен импульс удара, который ранее для удобства вычислений считался

постоянной величиной, присущи некоторые общие свойства, характерные для резонансных состояний так называемого ударного осциллятора [6, 7] – линейного осциллятора, массивное тело которого соударяется с неподвижными ограничителями хода. Это затягивания по частоте и импульсу удара, срыв колебаний, возможность жесткого запуска и другие [6].

Отметим, что при реализации хлопков возможно введение аналогов гипотезы Ньютона о коэффициенте восстановления [6].

**в.** Физическое обоснование существования волн с изломанными профилями в струнных системах, впервые, по видимому, дал А.А. Витт [9]. Он объяснял это кратностью спектра собственных частот линейной струны, так как широкополосные воздействия (здесь - удары) в этом случае способны одновременно возбудить большое число мод колебаний.

**б.** Установленная определенная уникальность форм  $\{A_N(x,t)\}$  позволяет ожидать, что при реализации вынужденных резонансных колебаний, стоячие волны будут иметь трапецевидные профили.

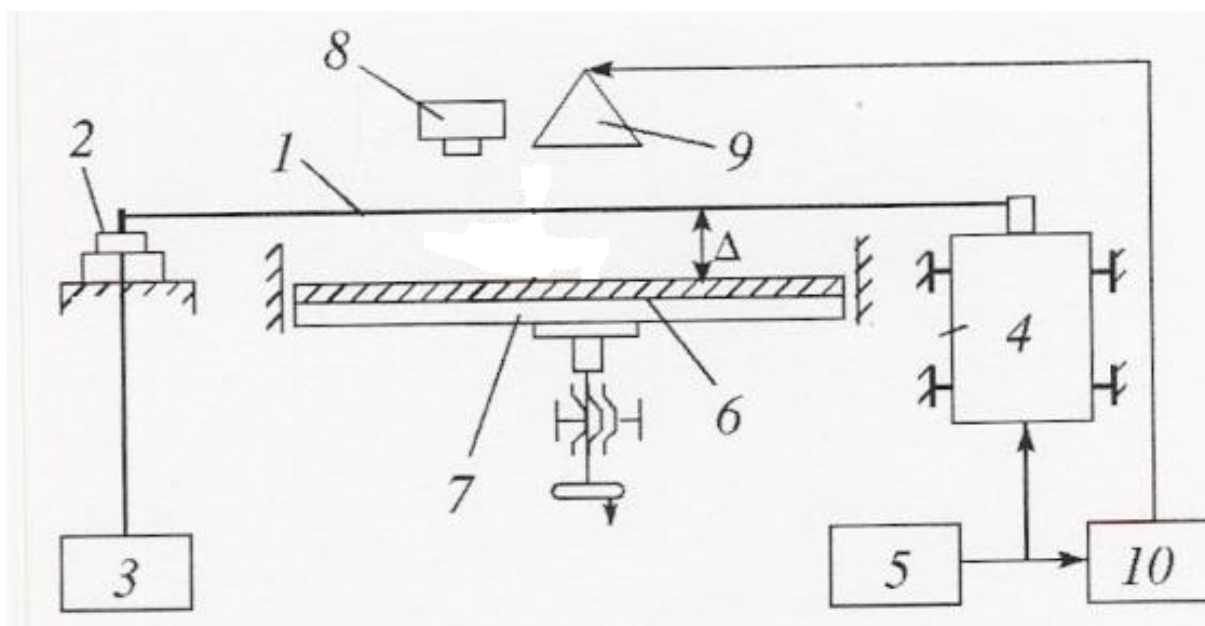


Рис. 4

На рис.4 дано краткое описание стенда «Аллигатор –С», на котором проводились эксперименты. Для того, чтобы не перегружать рисунок, здесь не показан верхний ограничитель, установленный симметрично по отношению к нижнему. В качестве распределенного упругого элемента в экспериментальной установке использован резиновый жгут (струна) 1. Один конец жгута жестко связан, с установленным на станине датчиком силы 2, измеряющим составляющую натяжения жгута в направлении, перпендикулярном его оси. Сигнал с датчика, пропорциональный, углу поворота жгута в заделке, регистрировался электронно-лучевым осциллографом 3. Второй конец жгута связан с якорем электродинамического возбудителя 4 поперечных колебаний жгута. Питание возбудителя осуществляется от генератора 5 электрических колебаний. Конструкция креплений жгута допускает регулировку натяжения с целью изменения его собственных частот. Протяженные ограничители 6 выполнены из гитиных пластин, установленных перпендикулярно плоскости колебаний жгута на каретке 4, позволяющей изменять зазор между жгутом и ограничителями.

Профили жгута и их эволюция в процессе колебаний фотографировались фотоаппаратом 8 освещении, визуализирующих процесс вспышек стробоскопической лампы 9, получающей питание от анализатора движения 10. Приводимые результаты установлены с зазором



отвечают случаям, когда 1-я собственная частота струны длиной 52 см составляет (в отсутствие соударений)  $f = 25$  Гц, а ограничители  $\Delta = 20$  мм.

В экспериментах обнаружены частотные зоны возбуждения нелинейных волн, профили которых составлены из прямолинейных отрезков, и отвечающие нескольким первым трапецевидным формам колебаний.

На рис.5 показаны соответственно первая форма хлопков, зарегистрированная соответственно при  $f_1 = 27,5$  Гц. Амплитуда штока вибрации в обоих случаях была равна 1 мм.



Рис.5

На рис.3,б показана экспериментально полученная зависимость угла поворота жгута в заделке от времени. Видимые скачки свидетельствуют о быстром изменении знака этого угла после прохождения жгутом положения равновесия. Такая ситуация как раз и характерна для трапецевидных профилей.

На рис. 6 показаны три первых формы стоячих волн для протяженной системы, образованной струной с насаженными на нее восьмью массивными точечными телами ([6]). Система подобна, рассмотренной в [12], вероятно, проще, так как снабжена прямыми ограничителями.

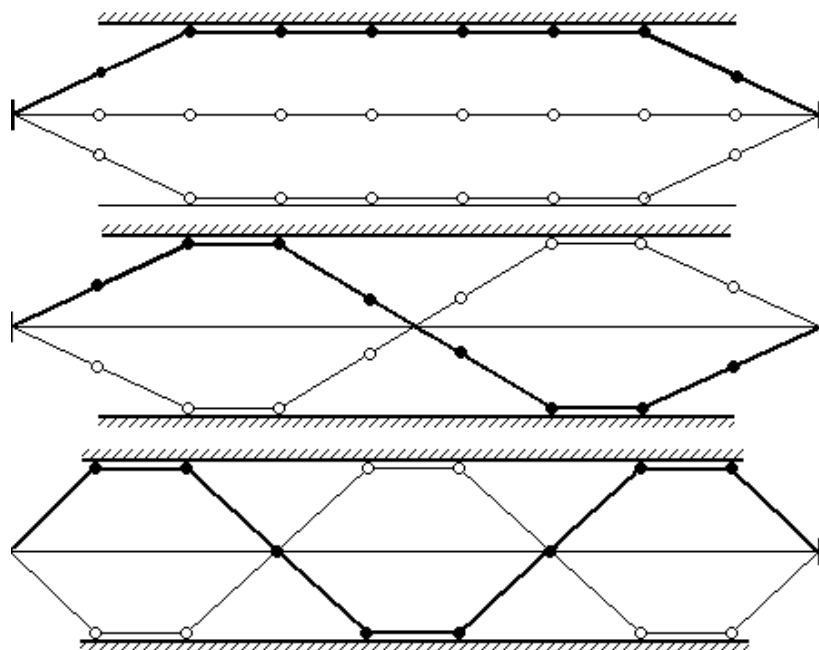


Рис.6

Плоская поляризация волн наблюдалась большей частью при начале установившегося виброударного процесса. В ряде случаев использовались специальные приемы, приводящие к поляризации (ср. [12])

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-08-00500).

### Литература

1. Cabbanes H., Haraus A. Mouvements presque – periodiques d’une corde vibrante en Presence d’un obstacle fixe, rectiligne ou ponctuel // I.J. Non-linear Mechanics. 1981. V.55. №5/6. P.449-457.
2. Веденова Е.Г. Маневич Л.И. Периодические и локализованные волны в виброударных системах с ргулярными структурами// Машиноведение. –1984. -№ 4. -Р.р.21-30.
3. Крупенин В.Л. К теории виброударных систем с распределенными ударными элементами // Изв. АН СССР.МТТ. -1986.-№1.-С.25-32.
4. Cabannes H. Cordes Vibrantes avec Obstacles// -Acustica. -1984. -V.55. -P.14-20.
5. Крупенин В.Л. Трансформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами.// ДАН СССР.1990.Т.313.№6.С.1394-1394.
6. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998.№5 С.13-30.
7. V.I. Babitsky, V.L. Krupenin Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
8. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. –М.:Наука. – 1976.- 280с.
9. Витт А.А. К теории скрипичной струны// ЖТФ.-1936. –Т.6. -Вып.9. С.1449-1479.
10. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей// Доклады Российской Академии наук. 2003. № 388 (3).
11. Крупенин В.Л. Виброударные процессы в системах с распределенными ударными элементами, оснащенных тавровыми ограничителями хода// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 1. С.44 - 53
12. В.К. Асташев, В.Л. Крупенин. Эксперименты с протяженными виброударными системами (резонансные движения)// Интернет- журнал. Вестник научно-технического развития, №7. 2010.С.3-10. URL: <http://www.vntr.ru/nomera/2010-735/> (дата обращения 21.07.10)

*Поступила: 29.06.10.*