УДК 519.63

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ СЕТОК ДЛЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ РАСЧЕТОВ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

© А.А. Андрекайте

Московский физико-технический институт, Россия, Долгопрудный

Аннотация. *Статья посвящена разработке теоретически обоснованного, оптимального по некоторому критерию, численного метода решения задач математической физики, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных.*

Ключевые слова: *обыкновенные дифференциальные уравнения, и уравнения в частных производных, конечно-элементное приближение решения.*

Проблема: численное решение задач математической физики, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ODE) и уравнениями в частных производных (PDE). В связи с этим возникает задача разработки теоретически обоснованного, оптимального по некоторому критерию, численного метода решения указанного класса задач (или нескольких методов, каждый из которых оптимален для определенного класса задач), т.е. задача построения рациональной (оптимальной) дискретизации, или конечно-элементного приближения решения.

Основные подходы: метод конечных разностей, метод конечных объемов, метод конечных элементов (МКЭ) [1]. МКЭ нашел широкое распространение во многих программных продуктах, таких как FEMLAB, CADFEM, FLUENT, ANSYS, FloWorks и т.д. Рассмотрим подробнее МКЭ.

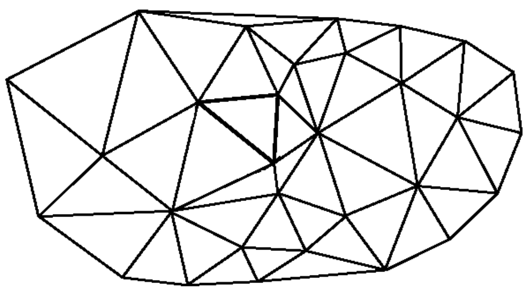

Рис. 1

Основные положения МКЭ

- Сплошная среда разделяется воображаемыми линиями или поверхностями на некоторое количество конечных элементов (рис.1)
- Предполагается, что элементы связаны между собой в узловых точках
- Выбрана система функций, однозначно определяющая перемещения внутри каждого конечного элемента через перемещения в узловых точках

Выбор формы элемента и функции перемещений определяет точность приближенного решения и зависит от конкретной задачи.

МКЭ сводит задачу к минимизации полной потенциальной энергии системы, выраженной через поле перемещений. При подходящем выборе поля перемещений решение должно сходиться к точному.

Несмотря на то, что приближенная минимизация функционала – самый распространенный способ перехода к методу конечных элементов, это не означает, что такой подход является единственно возможным.

Существуют и другие возможности, позволяющие получить основные соотношения МКЭ непосредственно из дифференциальных уравнений задачи. Преимущества таких методов состоят в том, что

а) отпадает необходимость искать функциональный эквивалент известным дифференциальным уравнениям;

б) эти методы могут быть распространены на задачи, для которых функционал либо не существует, либо пока не получен.

Этапы решения задач. Численное решение рассматриваемых задач включает следующие этапы [2]:

1. Задание геометрической модели
2. Задание начальных и граничных условий
3. Задание расчетной сетки (mesher)
4. Численное решение задачи (solver)
5. Визуализация решения
6. Анализ решения (оценка точности)

В случае адаптивной расчетной модели, исходя из результатов анализа решения, процесс повторяется до тех пор, пока полученные результаты не будут удовлетворять некоторым, определенным заранее, требованиям.

В настоящей работе рассматривается вопрос построения расчетных сеток. Существует много возможностей для их классификации. По форме ячеек: треугольные, четырехугольные, гибридные (2D). По способу нумерации узлов: регулярные, нерегулярные. В регулярных сетках используется двоичная (2D) и троичная (3D) системы нумерации узлов. Для нерегулярных сеток задаются глобальная и локальная нумерации узлов и определяется соответствие между глобальной и локальной нумерациями. По расположению узлов: адаптивные и равномерные. В адаптивных сетках узлы сетки сгущаются в областях высоких градиентов управляющей функции или вблизи других особых кривых (поверхностей). Использование некоторых сеток диктуется рассматриваемой задачей. Например, в задачах со сложной геометрией часто используют нерегулярные сетки с треугольными ячейками (или гибридные) как более адекватные. В задачах аэрогидродинамики предпочтение отдается регулярным сеткам с четырехугольными ячейками, потому что они лучше приближают линии тока. Для большинства задач используются адаптивные сетки. В качестве главного критерия адаптации служит равномерное распределение погрешности.

Основные способы адаптации: количество узлов сетки изменяется в процессе адаптации; количество узлов не меняется.

1. Количество узлов изменяется. Укажем два основных подхода: анизотропная адаптация [3] и octree [4]. При анизотропной адаптации происходит дробление и слияние ребер и граней согласно выбранному направлению адаптации. Подход octree чаще всего используется в четырехугольных прямоугольных сетках: происходит дробление ячейки на четыре или слияние, в зависимости от погрешности в ячейке.

2. <u>Количество узлов не меняется</u>. Адаптация происходит за счет перехода узлов из областей с низком градиентом, в области с высоким градиентом управляющей функции.

В 1975 году С.К. Годуновым [5] было предложено использовать гармоническое отображение для построения расчетных сеток. Эта идея была развита во многих работах, в частности, в работах С.А. Иваненко [6]. В настоящей работе подход С.А. Иваненко развивается для случая построения и анализа двумерных (2D) равномерных и адаптивных расчетных сеток.

<u>Равномерные расчетные сетки</u>. Используется отображение параметрического квадрата на расчетную область (рис.2). При этом сетка не должна вырождаться; используемое для построения сетки отображение должно обладать свойством эллиптичности, т.е. взаимовлиянием узлов. В 1966 A.M. Winslow был предложен метод построения равномерных расчетных сеток, гарантирующий невырожденность.

<u>Метод Winslow.</u> Два семейства линий сетки отыскиваются как линии уровня

$$\xi(x,y), \eta(x,y),$$

удовлетворяющие уравнениям Лапласа

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0,$$

с граничным условием Дирихле (обеспечивающим взаимно-однозначное соответствие точек на границах параметрического квадрата и расчетной области). Таким образом, координаты узлов ищутся путем дискретизации дифференциальных уравнений. Такой подход можно считать разностным.

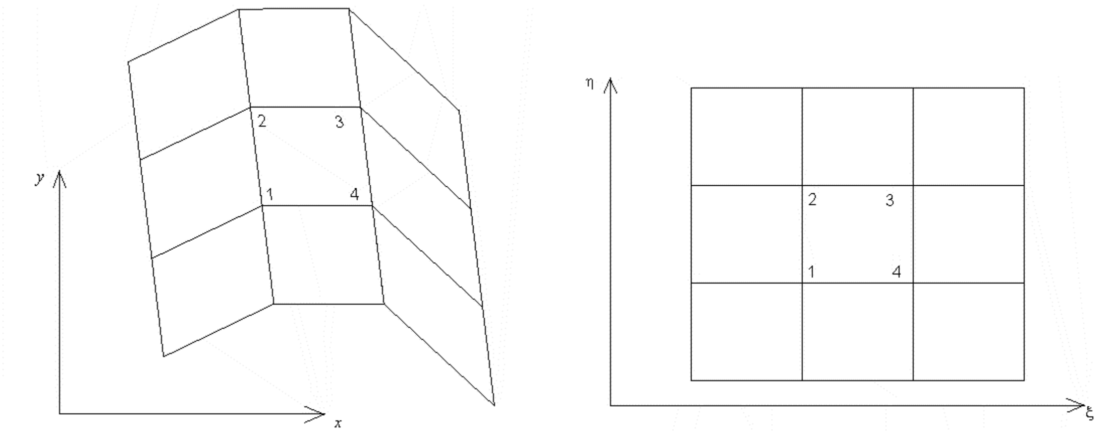

Рис. 1. Отображение параметрического квадрата на расчетную область

<u>Вариационный подход.</u> Рассматривается функционал Дирихле

$$I = \int \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2}{J} d\xi d\eta,$$

для которого уравнения Эйлера являются вышеуказанными уравнениями Лапласа. Координаты узлов определяются из условия минимизации дискретного аналога функционала Дирихле.

Сравнение двух подходов показывает, что при разностном подходе сетка может вырождаться (рис.3), в то время как вариационный подход дает вполне пригодную для расчетов сетку (рис.4).

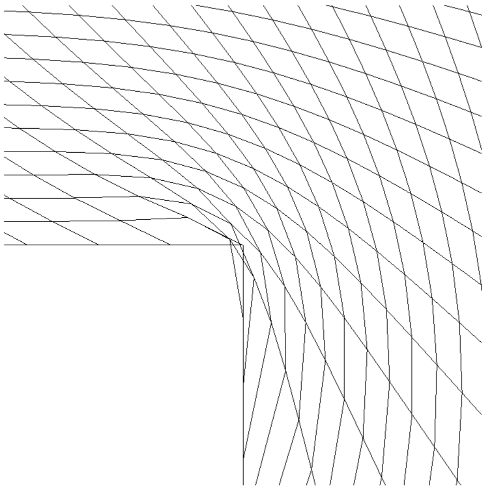

Рис. 2. Разностный подход

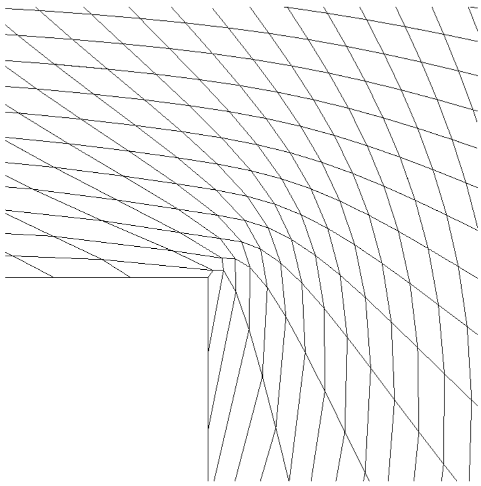

Рис. 3. Вариационный подход

Адаптивно-гармонические сетки. Постановка задачи: на плоскости (x, y) задана односвязная область Ω с гладкой границей. Рассмотрим поверхность $z = f(x, y)$ графика функции $f \in C^1(\Omega)$. Требуется найти такое отображение параметрического квадрата в область Ω при заданном отображении границы квадрата в границу области, чтобы отображение поверхности $f(x, y)$ было гармоническим (рис. 5). Таким образом, ставится задача минимизации функционала Дирихле для поверхности $f(x, y)$.

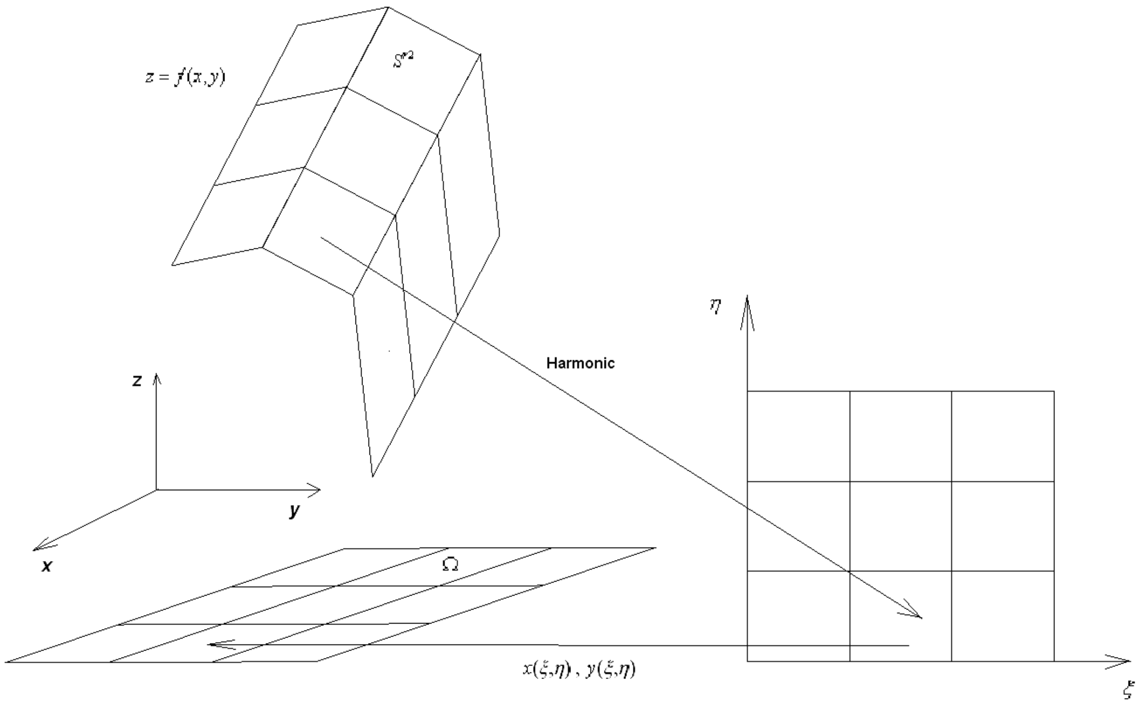

Рис. 4. Гармонические координаты на поверхности графика функции $z = f(x, y)$

Здесь также возможны разностный и вариационный подходы.

Разностный подход. Минимум функционала Дирихле, записанного для поверхности, ищется в этом случае путем решения разностной аппроксимации уравнений Эйлера для данного функционала.

Вариационный подход. Координаты узлов сетки ищутся в этом случае из условия минимизации дискретного аналога функционала Дирихле.

Для сравнения этих подходов в качестве управляющих использовались алгебраические функции. В ходе работы было показано, что с помощью разностного подхода к построению адаптивных расчетных сеток при мягких условиях (c=0.2, c – коэффициент сгущения узлов сетки в областях высоких градиентов функции) генерируются сетки, практически не отличимые от сеток, построенных вариационным методом при тех же условиях. Однако при значении коэффициента c=0.5, разностным способом не удается построить сетку, не содержащую самопересекающихся ячеек. В то же время сетка, построенная вариационным методом при c=0.5, содержит только выпуклые ячейки и вполне пригодна для расчетов.

Для профиля крыла GA(W)-1 была рассмотрена задача построения равномерной (рис. 6, 9) и адаптивно-гармонической (рис. 8) сеток.

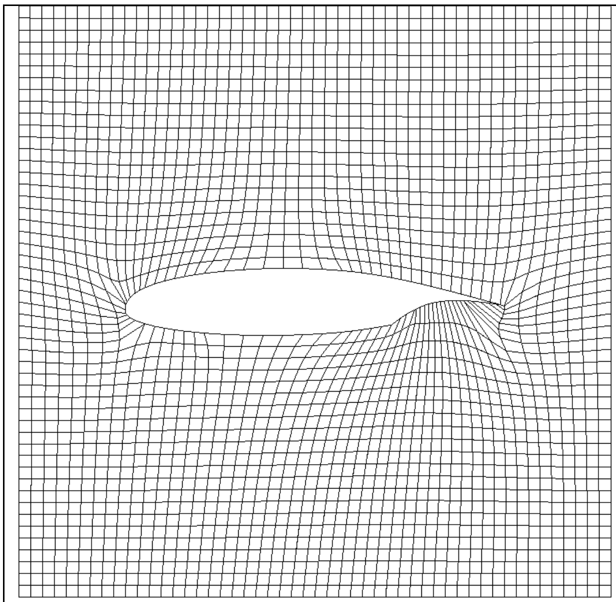

Рис.5. Профиль GA(W)-1

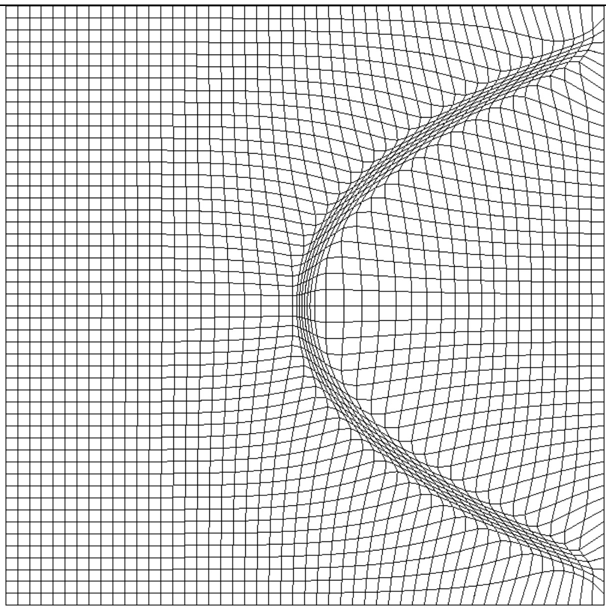

Рис.6. Адаптивно-гармоническая сетка

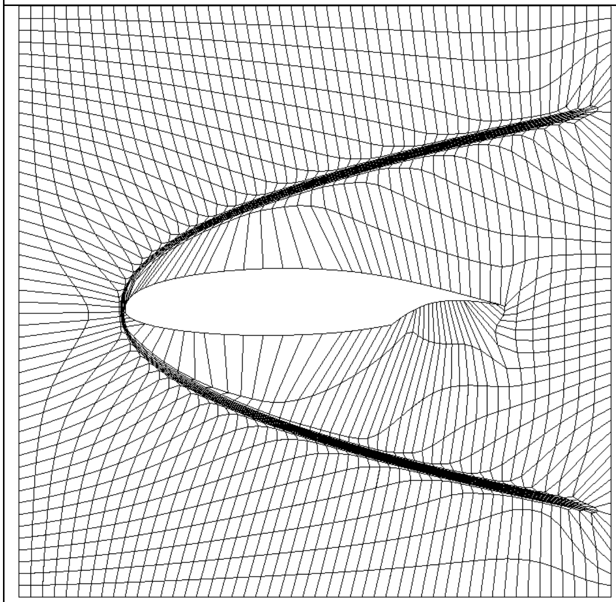

Рис.7. Адаптивная сетка для GA(W)-1

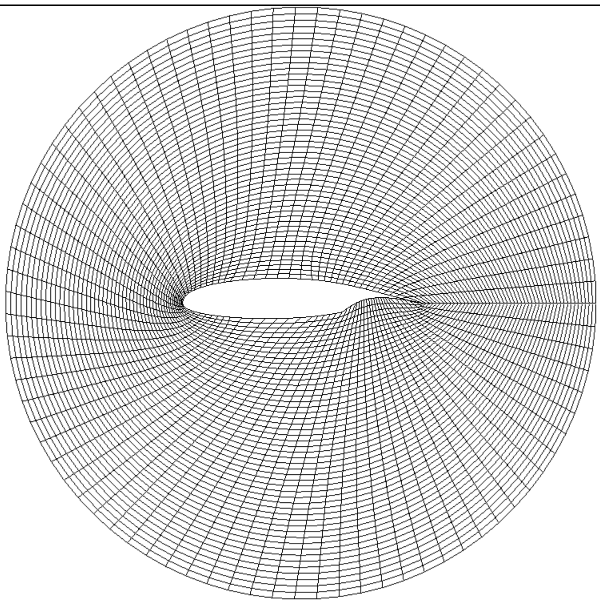

Рис.8. Профиль GA(W)-1

Литература

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975
2. Soni B. Mesh Generation: Overview, Processes, & Application. NUMGRID2008 – Short Course, Dorodnicyn Computing Center, RAS, Moscow, 2008
3. Владимирова Н.А., Сорокин А.М. Анизотропная адаптация трехмерных нерегулярных сеток в задачах вычислительной газовой динамики //ЖВМиМФ, 2003, том 43, №6, с. 909-919
4. Yerry M.A. and Shephard M.S. Automatic three dimensional mesh generation by the modified-octree technique, Int. J. for Num. Methods in Eng., Vol.20, pp.1965-1990,1984

5. Годунов С.К. Об идеях, используемых при построении разностных сеток. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003, том 43, №6, с. 787-789
6. Иваненко С.А. Адаптивно-гармонические сетки. – М.: ВЦ РАН, 1997.

Поступила: 07.06.10.