

УДК 621.01: 534.1

К ПРОБЛЕМЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ В КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С СИММЕТРИЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© И.И. Вульфсон

Санкт - Петербургский государственный университет технологии и дизайна
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Применительно к задачам динамики машин мультимодульной структуры исследуются особенности колебательных цепочек с переменными параметрами. Установлено, что нестационарность динамических связей, обусловленная механизмами с нелинейной функцией положения, приводит к нарушениям динамической симметрии и к пространственной локализации колебаний. Приводятся оценки наблюдаемых эффектов и результаты компьютерного моделирования характерных колебательных режимов.

Ключевые слова: колебания, машина, механизм, колебательные цепочки, пространственная локализация, системы с переменными параметрами.

1. Введение. В данной статье в развитии работ [1–6] ставится задача исследования ряда динамических моделей с переменными параметрами, используемых при схематизации приводов цикловых машин различного назначения с повышенной длиной зоны технологического процесса. Для реализации программного движения исполнительных органов используются многократно продублированные цикловые механизмы, образующие вместе с главным валом системы периодической структуры типа цепочек или решёток. Классические модели подобного вида рассмотрены в работах [7–11]. При проектировании подобных машин необходимо, чтобы колебания рабочих органов, были бы близки к синфазным. Нарушение этого требования приводит к появлению помимо нежелательных динамических эффектов к различного рода дефектам выпускаемой продукции (неравноота пряжи, кромочные дефекты при изготовлении тканей, обрывы нитей, повреждения печатной продукции и др.). Однако в реальных условиях сохранить эту форму колебаний при относительно большом числе приводных цикловых механизмов удаётся далеко не всегда. По существу, речь идёт о пространственной энергетической локализации колебаний, когда в определённых сечениях нарушается строгая динамическая регулярность системы из-за так называемых «включений», что проявляется в возникновении чётко выраженных экстремумов в формах колебаний [9,10].

Для классической модели данная задача конкретизирована на примере колебаний струны, а также балок Бернулли-Эйлера и Тимошенко с сосредоточенными включениями [10]. Однако, как показал анализ, применительно к рассматриваемому классу задач эффекты, наблюдаемые при экспериментах и компьютерном моделировании, не вмещаются по уровню интенсивности в рамки результатов, полученных на базе классической теории. Тем не менее, анализ классических моделей даёт весьма ценные представления качественного характера о данной проблеме, а в некоторых случаях и полезные предварительные оценки.

2. Частотный анализ некоторых типовых динамических моделей. Сначала обратимся к классической модели, приведённой на рис. 1,а [9,10]. Можно показать, что собственные частоты p_r без учёта диссипативных сил определяются следующей зависимостью:

$$p_r = p_0 \sqrt{1 + 4\zeta \sin^2 \frac{\pi(r-1)}{2n}}, \quad (1)$$

где $p_0 = \sqrt{c/m}$; $\zeta = c_1/c$; n – число масс; r – номер частоты.

Согласно (1) весь частотный спектр лежит на интервале $p_0 \leq p_r < p_0 \sqrt{1+4\zeta}$. Представляет интерес, что при $r=1$ имеем $p_1 = p_0$, причём эта частота отвечает $c_1 = 0$. Таким образом, при первой форме колебаний цепочка масс колеблется без относительных смещений, т.е. как жёсткое целое. При $c \rightarrow 0$ имеем $p_{\max} < 2\sqrt{c_1/m}$.

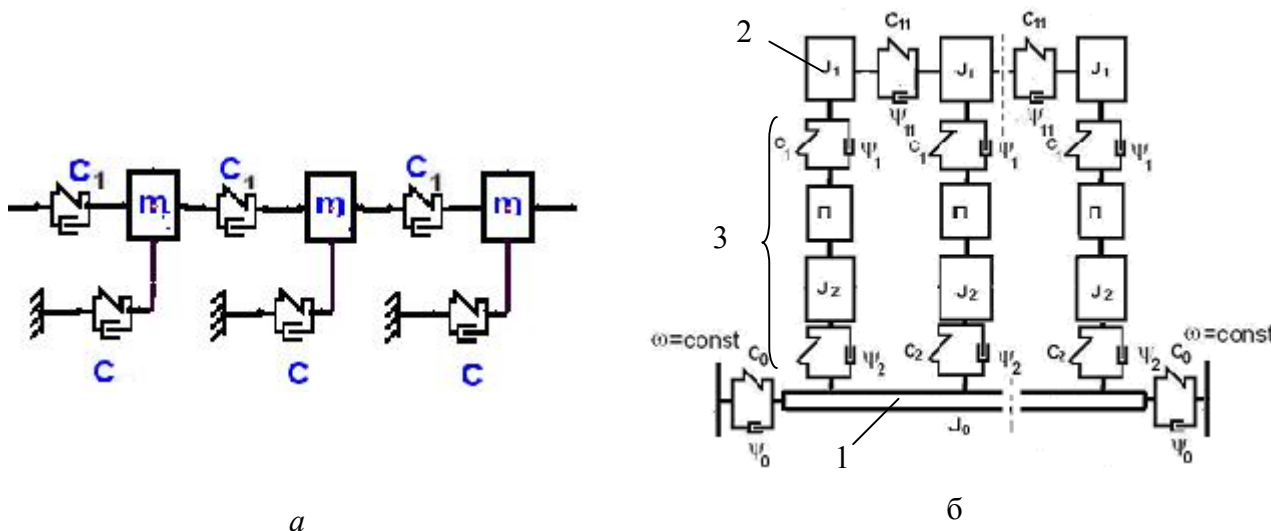


Рис.1

На рис 1,б изображена одна из динамических моделей привода, которая достаточно полно отражает наиболее существенные факторы, определяющие крутильные колебания рабочих органов машин рассматриваемого типа [1,2,4,6]. Здесь подсистема 1 соответствует главному валу, 2 – рабочему органу, 3 – цикловым механизмам, реализующим закон программного движения согласно заданной функции положения $\Pi(\varphi)$; J, c, ψ – моменты инерции, коэффициенты жёсткости, коэффициенты рассеяния. Функция $\Pi(\varphi)$ служит нелинейным оператором, связывающим входное и выходное звенья. Ввиду несоизмеримости «большой» координаты $\varphi_* = \omega t$ и «малых» колебаний $\Delta\varphi$ произведём линеаризация в окрестности программного движения: $\Pi(\varphi) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)\Delta\varphi$. При этом исходная нелинейная система трансформируется в систему с медленно меняющимися параметрами.

Для выявления основных факторов, приводящих к нарушениям синфазных колебаний рабочих органов, рассмотрим несколько частных случаев. Сначала примем $c_0 = \infty$; $c_2 = \infty$; $c_{11} = 0$. Тогда частотное уравнение при $\Pi' \equiv 1$ имеет вид

$$c_0 - p^2 [J_0 + n(J_1 + J_2) + p^2 n J_1 / (c_1 - p^2 J_1)] = 0 \tag{2}$$

Помимо двух собственных частот, определяемых из уравнения (2), система имеет ещё $n-1$ частот, которые при $n > 2$ отвечают кратным корням. Можно показать, что при $\Pi'(\varphi) \neq \text{const}$ изменение этой функции приводит к «расщеплению» кратных частот, образуя в окрестности точки сгущения $p_1 = \sqrt{c_1/J_1}$ очень плотный частотный спектр [1–5].

Далее обратимся к случаю, когда привод машины обладает относительно большой динамической жёсткостью, что позволяет при частотном и модальном анализе считать входные сечения приводных механизмов заземлёнными. На базе метода условного осциллятора можно показать, что использование аппарата матриц перехода можно распространить на резонансные колебательные системы [1,2,3,5]. При этом для рабочего органа справедливы следующие рекуррентные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} a_s &= g_{11}a_{s-1} + g_{12}Q_{s-1}; \\ Q_s &= (R_s g_{11}^{(s)} + g_{21}^{(s)})a_{s-1} + (R_s g_{12}^{(s)} + g_{22}^{(s)})Q_{s-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь $a_s, a_{s-1}, Q_s, Q_{s-1}$ – медленно меняющиеся функции, описывающие амплитудные значения форм колебаний и сил в соответствующих сечениях; g_{ij} – элементы матрицы перехода повторяющегося модуля Γ_s ; R_s – динамическая жёсткость приводного циклового механизма.

Зависимости (3) можно рассматривать как однородную систему разностных уравнений, решение которой ищем в форме $a_s = a_{s-1}\lambda, Q_s = Q_{s-1}\lambda$, где λ – характеристические показатели, которые в нашем случае определяются как

$$\lambda_s = \kappa_s \pm \sqrt{\kappa_s^2 - 1}, \quad (4)$$

где $\kappa_s = 0,5(g_{11}^{(s)} + g_{22}^{(s)} + R_s g_{12}^{(s)})$.

Ввиду идентичности повторяющихся модулей индекс s , за исключением зависимостей, описывающих формы колебаний, может быть опущен.

При $|\kappa_s| < 1$ на основании (3), (4) имеем

$$\left. \begin{aligned} a_s &= h_1 \cos s\gamma + h_2 \sin s\gamma; \\ Q_s &= (a_{s+1} - a_s g_{11}) / g_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\gamma = \arccos \kappa$, h_1, h_2 – функции, определяемые граничными условиями.

С помощью зависимостей (5) при учёте граничных условий $Q_0 = 0, Q_n = 0$ получаем уравнение

$$\cos(n-0,5)\gamma - \cos(n+0,5)\gamma = 0,$$

решением которого является $\gamma = (r-1)\pi/n$, где $r = \overline{1, n}$. Отсюда формальное частотное уравнение может быть представлено следующим образом:

$$1 + 0,5R(p)/c_{11} = \cos \frac{(r-1)\pi}{n}. \quad (6)$$

Можно показать, что для данной модели $R(p) = \mu_{11}/\mu_{12}$, где μ_{ij} – соответствующие элементы матрицы перехода механизма [1,5]. В нашем случае частотное уравнение (6) приводится к виду

$$\begin{aligned} J_1 J_2 p^4 - [J_1(c_2 + c_1 \Pi'^2(\varphi)) + J_2(c_1 + 4c_{11} \sin^2 \frac{j\pi}{2n})] p^2 + \\ + c_1 c_2 + 4c_{11}(c_2 + c_1 \Pi'^2(\varphi)) \sin^2 \frac{j\pi}{2n} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, для определения $2n$ «собственных» частот $p_{jr}(\varphi)$ ($r = \overline{1, n}; j = 1, 2$) следует n раз решить уравнение (7):

$$v_{jr} = \sqrt{0,5[L_1(r) \mp \sqrt{L_1(r)^2 - 4L_0(r)}]}, \quad (8)$$

где $L_0(r) = [1 + 4\zeta_0 \sin^2 \frac{(r-1)\pi}{2n}] \kappa^2$; $L_1(r) = \kappa^2 \zeta_0 + 1 + 4\zeta \sin^2 \frac{(r-1)\pi}{2n} \pi$; $v_{jr} = p_{jr}/p_0$; $\kappa = \zeta_2 J_1 / J_2$; $\zeta_0 = 1 + \zeta_2^{-1} \Pi'^2(\varphi)$; (знаки « \rightarrow » и « \leftarrow » отвечают соответственно $j=1$ и $j=2$).

Каждому значению j отвечают n значений частоты p_{jr} , причём при $j=1$ элементы J_1 и J_2 колеблются синфазно, а при $j=2$ – в противофазе.

Если принять $J_2 = 0$, то колебательная система имеет n степеней свободы. При этом

$$p_r(\varphi) = p_0 \sqrt{\zeta_2 / [\Pi'^2(\varphi) + \zeta_2] + 4\zeta_{11} \sin^2 \frac{(r-1)\pi}{2n}}, \tag{9}$$

где $p_0 = \sqrt{c_1 / J_1}$; $\zeta_1 = c_{11} / c$; $\zeta_2 = c_2 / c_1$.

Так как Π' зависит от угла φ , «собственная» частота согласно (9) изменяется диапазоне

$$p_0 \leq p_r(\varphi) < 2p_0 \sqrt{\zeta_{11}}. \tag{10}$$

Верхнее значение p_r иногда называют частотой отсечки или границей области пропускания [10,11]. Независимо от числа механизмов низшая «собственная» частота всей системы при $J_2 = 0$ равна частоте отдельно взятого передаточного механизма.

Форма колебаний согласно (3), (4) определяется как

$$a_s^{(r)} = \cos(s\gamma_2 - \gamma_0) / \cos \gamma_0, \tag{11}$$

где $\gamma_0 = -(n+0,5)\pi(r-1) / n$.

Представляет интерес, что в рассматриваемой симметричной регулярной колебательной системе имеет место сочетание переменности «собственных» частот со стационарностью форм колебаний; это обычно свойственно системе с постоянными параметрами.

Методика частотного и модального анализа при учёте упругих характеристик главного вала приведена в монографиях [1–3].

3. Проявление пространственной локализации колебаний в цикловых машинах, включающих приводы с симметричной периодической структурой. При исследовании систем рассматриваемого класса было выявлено, что при возбуждении импульсного характера, по мере увеличения числа механизмов возникает локализация колебаний на определённых участках рабочего органа и главного вала. В качестве примера ниже приведены некоторые результаты, полученные численным методом для привода, динамическая модель которого приведена на рис.2.

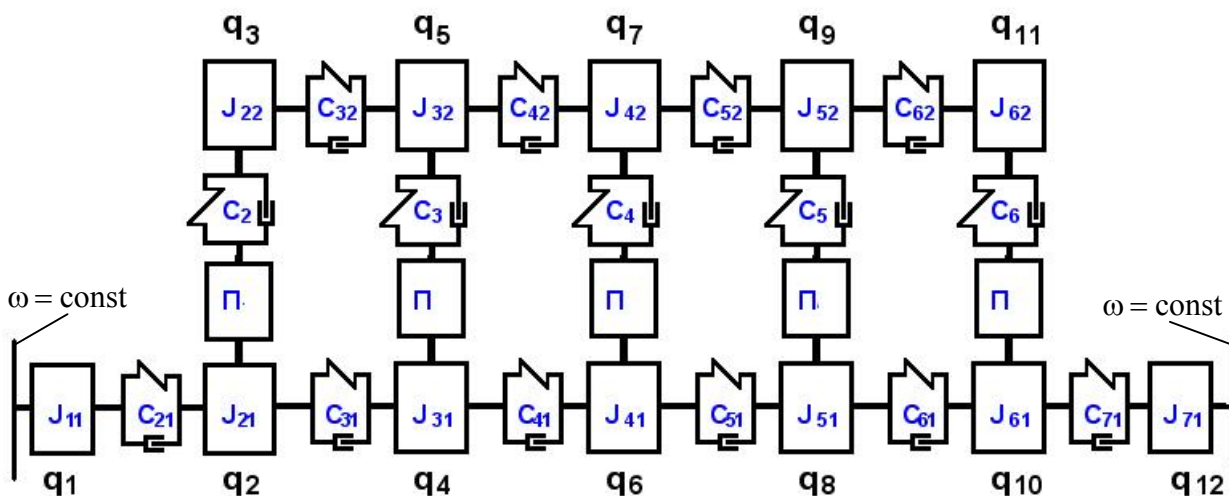


Рис.2

На рис.3,а показаны, колебания в двух сечениях рабочего органа при $n=3$, возникающих после соударения в зазоре (линии 3). При этом колебания в обоих сечениях практически синфазны (кривые 1,2), в то время как при $n>5$ имеют место существенные фазовые сдвиги, сопровождающиеся амплитудной модуляцией (рис.3,б). Среди возможных причин этого эффекта могут быть выделены нелинейные факторы, связанные с зазорами, интерференция колебаний при плотном частотном спектре и переменности параметров, фазовые сдвиги в сечениях главного вала, т.е. в аргументе функции положения $\Pi(\varphi)$.

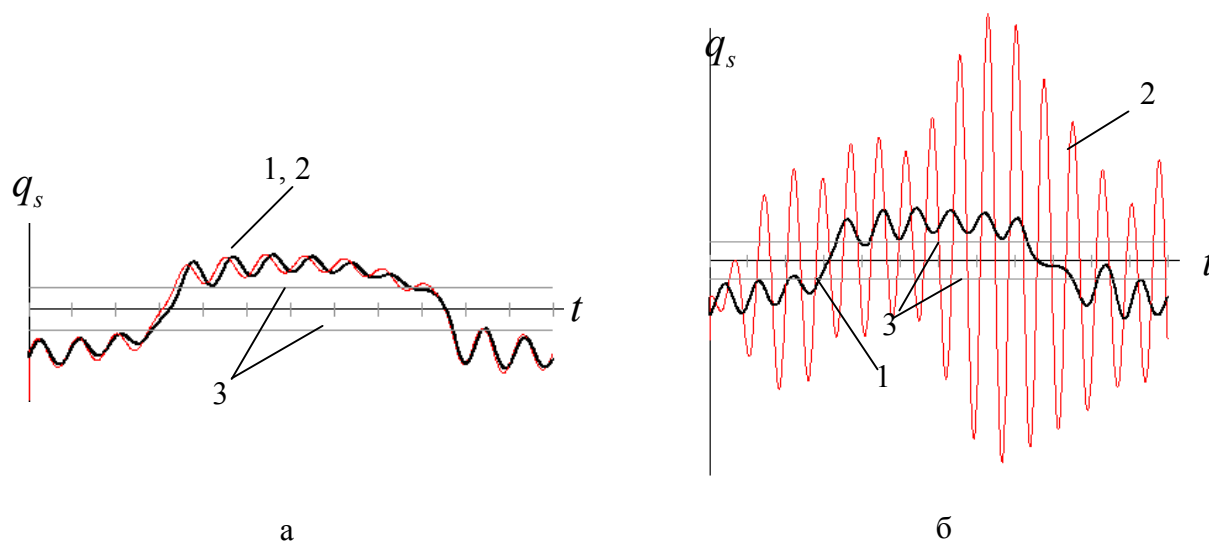


Рис.3

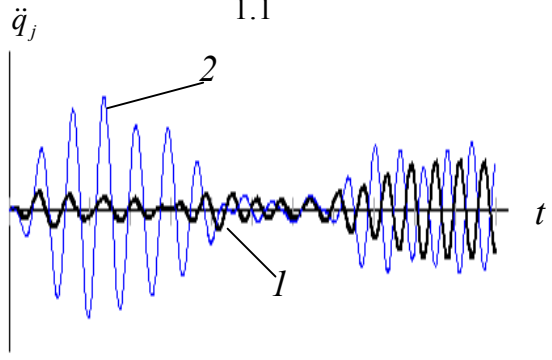
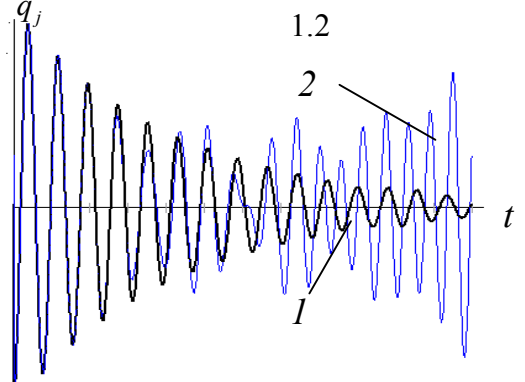
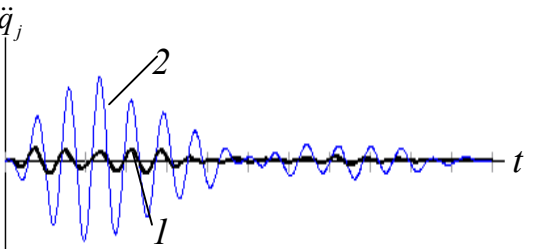
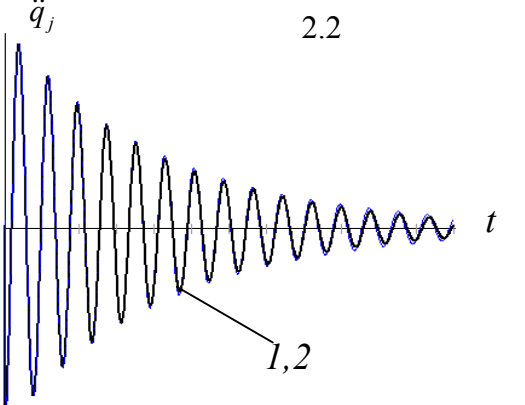
Чтобы исключить влияние нелинейных факторов, был проведён численный эксперимент, при котором зазоры были обнулены, а возбуждение осуществлялось за счёт одинаковых начальных условий в каждом расчётном сечении рабочего органа. Некоторые результаты анализа приведены в таблице. Фрагменты 1.1 и 1.2 иллюстрируют изменение виброускорений на главном валу и исполнительном органе при $n=5$. В окрестности $t = 0$ кривые 1 и 2, отвечающие координатам q_2 и q_6 (см. рис.2), практически синфазны, однако затем возникают фазовые сдвиги, которые приводят к существенному возбуждению исполнительного органа. При $c_{s2} = 0$ (фрагменты 2.1, 2.2) фазовые сдвиги близки к нулю на всём отрезке времени, и имеет место затухание колебаний во всех сечениях. На анализе этого интересного эффекта мы остановимся в дальнейшем.

4. Физическая интерпретация основных причин нарушений синфазности колебаний и некоторые инженерные оценки. Результаты компьютерного моделирования свидетельствуют о том, что в рассматриваемой системе при анализе проблемы пространственной локализации колебаний можно ограничиться линейной постановкой задачи.

Исходя из вышеизложенного, можно предположить, что определяющую роль в нарушении синфазных колебаний играют фазовые сдвиги функции $\Pi(\varphi)$, которые при повышенной плотности частотного спектра и переменности параметров создают предпосылки для периодической перекачки энергии из одной формы в другую. При этом даже при медленном изменении параметров возникают скачкообразные изменения доминирующей «собственной» частоты и происходит вырождение некоторых форм колебаний. В качестве примера на рис.4 приведён типовой график изменения частотного спектра в зависимости от текущего значения

угла поворота главного вала. На графиках чётко выявились перескоки с кривых 1,2,3 на одноимённые кривые, помеченные звёздочками..

Таблица

Главный вал	Исполнительный орган
<p>1.1</p> 	<p>1.2</p> 
<p>2.1</p> 	<p>2.2</p> 

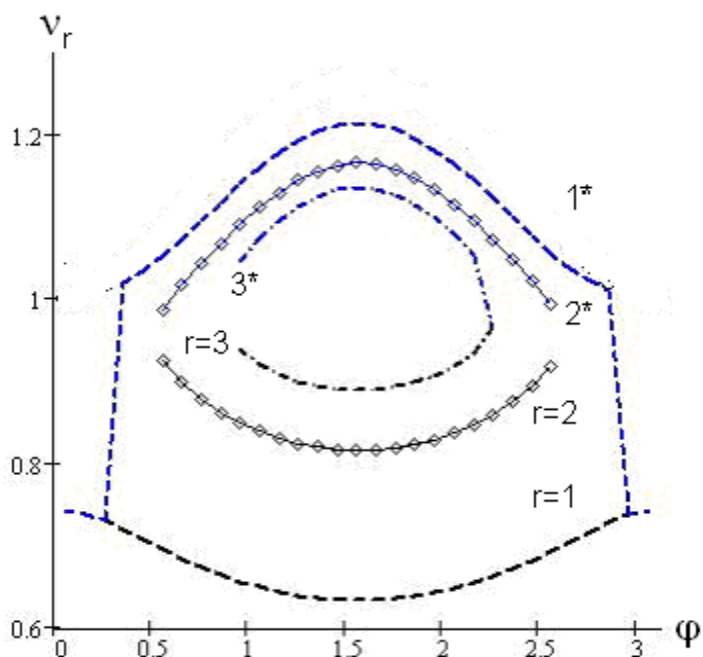


Рис.4

Модель, показанная на рис.2, разумеется, сложнее исходной модели (см. рис.1,б), в которой игнорируется динамическая связь между элементами J_2 . Однако, имея в виду, что основной целью данного исследования является анализ нарушений синфазности колебаний, можно на предварительном этапе этой связью пренебречь. Кроме того, анализ исходной модели представляет также и самостоятельный интерес. Система дифференциальных уравнений для свободных колебаний этой модели может быть записана как

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{q}_{1s} + \tilde{c}_{11}(2q_{1s} - q_{1,s+1} - q_{1,s-1}) + \tilde{c}_1(q_{1s} - \Pi'q_{2s}) &= 0. \\ J_2 \ddot{q}_{2s} - \tilde{c}_1(q_{1s} - \Pi'q_{2s}) + \tilde{c}_2 q_{2s} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Здесь q_{js} – обобщённые координаты; $\tilde{c} = c(1 + 2i\delta)$ – комплексный коэффициент жёсткости при $\delta = \vartheta/2\pi$, где ϑ – логарифмический декремент; $i = \sqrt{-1}$; $\Pi' = d\Pi/d\varphi$.

На базе метода условного осциллятора (или ВКБ-приближения) решение ищем в виде [1,2,3]

$$q_{js} = a_{js}(\varphi) \sqrt{p_r(0)/p_r(\varphi)} \cos \int_0^t p_r(\varphi) dt. \quad (13)$$

Здесь $\varphi = \omega t$ играет роль «медленного времени».

После подстановки (13) в (12) получаем зависимости в форме (5), однако теперь частное решение разностного уравнения представим как $\tilde{a}_{js} = A \exp[-i\delta \int p_r(\varphi) dt - s\theta]$. Используя граничные условия, после уравнивания коэффициентов при действительной и мнимой части получаем два уравнения, определяющие частотные и диссипативные свойства системы, а также фазовые сдвиги. Как и следовало ожидать, собственные частоты практически совпадают со значениями, определёнными выше без учёта диссипации, поэтому приведём лишь некоторые результаты анализа фазовых сдвигов. Опуская выкладки, получаем

$$f(v) = \frac{-4\delta^2 v^2 \kappa \pm (1 - \kappa^2) \sqrt{1 + 4\delta^2 v^2}}{1 - \kappa^2 - 4\delta^2 v^2 \kappa^2}. \quad (13)$$

$\theta = \text{Arch} f(v)$ при $f(v) \geq 1$ и $\theta = \text{Arc} \cos f(v)$ при $f(v) \leq 1$.

Ниже приведены результаты анализа при следующих исходных данных: $c_1 = 70000$; $c_2 = 300000$; $c_{11} = 50000 \text{ Нм}$; $J_1 = 0,3$; $J_2 = 0,36 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $\Pi = 0,8(1 - \cos \varphi)$; $\delta = 0,03$.

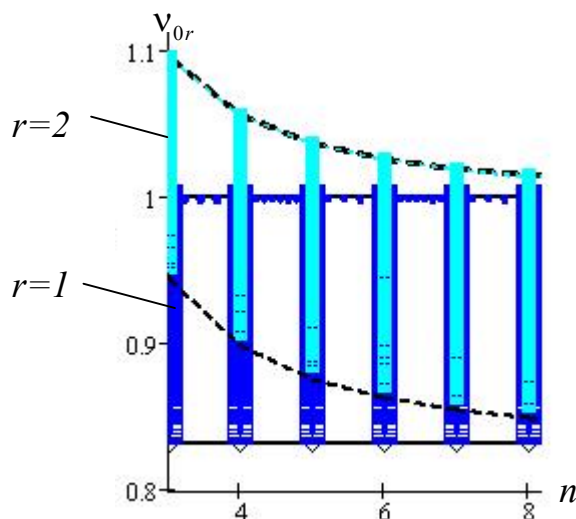


Рис.5

На рис.5 приведены графики $v_{0r}(n) = p_r(n)/p_0$, построенные по формуле (8) для $J_2 = 0$. Высота «столбиков» отвечает диапазону изменения частоты при изменении функции положения механизма $\Pi(\varphi)$. На рис.6 для случая $J_2 \neq 0$ показаны графики $v_{1r}(\theta)$, которые дают

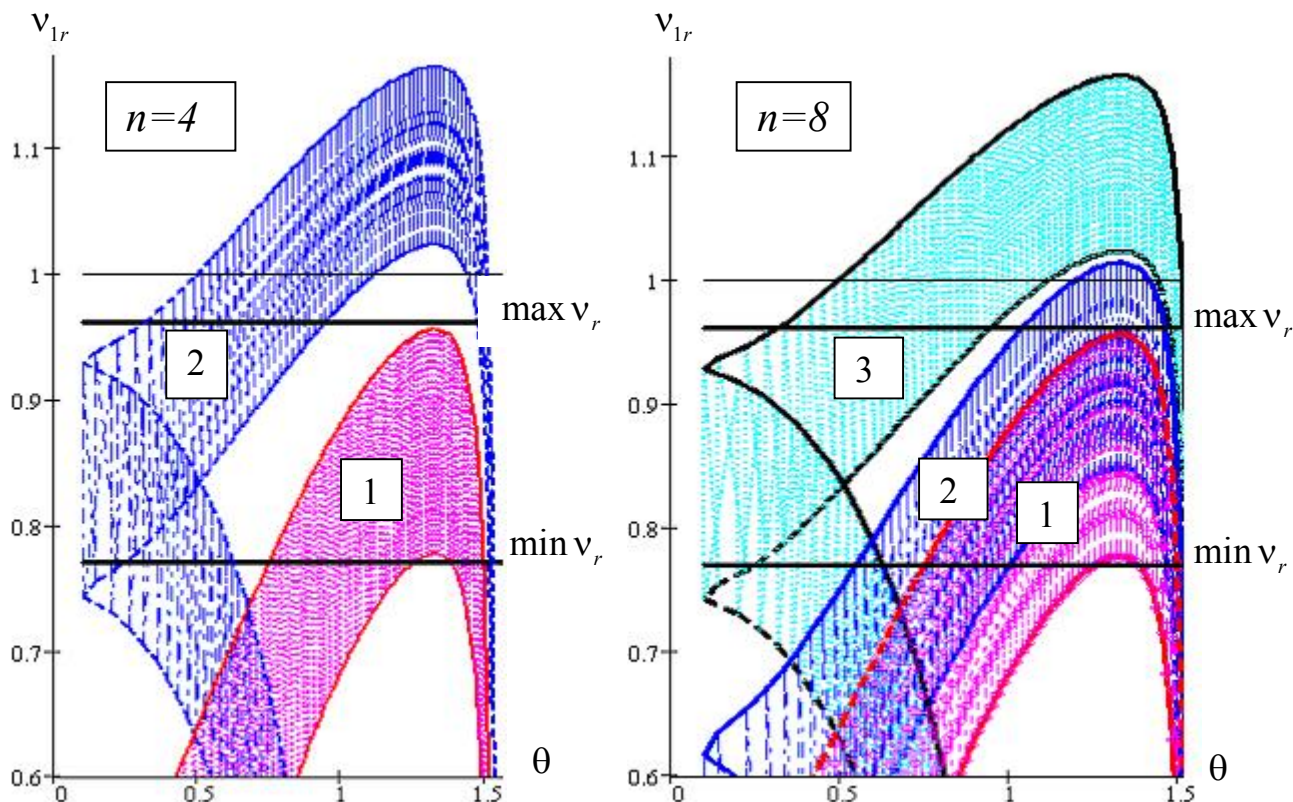


Рис.6

возможность определять фазовые сдвиги в зависимости от частотных характеристик системы. На графиках выделён частотный диапазон изменений безразмерной собственной частоты v_{1r} , соответствующий первым трём формам колебаний. При изменении $\Pi'(\varphi)$ одновременно изменяется не только «собственная» частота, но и фазовые сдвиги, чему на графиках отвечают выделённые области (нумерация областей соответствует номеру формы). Интересно, что значение θ , соответствующее максимуму функции $v_r(\theta)$, не зависит от r .

При $n = 4$ области 1 и 2 в рассматриваемом диапазоне изменения частот не перекрываются. В отличие от этого случая при $n = 8$ на одном и том же частотном диапазоне возможны не только синфазные колебания ($r=1$), но и колебания в противофазе ($r=2$). Эта ситуация, проиллюстрированная также выше на рис.5, разумеется, не отвечает кратным частотам, поскольку соответствует разным моментам «медленного» времени, однако свидетельствует о близости частот при этих формах. В подобных случаях имеет место большая связанность подсистем, проявляющаяся в биениях, при которых происходит периодическая перекачка энергии из одной формы в другую. Это свойство Л.И. Мандельштам образно охарактеризовал как «заразительно»[8]. При переменности параметров рассматриваемый эффект усиливается из-за «перескоков» с одной формы на другую в пределах каждого кинематического цикла, а также возможных нарушений условий динамической устойчивости в окрестности программного движения [1–5]. Остановимся на этой проблеме подробнее.

Выделив в амплитудной функции (13) медленно меняющуюся составляющую

$$Z(\varphi) = v_r^{-0,5}(\varphi) \exp[-\delta \int v_r(\omega t) dt - s\theta(\varphi)],$$

потребуем выполнения условия $dZ/dt < 0$. Тем самым исключается возможность появления участков с нарастающим характером отклонений от программного движения. При $c_{11} \rightarrow 0$ приведенные области трансформируются в кривые. При этом подавляются основные источники локализации колебаний и повышенной виброактивности системы [4,6].

По существу, приведенные выше динамические эффекты, связанные с переменной динамической жёсткостью, можно трактовать как проявление пространственной локализации. В частном случае динамическая жёсткость трансформируется в жёсткость упругого элемента c (см. рис.1,а).

Иногда отклонения от строгой пространственной периодической структуры динамической модели возникают по чисто конструктивным соображениям. В нашем случае система особенно чувствительна к нарушению пространственной симметрии. Ограничимся здесь только рассмотрением эффекта от «включения» в одном из крайних элементов модели. При этом примем скорректированное значение коэффициента жёсткости как $c_2 + \Delta c_2$. Используя методику определения оценки размера области локализации, изложенную в монографии [9], при учёте (6), получаем

$$n_* \approx 4\zeta_{11} \Delta\zeta_2 / |\Pi'^2 - \Delta\zeta_2|,$$

где n_* – максимальное число сечений, охваченных локализацией; $\Delta\zeta_2 = \Delta c_2 / c_1$.

На рис.7 приведено семейство кривых $n_*(\Delta\zeta_2, \zeta_{11})$ при $\Pi' = 0,8$. Из анализа графиков следует, что при прочих равных условиях одним из способов подавления пространственной локализации является уменьшение параметра $\zeta_{11} = c_{11} / c_1$. В частности, этот вывод оказался эффективным при снижении виброактивности цикловых систем кольцевой структуры трико-тажных машин [4].

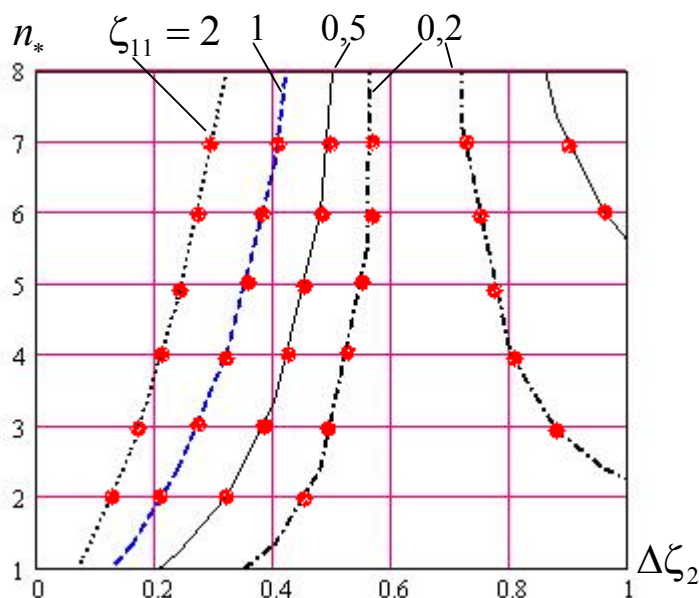


Рис.7

Помимо рассмотренных факторов отдельного рассмотрения требует анализ биений, так как в отличие от традиционного процесса в системах с переменными параметрами большую роль играет длительность «пребывания» в зонах с близкими частотами.

Литература

1. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия.– Л.: Машиностроение, 1990.
2. Vulfson I. Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives. New York, London: Hemisphere Publishing Corporation, 1989.
3. Dresig H., Vul'fson I.I.: Dynamik der mechanismen, Springer, Wien, New York, 1989.
4. Вульфсон И.И., Преображенская М.В. Исследование колебательных режимов, возбуждаемых при переключке в зазорах цикловых механизмов, соединенных с общим исполнительным органом // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. №1. С.33–39.
5. Вульфсон И.И. Колебания в машинах: учеб. пособие для вузов. Изд. 2-е, 3-ье.– СПб.: СПГУТД, 2006, 2008.
6. Vulfson I. I. Some nonlinear effects of machine dynamics.//Journal of Vibroengineering.V.10. ,No4, 2008. Pp.442–450.
7. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах.– М.: Изд.-во иностр. лит. 1959.
8. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний.– М.: Наука, 1972.
9. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем.– М: Наука, 1989.
10. Индейцев Д.А., Кузнецов Н.Г., Мотыгин О.В. и др. Локализация линейных волн. – СПб.: Изд-во. С.- Петерб. ун-та, 2007.
11. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны.– М.: Наука, 1997.

Поступила: 07.06.2010.