

УДК 517.443+517.18

ВЛИЯНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРОСАЧИВАНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ УСЕЧЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

© Г.С. Ханян

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия.

Аннотация. Работа посвящена сравнительному анализу двух дискутируемых в литературе способов определения дискретной автокорреляционной функции – круговой и линейной, вычисляемых с помощью быстрого преобразования Фурье. Выведены точные аналитические формулы для обоих типов автокорреляционной функции эталонного сигнала – гармонического колебания ограниченной длительности. Показано существенное искажающее влияние основного недостатка спектрального анализа – эффекта просачивания амплитуды на поведение круговой корреляционной функции и незначительное влияние этого эффекта на линейную корреляционную функцию.

Ключевые слова: круговая и линейная автокорреляционная функция, преобразование Фурье, гармонический сигнал, эффект просачивания, искажение, погрешности.

1. Корреляционная функция используется во многих областях прикладной математики и физики: в теории вероятностей и математической статистике – для оценки характеристик случайных процессов, в экономике – для прогнозирования промышленного развития, в аэрогидродинамике – для определения интегрального масштаба турбулентности и т.д. Применяется корреляционная функция и в алгоритмах интерполяции данных (пикселей) в двумерной обработке изображений, в PIV-методе оптической визуализации потоков и т.д.

В практике цифровой обработки сигналов дискретную автокорреляционную функцию вычисляют с помощью обратного дискретного преобразования Фурье (ДПФ)

$$C_k = \sum_{m=0}^{N-1} |S_m|^2 e^{i2\pi mk/N}; \quad k = 0, 1, \dots, N/2 \quad (1)$$

от квадрата модуля дискретной спектральной функции

$$S_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i2\pi mn/N}; \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

N -точечной цифровой реализации

$$s_n = s(t_n); \quad t_n = t_0 + n\Delta t; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

аналогового сигнала $s(t)$, наблюдаемого в окне времени длительностью T . При этом дискретизация проводится с частотой $F=1/\Delta t=N/T$, начиная с некоторого момента времени t_0 .

2. Применение формулы Винера-Хинчина (1) для вычисления корреляционной функции таит в себе две проблемы – методологическую и метрологическую. Первая из этих проблем обусловлена периодичностью цифровой реализации ($s_n = s_{n \pm N}$), возникающей при обращении ДПФ (2). Это приводит к разрыву запаздывающей последовательности s_{n+k} в точке $n = N - k$, из-за чего прямое вычисление отсчетов C_k через отсчеты цифровой реализации s_n осуществляется по двучленной формуле

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n s_{n+k} = \frac{N-k}{N} R_k + \frac{k}{N} R_{N-k}; \quad R_k = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} s_n s_{n+k}; \quad R_{N-k} = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} s_n s_{n+N-k}, \quad (4)$$

в которой на главную часть, описываемую дискретной функцией R_k , накладывается зеркальная часть R_{N-k} , формируемая с правого конца цифровой реализации (3). Этот факт хорошо известен в литературе (см., например [1]) как наложение во временной области. Проблема состоит в продолжающейся дискуссии о том, какая из корреляционных функций является истинной – «круговая» C_k или «линейная» R_k . Более того, открытым остается и вопрос о том, на что делить сумму при определении R_k – на число слагаемых $N-k$, как в (4), или же на число отсчетов N , как при определении C_k . С вычислительной точки зрения проблема решена: линейная корреляционная функция выражается через круговую, вычисляемую с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье от дописанной N нулями исходной цифровой реализации сигнала.

Вторая, метрологическая проблема относится к точности представления автокорреляционной функции эталонного сигнала – гармонического колебания, происходящего с амплитудой a_0 , частотой f_0 и начальной фазой φ_0 . Цифровая реализация такого сигнала имеет вид

$$s_n = a_0 \cos(2\pi f_0 t_n + \varphi_0) = a_0 \cos(\pi(m_0 + \mu_0)(2n - N + 1)/N + \psi_0), \quad (5)$$

где m_0 есть адрес максимального пика в спектре амплитуд сигнала $A_m = 2|S_m|$, $m=1, 2, \dots, m_0, \dots, N/2-1$; μ_0 – дробная добавка к адресу пика; ψ_0 – начальная фаза сигнала в системе отсчета времени, связанной с окном наблюдения. Параметры эти определяются следующим образом:

$$m_0 = -[-f_0 T + 1/2]; \quad \mu_0 = f_0 T - m_0; \quad \psi_0 = \varphi_0 + \pi f_0 (2t_0 + T - \Delta t). \quad (6)$$

В работе [2] показано, что параметр μ_0 , изменяющийся в диапазоне $-1/2 < \mu_0 \leq 1/2$, является основным фактором, искажающим как спектр амплитуд (занижение максимального пика по сравнению с истинной амплитудой a_0 , сопровождаемое просачиванием – возникновением ложных боковых составляющих по обе стороны от m_0), так и спектр фаз (смещение фазы на частоте амплитудного пика по сравнению с истинной фазой φ_0). Естественно поэтому предположить, что параметр этот может влиять и на структуру корреляционной функции. Целью настоящей работы является исследование характера этого влияния и степени вносимого при этом искажения корреляционной функции сигнала (5).

3. Для решения поставленной задачи получим аналитические выражения функций C_k и R_k .

Начнем с линейной корреляционной функции. Подстановка (5) во вторую из формул (4) приводит к следующей зависимости дискретной функции R_k от дискретного запаздывания $\tau_k = k\Delta t$; $k=0, 1, \dots, N/2$:

$$R_k = \frac{a_0^2}{2} \left(\cos 2\pi f_0 \tau_k - \frac{\sin 2\pi(f_0 \tau_k - \mu_0)}{T - \tau_k} \frac{\cos 2\psi_0}{F \sin 2\pi f_0 / F} \right). \quad (7)$$

Техника проведения выкладок для получения этой и последующих формул основана на тригонометрических преобразованиях с применением формулы Эйлера, на вычислении суммы членов конечной геометрической прогрессии и на других известных математических приемах.

Заменив в (7) k на $N-k$, приходим к выражению для R_{N-k} в третьей формуле (4). Подставив обе вычисленные линейные функции в первую из формул (4), получаем точное аналитическое выражение для круговой автокорреляционной функции усеченного гармонического сигнала:

$$C_k = \frac{a_0^2}{2} \left(\cos 2\pi f_0 \tau_k + \frac{2 \sin \pi \mu_0}{T} \left(\tau_k \sin(2\pi f_0 \tau_k - \pi \mu_0) + \frac{\cos 2\psi_0}{F \sin 2\pi f_0 / F} \cos(2\pi f_0 \tau_k - \pi \mu_0) \right) \right). \quad (8)$$

4. В приложениях принято иметь дело с корреляционной функцией, центрированной по сравнению со средним значением и нормированной по отношению к дисперсии цифровой реализации сигнала. В центрированной и нормированной круговой корреляционной функции

$$\bar{C}_k = \frac{C_k - S_0^2}{C_0 - S_0^2}; \quad S_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n \quad (9)$$

фигурирует квадрат среднего значения цифровой реализации, равно как раз нулевому отсчету S_0 спектральной функции (2). Вычисление S_0 и подстановка его в первую из формул (9) приводит ее к выражению

$$\bar{C}_k = \frac{\cos 2\pi f_0 \tau_k + 2 \left(\frac{\tau_k}{T} \sin(2\pi f_0 \tau_k - \pi \mu_0) + \alpha_0 \cos(2\pi f_0 \tau_k - \pi \mu_0) \right) \sin \pi \mu_0 - 2\beta_0^2 \sin^2 \pi \mu_0}{1 + \alpha_0 \sin 2\pi \mu_0 - 2\beta_0^2 \sin^2 \pi \mu_0}, \quad (10)$$

в котором постоянные (не зависящие от переменной времени τ_k) константы α_0 и β_0 суть

$$\alpha_0 = \frac{\cos 2\psi_0}{N \sin(2\pi f_0 / F)}; \quad \beta_0 = \frac{\cos \psi_0}{N \sin(\pi f_0 / F)}. \quad (11)$$

Проанализируем полученный результат. Очевидно, что известная в литературе «классическая» формула для автокорреляционной функции гармонического сигнала

$$\bar{C}_k = \cos 2\pi f_0 \tau_k \quad (12)$$

вытекает из (10) лишь при нулевом значении параметра μ_0 – т.е. при отсутствии спектрального просачивания. При $\mu_0 \neq 0$ корреляционная функция искажена по отношению к (12), причем характер этого искажения определяется вторым слагаемым в числителе (10), имеющим вид произведения функции от τ_k на множитель $\sin \pi \mu_0$, изменяющийся от 0 до ± 1 при изменении $|\mu_0|$ от 0 до 1/2. Второе слагаемое в знаменателе равно значению этого произведения при $\tau_k=0$ и есть константа. Константой является и третье, квадратичное по β_0 слагаемое, общее для числителя и знаменателя и представляющее собой квадрат среднего значения S_0 , деленный на половину квадрата амплитуды сигнала a_0 .

Оценим порядок величин α_0 и β_0 . Рассмотрим гармонический сигнал, частота f_0 которого находится в окрестности одной из трех характерных точек частотной оси – в начале спектра ($f_0 \approx 0$), в середине ($f_0 \approx F/4$) и вблизи частоты Найквиста ($f_0 \approx F/2$). Пусть f' – расстояние частоты от указанной характерной точки, малое по сравнению с частотой дискретизации F .

В первом случае (низкочастотное колебание) принимаем $f_0 = f'$, и для оценки α_0 , β_0 имеем

$$\alpha_0 = \frac{\cos 2\psi_0}{N \sin(2\pi f' / F)} \cong \frac{\cos 2\psi_0}{N \cdot 2\pi f' / F} = \frac{\cos 2\psi_0}{2\pi f' T} \cong \frac{\cos 2\psi_0}{2\pi m'}; \quad \beta_0 = \frac{\cos \psi_0}{N \sin(\pi f' / F)} \cong \frac{\cos \psi_0}{\pi m'}, \quad (13)$$

где $m' = [f' T]$ – бин, соответствующий размерной частоте f' – мал по сравнению с N .

Во втором случае (среднечастотное колебание) частота сигнала $f_0 = F/4 \pm f'$ может находиться справа или слева от центральной частоты спектра $F/4$, что приводит к следующей оценке:

$$\alpha_0 = \frac{(\cos 2\psi_0) / N}{\sin(2\pi(F/4 \pm f') / F)} = \frac{(\cos 2\psi_0) / N}{\cos 2\pi f' / F} \cong \frac{\cos 2\psi_0}{N}; \quad \beta_0 = \frac{(\sqrt{2} \cos \psi_0) / N}{\cos \pi f' / F \pm \sin \pi f' / F} \cong \frac{\sqrt{2} \cos \psi_0}{N \pm \pi m'}. \quad (14)$$

В третьем случае (высокочастотное колебание) в (11) подставляем $f_0 = F/2 - f'$ и получаем

$$\alpha_0 = \frac{\cos 2\psi_0}{N \sin(2\pi(F/2 - f')/F)} = \frac{\cos 2\psi_0}{N \sin 2\pi f'/F} \cong \frac{\cos 2\psi_0}{2\pi m'}; \quad \beta_0 = \frac{\cos \psi_0}{N \cos \pi f'/F} \cong \frac{\cos \psi_0}{N}. \quad (15)$$

Учитывая, что $m' \ll N$ и $|\cos \psi_0| \leq 1$, $|\cos 2\psi_0| \leq 1$, мы можем обобщить все три случая (13)-(15), и по самой грубой оценке утверждать, что для всех значений α_0 и β_0 имеют место ограничения

$$|\alpha_0| \leq \frac{1}{2\pi m'}; \quad \beta_0^2 \leq \frac{2}{(\pi m')^2}. \quad (16)$$

5. На практике обычно $N=2048$, и для такой длины цифровой реализации $|\alpha_0| < 1\%$, $(\beta_0)^2 < 1\%$ уже при $m' \geq 16$ бин, т.е. при отступлении частоты синусоиды от краев спектра всего на $16/1024 \approx 1,6\%$. Это позволяет пренебречь всеми постоянными слагаемыми в формуле (10) – третьим в числителе и вторым и третьим в знаменателе. Если же провести сравнение τ_k/T с α_0 , то уже при $\tau_k/T \cong k/N > \alpha_0$ можно пренебречь и влиянием α_0 на поведение числителя. Для этого, при только что указанных условиях должно быть $k > N\alpha_0 = 2048 \times 1\% \geq 20$, т.е. после 20-го отсчета корреляционной функции вместо точного аналитического выражения (10) можно пользоваться приближенной формулой

$$\bar{C}_k = \cos 2\pi f_0 \tau_k + 2 \frac{\tau_k}{T} \sin(2\pi f_0 \tau_k - \pi \mu_0) \sin \pi \mu_0, \quad (17)$$

показывающей, что при наличии спектрального просачивания огибающая корреляционной функции гармонического сигнала меняется по линейному закону с коэффициентом $\sin \pi \mu_0$.

Тот факт, что эффект искажения корреляционной функции (12) состоит в ее сужении, не совсем очевиден из (17) – из-за того, что оба осциллирующих с частотой f_0 слагаемых отличаются по фазе. Сужение наглядно проявляется при численном моделировании формулы (10). Оно тем сильнее, чем ближе значение $|\mu_0|$ к $1/2$ и максимально при наибольшем просачивании амплитуды, т.е. при $\mu_0 = \pm 1/2$. При любом из этих двух экстремальных значений параметра μ_0 формула (17) принимает простой вид

$$\bar{C}_k = (1 - 2\tau_k/T) \cos 2\pi f_0 \tau_k, \quad (18)$$

откуда видно, что корреляционная функция сужается от единицы (при $\tau_k=0$) до нуля (при $\tau_k=T/2$).

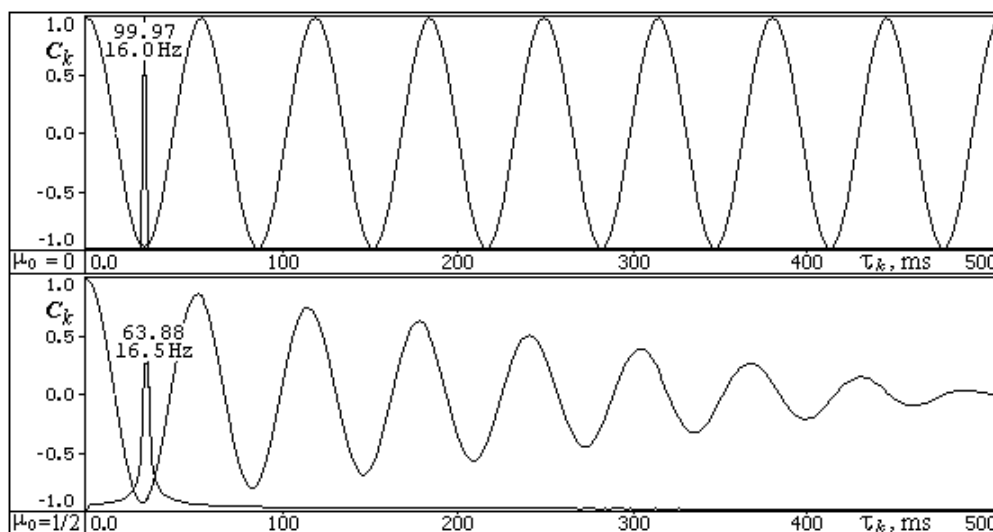


Рис.1. Корреляционная функция и спектр амплитуд гармонического сигнала при отсутствии (вверху) и при наличии (внизу) эффекта просачивания

6. На рис.1 приведены результаты спектрального и корреляционного анализа гармонического сигнала (5), моделируемого при следующих значениях параметров: $a_0=100$, $m_0=16$, $\varphi_0 = \pi/4$, $t_0=0$, $N=512$, $T=1000$ мс. Анализ проводился при $\mu_0=0$ (верхнее окно) и $\mu_0=1/2$ (нижнее окно). Корреляционная функция (9) вычислялась как с применением ДПФ (1), так и моделированием формулы (10). Видимых различий при этом обнаружено не было, поэтому в окнах представлены результаты применения ДПФ. Видно влияние параметра μ_0 как на структуру спектра амплитуд (занижение и уширение пика), так и на структуру корреляционной функции (сужение ее огибающей).

Продемонстрируем теперь влияние шума на эффект сужения круговой корреляционной функции. На рис.2 приведены результаты спектрального анализа чистого и зашумленного гармонического сигнала (с полуразмахом равномерно распределенной шумовой компоненты, равной амплитуде сигнала a_0). Параметры сигнала те же, что и на рис. 1, за исключением того, что спектрограммы и коррелограммы получены для $\mu_0=1/3$. Видно, что шум и спектральное просачивание влияют на структуру корреляционной функции независимо друг от друга. Первый из этих факторов делает нулевой и несколько начальных отсчетов корреляционной функции доминирующими над остальными, второй – сужает ее огибающую.

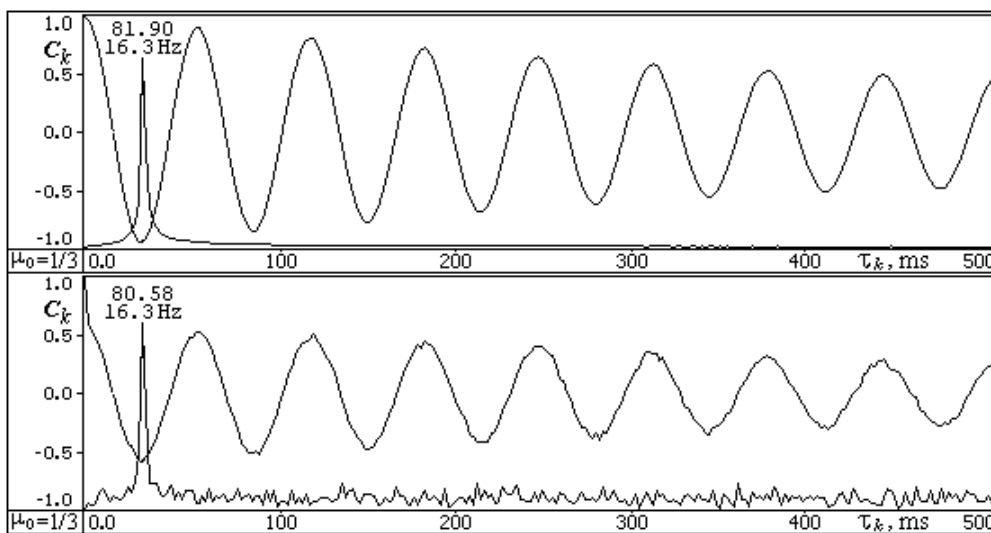


Рис.2. Корреляционная функция и спектр амплитуд чистого (вверху) и зашумленного (внизу) гармонического сигнала

7. Вернемся к линейной корреляционной функции. Поскольку центрирование, как было показано для круговой функции, не является значимым искажающим фактором, для простоты ограничимся анализом нормированной линейной функции, полученной из (7):

$$\bar{R}_k = \frac{R_k}{R_0} = \frac{\cos 2\pi f_0 \tau_k - \frac{T}{T - \tau_k} \alpha_0 \sin 2\pi(f_0 \tau_k - \mu_0)}{1 + \alpha_0 \sin 2\pi \mu_0}. \quad (19)$$

Максимальное значение множителя перед α_0 достигается при максимальном значении переменной $\tau_k = \tau_{N/2} = T/2$ и равно 2. Поэтому, руководствуясь оценкой (16), можно с установленной выше точностью считать, что линейная корреляционная функция практически не подвержена влиянию эффекта просачивания и для гармонического сигнала имеет вид косинусоиды

$$\bar{R}_k = \cos 2\pi f_0 \tau_k, \quad (20)$$

о чем свидетельствуют практически неотличимые визуально результаты моделирования

формул (19) и (20). Ясно теперь, что при делении суммы в (4) на N вместо $N-k$ функция \bar{R}_k будет сильно искажена.

Основной вывод проведенного исследования состоит в том, что единственной корректно определенной корреляционной функцией является линейная функция – в которой сумма произведений отсчетов исходного и запаздывающего сигнала делится на число слагаемых.

Литература

1. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. – М.: “Мир”, 1983, 312 с.
2. Ханян Г.С. Аналитическое исследование и оценка погрешностей в задаче измерения параметров гармонического сигнала методом преобразования Фурье // Измерительная техника. 2003. № 8. С. 3-10.

Поступила: 04.02.10.