УДК 621.01

ПРИМЕНЕНИЕ ВИНТОВОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

© В.А. Глазунов, С.Д. Костерева, П.О. Данилин, А.Б. Ласточкин
Институт машиноведения РАН, Россия, Москва

Аннотация. *В статье с применением теории винтов решается задача определения движений, выводящих механизм параллельной структуры из особых положений, либо переводящих его в соседние особые положения, а также моделируются фрагменты кристаллических структур.*

Ключевые слова: *винтовое исчисление, пространственные механизмы параллельных структур.*

Современная теория механизмов во все большей степени обращается в своей методологии к аппарату теории винтов и винтового исчисления. Родоначальником теории винтов является Р. Болл [1]. Первым применил теорию винтов в теории механизмов Ф.М. Диментберг. Исходным импульсом для этого стала книга Д.Н. Зейлигера [2]. Затем Ф.М. Диментберг обратился к трудам А.П. Котельникова [3]. В дальнейшем он опубликовал ряд работ, посвященных этой тематике [4, 5].

Актуальность применения теории винтов и винтового исчисления постоянно росла с переходом исследователей от рассмотрения одноконтурных механизмов с одной степенью свободы к открытым кинематическим цепям манипуляторов и далее к многоконтурным пространственным манипуляционным механизмам параллельной структуры [6, 7]. Важной задачей, связанной с механизмами параллельной структуры, является определение возможных движений (в общем случае винтовых) выходного звена. Впервые подобную задачу решал Роберт Болл, который в 1876 опубликовал свой трактат по теории винтов (второе издание вышло в 1900 г.[1]).

Для механизмов параллельной структуры. М. Мохаммед и Д. Даффи [6] предложили определять силовые винты, взаимные к ортам осей неприводных кинематических пар соединительных цепей. В дальнейшем этот подход был развит на основе статико-кинематической аналогии [7]. Аппарат замкнутых групп винтов применен для структурного анализа и синтеза пространственных механизмов данного класса [7]. Кинематические цепи этих механизмов должны быть сформированы так, чтобы исключить конечные неуправляемые перемещения.

Более подробно остановимся на некоторых задачах, решаемых на основе теории винтов. Первой задачей будет определение движений, выводящих механизм параллельной структуры из особых положений, либо переводящих его в соседние особые положения. Рассмотрим манипуляционный механизм (Рис.1) с шестью степенями свободы, здесь A_i, B_i – точки базы и выходного звена, $\mathbf{s}_i$ (s_{xi}, s_{yi}, s_{zi}), $\mathbf{r}_i$(r_{xi}, r_{yi}, r_{zi}) – векторы между началом координат и указанными точками (очевидно, что $\mathbf{s}_i$ постоянны).

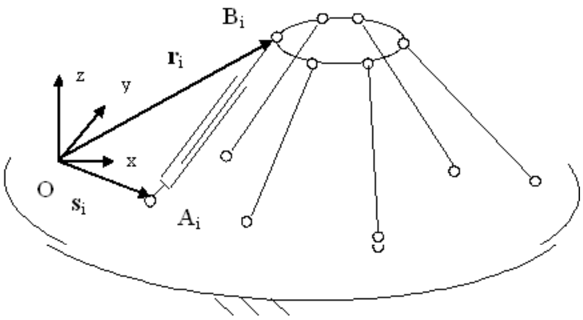

Рис. 1

Силовые винты, действующие на выходное звено, расположены вдоль осей приводов $\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i + \chi \mathbf{e}^o_i$, (i = 1…6), где $\chi^2=0$, $\mathbf{e}_i\ \mathbf{e}^o_i = 0$. Координаты вектора $\mathbf{e}_i$ выражаются через координаты соответствующих точек: $(x_{Bi}–x_{Ai})/f_i$, $(y_{Bi}– y_{Ai})/f_i$, $(z_{Bi} –z_{Ai})/f_i$ где x_{Ai} … z_{Bi} – координаты точек A_i и B_i; f_i – расстояния между ними. Указанное расстояние между соответствующими точками равно

$$f_i = \sqrt{(x_{Bi} - x_{Ai})^2 + (y_{Bi} - y_{Ai})^2 + (z_{Bi} - z_{Ai})^2},$$

моментная часть единичного винта равна $\mathbf{e}^o_i = \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{e}_i$; соответственно $e^o_{xi}=\rho_{yi}e_{zi} - \rho_{zi}e_{yi}$, другие координаты определяются аналогично.

После бесконечно малого перемещения (dr_{xi}, dr_{yi}, dr_{zi}) точки выходного звена B_i имеем:

$$f_i + df_i = \sqrt{(x_{Bi} + dr_{xi} - x_A)^2 + (y_{Bi} + dr_{yi} - y_A)^2 + (z_{Bi} + dr_{zi} - z_A)^2}, \text{ далее}$$

$$f_i^2+2f_idf_i+df_i^2 =(x_{Bi}–x_{Ai})^2+…+(z_{Bi}-z_{Ai})^2+2dr_{xi}(x_{Bi}–x_{Ai})+…$$
$$+2dr_{zi}(z_{Bi}–z_{Ai}) \text{ и}$$

$$df_i = d\mathbf{r}_i\ \mathbf{e}_i\ . \quad (1)$$

Кроме того $e_{xi}+de_{xi}=(x_{Bi}+dr_{xi}-x_{Ai})/(f_i+df_i) =$
$=(x_{Bi}+dr_{xi}-x_{Ai})(l–df_i)/[(l_i+df_i)(1–df_i)].$

Исключая бесконечно малые второго порядка, можо записать:

$$e_{xi}+de_{xi}=(x_{Bi}–x_{Ai})/f_i-(x_{Bi}–x_{Ai})df_i/f_i^2+dr_{xi}/f_i.$$

Таким образом, используя (1), имеем:

$de_{xi}=dr_{xi}/f_i-(x_{Bi}–x_{Ai})df_i/f_i^2=(dr_{xi}-e_{xi}d\mathbf{r}_i\mathbf{e}_i)/f_i$ и, учитывая также de_{yi} и de_{zi}, получаем: $d\mathbf{e}_i= [d\mathbf{r}_i–\mathbf{e}_i(d\mathbf{r}_i\mathbf{e}_i)]/f_i$. Итак, приращение $d\mathbf{e}_i$ зависит только от составляющей вектора $d\mathbf{r}_i$, перпендикулярной к $d\mathbf{e}_i$.

Рассмотрим координаты единичного силового винта $d\mathbf{e}_i$ после бесконечно малого перемещения $d\mathbf{r}_i$ точки B_i (далее опустим индекс i). Вектор $d\mathbf{r}$ определяется через кинематический винт выходного звена: $\mathbf{\Omega}= \boldsymbol{\omega}+ \chi\boldsymbol{\omega}^o$ ($\chi^2=0$), плюккеровы координаты которого: (dl, dm, dn, dl^o, dm^o, dn^o), следующим образом:

$$dr_x=dmr_z–dnr_y+dl^o, \quad dr_y=dnr_x–dlr_z+dm^o, \quad dr_z= dlr_y–dmr_x+dn^o.$$

Координаты приращения $d\mathbf{e}$ соответствующего единичного вектора запишем следующим образом:

$$de_x=1/f\{(dmr_z-dnr_y+dl^o)–[(dmr_z-dnr_y+dl^o)e_x+(dnr_x-dlr_z+dm^o)e_y+(dlr_y-dmr_x+dn^o)e_z]e_x\}…$$

Аналогичные выражения существуют для de_y и de_z.

Рассматривая координаты d**e**^{o} приращения моментной части, имеем:

$de^o_x = s_y de_z - s_z de_y$; $de^o_y = s_z de_x - s_x de_z$; $de^o_z = s_x de_y - s_y de_x$; отсюда
$de^o_x = (s_y\{(dlr_y - dmr_x + dn^o) - [(dmr_z - dnr_y + dl^o)e_x + (dnr_x - dlr_z + dm^o)e_y + (dlr_y - dmr_x + dn^o)e_z]e_z\} - s_z\{(dnr_x - dlr_z + dm^o) - [(dmr_z - dnr_y + dl^o)e_x + (dnr_x - dlr_z + dm^o)e_y + (dlr_y - dmr_x + dn^o)e_z]e_y\})/f\ldots$

Аналогичные соотношения существуют для de^o_y и de^o_z.

Используя полученные уравнения, выражаем de_x, de_y, de_z, de^o_x, de^o_y, de^o_z через dl, dm, dn, dl^o, dm^o, dn^o следующим образом:

$$de_x = \partial e_x/\partial l\,dl + \partial e_x/\partial m\,dm + \partial e_x/\partial n\,dn + \partial e_x/\partial l^o dl^o + \partial e_x/\partial m^o dm^o + \partial e_x/\partial n^o dn^o; \qquad (2)$$

где частные производные зависят от положения механизма.

Рассмотрим определитель det(T) матрицы (T), включающей плюккеровы координаты единичных винтов **E**$_i$, (i=1…6):

$$(T) = \begin{pmatrix} e_{x1}, e_{y1}, e_{z1}, e^o{}_{x1}, e^o{}_{y1}, e^o{}_{z1} \\ ****************** \\ e_{x6}, e_{y6}, e_{z6}, e^o{}_{x6}, e^o{}_{y6}, e^o{}_{z6} \end{pmatrix}.$$

После бесконечно малого перемещения выходного звена определитель указанной матрицы получает приращение, выражаемое с помощью (2):

$$d[\det(T)] = \begin{vmatrix} \partial e_{x1}/\partial l *** e^o{}_{z1} \\ ********** \\ \partial e_{x6}/\partial l *** e^o{}_{z6} \end{vmatrix} dl + \begin{vmatrix} \partial e_{x1}/\partial m *** e^o{}_{z1} \\ ********** \\ \partial e_{x6}/\partial m *** e^o{}_{z6} \end{vmatrix} dm + *** + \begin{vmatrix} e_{x1} *** \partial e^o{}_{z1}/\partial n^o \\ *********** \\ e_{x6} *** \partial e^o{}_{z6}/\partial n^o \end{vmatrix} dn^o.$$

Таким образом, можно получить полный дифференциал от значения определителя:

$$d[\det(T)] = \partial[\det(T)]/\partial l\,dl + \partial[\det(T)]/\partial m\,dm + \ldots + \partial[\det(T)]/\partial n^o dn^o.$$

Данное соотношение позволяет найти кинематический винт-градиент, наиболее быстро выводящий из особых положений, а также кинематические винты, переводящие в соседние особые положения.

Аналогичные соотношения найдены для более сложных механизмов, имеющих параллельную структуру в каждой соединительной кинематической цепи (Рис. 2).

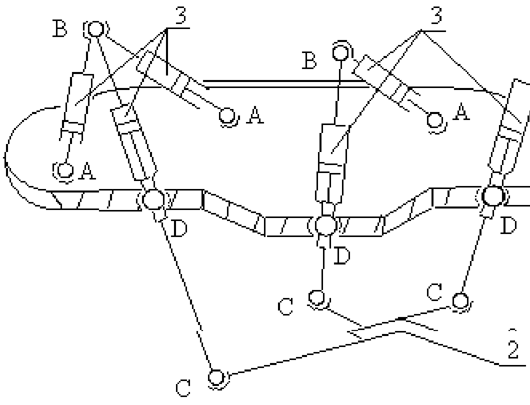

Рис. 2

Обратимся к задаче моделирования фрагментов кристаллических структур. Общий вид фрагмента структуры представлен на Рис.3. Цифрами обозначены атомы углерода в узлах структуры, количество которых равно 21. В недеформированном состоянии длины всех связей составляют 0,527, а углы $109{,}47^0$ (здесь длины даны в относительных единицах). Для перехода к модели механизма на основе данной структуры используем тот факт, что расстояния между атомами и углы между отрезками, соединяющими их, изменяются в гораздо меньшей степени, чем углы относительного поворота атомов вокруг осей указанных отрезков. При этом атомы предстают в качестве звеньев в имитирующем механизме.

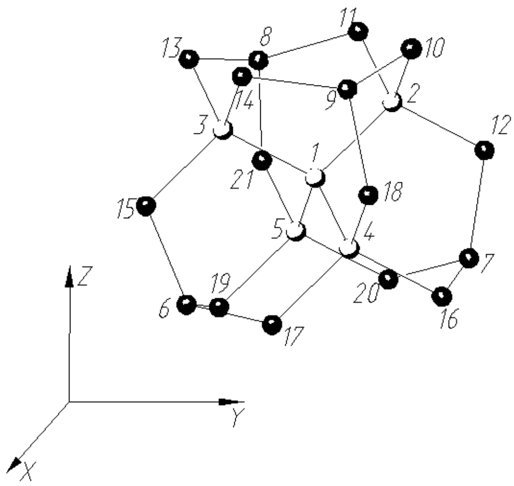

Рис. 3.

Каждое звено имеет параметры: длина звена a_i, перенос вдоль оси пары s_i, угол закрученности (угол между осями пар) α_i. В данном случае длина звена a_i равна нулю. Исходя из этого, получаем модель фрагмента структуры в виде пространственного многоконтурного механизма с вращательными кинематическими парами. Данный механизм состоит из двенадцати замкнутых контуров, соединенных в центральной части механизма. Восемь контуров независимы (в скобках указаны номера звеньев): (1,2,10,9,18,4); (1,2,10,9,14,3); (1,2,12,7,16,4); (1,2,11,8,13,3); (1,3,15,6,17,4); (1,2,12,7,20,5); (1,2,11,8,21,5); (1,3,15,6,19,5).

Число степеней свободы по формуле А. П. Малышева: $W = 6n-5p_5=120-140= -20$, где число подвижных звеньев $n=20$, число кинематических пар пятого класса $p_5=28$. Получаем систему двадцать раз статически неопределимую. Однако вследствие возможного наличия избыточных связей эта система может быть механизмом.

Разделяем рассматриваемую модель на двенадцать контуров, в каждом из которых

В.А. Глазунов, С.Д. Костерева, П.О. Данилин, А.Б. Ласточкин

наличествует одна избыточная связь. При известном элементарном приращении угловой координаты входного звена можно определить приращение координат остальных пяти звеньев. Вначале рассматриваем контур: (1,2,10,9,18,4), он имеет одну степень свободы и соответственно одну избыточную связь. Прибавляя следующий контур (1,2,10,9,14,3), получаем еще три избыточные связи (так как добавлено три кинематические пары и два звена), и в соответствии с этим в систему, связывающую элементарные приращения угловых координат, добавляются три независимых уравнения. Рассуждая подобным образом, убедимся, что в восьми независимых контурах будут присутствовать все двадцать одна избыточные связи. Соответственно система будет содержать двадцать семь независимых уравнений, определяющих элементарные приращения всех угловых координат.

Рассмотрим мгновенные состояния системы, используя принцип статико-кинематической аналогии. Составим винтовые уравнения бесконечно малых перемещений для каждого из восьми контуров входящих в состав механизма. Для первого контура имеем:

$$\vec{E}^{(1)}_{1-2}d\varphi_{1-2}+\vec{E}^{(1)}_{2-10}d\varphi_{2-10}+\vec{E}^{(1)}_{10-9}d\varphi_{10-9}+\vec{E}^{(1)}_{9-18}d\varphi_{9-18}+\vec{E}^{(1)}_{18-4}d\varphi_{18-4}+\vec{E}^{(1)}_{4-1}d\varphi_{4-1}=0,$$

где $\boldsymbol{E_i}$ – единичные винты соответствующих векторов кинематических пар, $d\varphi_i$ – малое относительное угловое перемещение (нижний индекс обозначает направление осей кинематических пар, а верхний - номер контура). Для других контуров уравнения аналогичны.

Записав плюккеровы координаты винтов в неподвижной системе координат OXYZ, выбирая в качестве неподвижного звено 1 и задавая угол поворота в паре 1-2, соединяющей звенья 1 и 2, получим систему уравнений для первого контура:

$$x^{(1)}_{2-10}d\varphi_{2-10}+x^{(1)}_{10-9}d\varphi_{10-9}+x^{(1)}_{9-18}d\varphi_{9-18}+x^{(1)}_{18-4}d\varphi_{18-4}+x^{(1)}_{4-1}d\varphi_{4-1}=-x^{(1)}_{1-2}d\varphi_{1-2}$$

…………………………………………………

$$z^{(1)\,0}_{2-10}d\varphi_{2-10}+z^{(1)\,0}_{10-9}d\varphi_{10-9}+z^{(1)\,0}_{9-18}d\varphi_{9-18}+z^{(1)\,0}_{18-4}d\varphi_{18-4}+z^{(1)\,0}_{4-1}d\varphi_{4-1}=-z^{(1)\,0}_{1-2}d\varphi_{1-2},$$

где $x_i \dots z_i^0$ — плюккеровы координаты винтов. Для других контуров уравнения аналогичны. Коэффициентами системы уравнений являются плюккеровы координаты ортов осей кинематических пар, выраженные следующим образом: проекции векторной части определяем как направляющие косинусы единичных векторов по заданным координатам этих векторов. Моментная часть определяется как векторное произведение радиус-вектора ρ_i центра i-го звена на векторную часть.

Полученные значения коэффициентов данной системы уравнений можно записать в виде матрицы размером 27×48. Если к ней добавить вектор свободных членов, то получим расширенную матрицу размером 28×48. Анализ матрицы показывает, что в каждом контуре существует линейная зависимость между единичными винтами, характеризующими положение осей шарниров. Этот факт соответствует наличию подвижности в механизме.

Для данного механизма можно записать винтовое уравнение, связывающее приращения угловых координат звеньев. Для этого используем систему, коэффициентами которой являются плюккеровы координаты ортов осей кинематических пар. Ранг матрицы M коэффициентов системы уравнений равен пяти, что свидетельствует об избыточной связи в рассматриваемом шестизвеннтке.

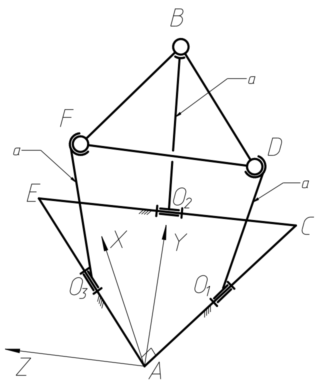

Рис. 4.

Для анализа геометрических условий указанной связи и возможности перемещения шестизвенника рассматриваем два равносторонних треугольника, входящих в его состав. Это приводит к рассмотрению механизма параллельной структуры (Рис. 4), в котором длина звена *a* является переменной величиной, зависящей от угла между осями кинематических пар. Рассмотрим три четырехзвенника ВССВ, входящих в состав указанного механизма параллельной структуры: O_3FBO_1, O_1,B,D,O_2, O_2,D,F,O_3. Для каждого четырехзвенного механизма имеем полином второй степени, выражающий соотношения между входным и выходным углами. Если предположить, что в механизме есть подвижность, то должно выполнятся условие результанта [4, 5]. Это условие приводит к полиному шестнадцатой степени, тождественное равенство нулю коэффициентов которого свидетельствует о наличии избыточной связи и подвижности в механизме. Рассматривая коэффициенты данного полинома как уравнения относительно *a*, получаем, что избыточная связь возможна, если угол между соседними вращательными парами в шестизвеннике равен $109{,}47^0$.

Литература

1. Ball R.S. A Treatise on the Theory of Screws.-Cambridge: Cambridge University Press, 1900, 544p.
2. Зейлигер Д.Н. Комплексная линейчатая геометрия. М.: Гостехиздат , 1934, 196 с.
3. Котельников А.П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895, 216 с.
4. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978, 327 с.
5. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1982, 336 с.
6. Mohammed M., Duffy J. A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators. / ASME J. Mech., Trans., Autom. Des., 1985, V. 107(2): p. 226-229.
7. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: Наука, 1991, 96 с.

Поступила: 12.03.10.