УДК 531.8

К АНАЛИЗУ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ПРИ УДАРЕ В СИСТЕМАХ С ИДЕАЛЬНЫМИ И НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

© Е.З.Шнеерсон

Санкт-Петербургский гидрометеорологический университет, Россия, Санкт-Петербург

Аннотация. *Рассматриваются особенности системы, подвергающиеся ударным нагрузкам. Системы делятся на три группы. В первом случае к системе в некоторый момент времени прикладываются* задаваемые *ударные импульсы. Во второй группе ударные явления возникают в результате внезапного наложения на систему* удерживающих *связей, называемых в этом случае* импульсивными *и сохраняющихся после соударения. В третьей группе, соударение входящих в систему твердых тел происходит при «замыкании»* односторонней *связи с последующим отскоком. Особый интерес представляют ситуации, когда некоторые из наложенных связей (и импульсивных, и конечных, и односторонних) являются неидеальными.*

Материальные системы, подвергающиеся ударным нагрузкам, можно разделить на три группы. В первом случае к системе в некоторый момент времени прикладываются *задаваемые* ударные импульсы. Во второй группе ударные явления возникают в результате внезапного наложения на систему *удерживающих* связей, называемых в этом случае *импульсивными* и сохраняющихся после соударения. Наконец, в третьей группе, соударение входящих в систему твердых тел происходит при «замыкании» *односторонней* связи с последующим отскоком. Будем полагать, что три указанных варианта ударного взаимодействия не реализуются одновременно, что позволяет исследовать каждый случай отдельно (здесь рассмотрены только два первых варианта). Отметим, что при любом варианте соударения движение системы может быть ограничено дополнительными *конечными* (не импульсивными) связями, что соответствует концепции стесненного удара [1, 2]. При наличии основного ударного воздействия в этих связях возникают импульсные реакции. Особый интерес представляют ситуации, когда некоторые из наложенных связей (и импульсивных, и конечных, и односторонних) являются неидеальными.

Будем использовать обозначения $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{F}_T$ для *импульсов* нормальных и касательных ударных сил реакций конечных и импульсивных связей. Обозначение S введем для задаваемых ударных импульсов, а также для импульса реакции при одностороннем соударении.

Исследуем изменение кинетической энергии системы для различных вариантов удара. Известны несколько теорем об энергии при ударе, доказанных при условии, что связи, наложенные на систему, идеальны [4]. Рассмотрим некоторые из указанных теорем, используя для наглядности сравнительно простые динамические модели. Это позволяет обобщить известные закономерности, отказываясь от гипотезы идеальных связей.

На рис.1*а* показан ползун массы m **,** обладающий одной степенью свободы, поскольку его вертикальное перемещение ограничено конечной удерживающей связью *(идеальной).* К центру тяжести тела C приложен внешний заданный мгновенный импульс S. Очевидно, что данный случай соответствует **первой группе задач** из приведенной выше классификации. Изменение кинетической энергии в таких системах на основании первой из шести классических теорем определяется следующим скалярным произведением [4]

$$\Delta W = W^{+} - W^{-} = 0{,}5\mathrm{S}\,(\mathbf{v}^{+} + \mathbf{v}^{-}), \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{W}^{-}$, $\boldsymbol{W}^{+}$- значения кинетической энергии перед приложением импульса и после него; $\mathbf{v}^{-}$, $\mathbf{v}^{+}$ - векторы доударной и послеударной скоростей. Естественно, что импульс реакции идеальной связи $\boldsymbol{P}$ не влияет на изменение энергии, поскольку он ортогонален скорости.

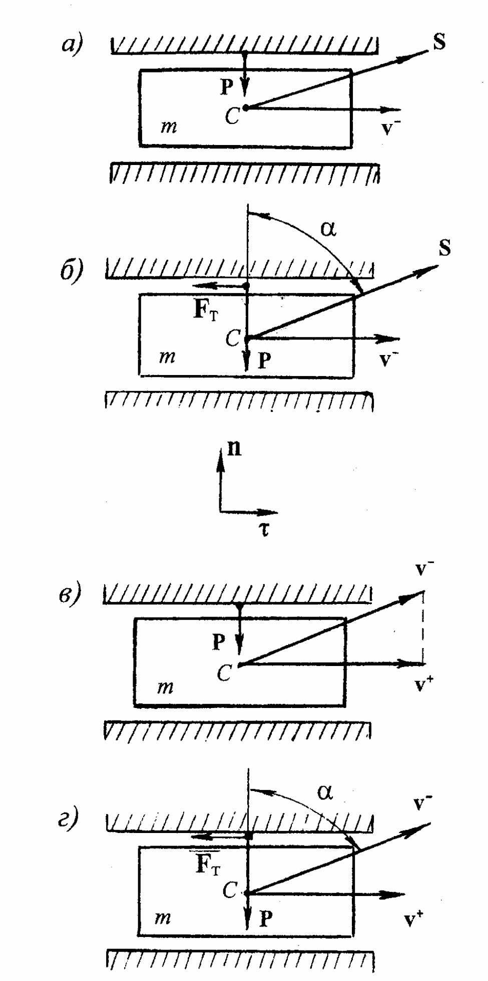

Рис. 1

Усложним задачу и будем трактовать конечную связь как *неидеальную* (рис. 1,б). Угол $\boldsymbol{\alpha}$, отсчитываемый от нормали к ограничивающей поверхности $\boldsymbol{n}$, принимается положительным при направлении вектора $\boldsymbol{S}$, показанном на рисунке. Совмещая направления вектора $\mathbf{v}^{-}$ и орта касательной $\boldsymbol{\tau}$, будем полагать, что $v_{\tau}^{-} = v^{-}$. При этом исключается случай $v_{\tau}^{-} \leq 0$, что не нарушает общности исследования. Импульс силы трения F_T можно отнести к заданным силовым факторам только условно, поскольку он зависит от характера движения тела, который, вообще говоря, меняется в процессе взаимодействия. При этом для соотношения нормальной и касательной проекций импульса реакции связи будем использовать гипотезу Рауса с коэффициентом трения f. Нетрудно убедиться, что условие *сохранения исходного направления движения* после окончания действия импульса имеет вид

$$m\,v^{-} + S_n(\operatorname{tg}\alpha - f\,\operatorname{sign} S_n) > 0. \qquad (2)$$

Полагая при этом условии импульс F_T известным и используя выражение (1), получаем формулу для изменения кинетической энергии в виде

$$\Delta W = W^{+} - W^{-} = 0{,}5\left[\ \mathbf{S}\bullet(\mathbf{v}^{+}+\mathbf{v}^{-}) - f\,|\,S_n\,|(\mathbf{v}^{+}+\mathbf{v}^{-})\right]. \qquad (3)$$

Условие прекращения скольжения в процессе взаимодействия выражается нарушением неравенства (2). При этом нормальная проекция $S_n^{(1)}$ заданного импульса, потребного для прекращения скольжения, определяется зависимостью

$$S_n^{(1)} = mv^{-} \Big/ \left(f sign S_n - tg\alpha\right) \qquad (4)$$

и соответствует первому этапу взаимодействия. Величина $S_n^{(1)}$ конечна, так как при нарушении условия (2) знаменатель в равенстве (4) отличен от нуля. Очевидно, что в дальнейшем скольжение либо отсутствует до окончания действия импульса ***S***, либо меняет свое направление на противоположное. По аналогии с выражением (2), ползун из состояния покоя «срывается» в противоположном направлении, если реализуется неравенство

$$S_n^{(2)}\left(tg\alpha + f sign S_n\right) < 0, \qquad (5)$$

где $S_n^{(2)} = (S_n - S_n^{(1)})$ - нормальная проекция «остаточного» заданного импульса, действующего на заключительном этапе взаимодействия.

Пусть условия (2) и (4) не выполняются. Тогда реализуется режим с *прекращением скольжения,* и энергетическое соотношение записывается в виде

$$\Delta W = W^{+} - W^{-} = 0{,}5[\mathbf{S}^{(1)}\,\mathbf{v}^{-} - f|\,S_n^{(1)}\,|\,\mathbf{v}^{-}]. \qquad (6)$$

Пусть теперь неравенство (2) нарушается, а (5) выполняется. Указанное может осуществляться только при значениях $-\pi < \alpha < 0$. Рассматриваемый случай соответствует режиму с *изменением направления скольжения.* Нетрудно убедиться, что при этом энергетическое соотношение записывается в следующей форме

$$\Delta W = W^{+} - W^{-} = 0{,}5[\mathbf{S}^{(1)}\,\mathbf{v}^{-} + \mathbf{S}^{(2)}\,\mathbf{v}^{+} - f|\,S_n^{(1)}\,|\,\mathbf{v}^{-} + f(|\,S_n^{(2)}\,|\,\mathbf{v}^{+})]. \qquad (7)$$

Заметим, что при $S_n = 0$ ($\alpha = \pm\,\pi/2$), когда связь не напряжена и не проявляется свойство ее неидеальности, неравенства (2) и (5) оказываются некорректными. В этом случае следует осуществить в них замены $S_n\, tg\alpha \to S_\tau$ и $S_n^{(2)}\, tg\alpha \to S_\tau^{(2)}$.

Отметим, что для задач первой группы приращение энергии ΔW может иметь любой знак - в зависимости от направлений доударной скорости и задаваемого импульса. В рассматриваемых ниже задачах энергия при ударе всегда рассеивается, поэтому удобно использовать величину $(-\Delta W)>0$.

Динамическая модель, показанная на рис. *1 в,г,* соответствует **второй группе,** т.е. системам, в которых удар является следствием мгновенного наложения связей. На тело, совершавшее плоское поступательное движение, накладывается импульсивная удерживающая связь, ограничивающая вертикальное перемещение и уменьшающая число степеней свободы до одной. Если связь *идеальна* (рис. *1 в*), то потерянная при соударении энергия определяется теоремой Карно [3,4]

$$(-\Delta W) = W^{+} - W^{-} = W^{*}, \qquad (8)$$

где $W^* = 0{,}5m\ (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-)^2$ - кинетическая энергия «потерянных» скоростей.

В схеме на рис.*1г* импульсивная связь трактуется уже как *неидеальная,* что требует дополнительного исследования. Примем, что угол между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\mathbf{v}^-$, отсчитываемый от $\boldsymbol{n}$ в положительном направлении по часовой стрелке, удовлетворяет неравенству $0< \alpha <\pi$. Нетрудно убедиться, что *исходное скольжение сохраняется* до окончания соударения при условии

$$\mathrm{v}_n^-(\mathrm{tg}\,\alpha - f\mathrm{sign}\,\mathrm{v}_n^-) > 0. \qquad (9)$$

Отметим, что в особом случае при $\mathrm{v}_n^- = 0$ в неравенстве (9) следует осуществить замену

$$\mathrm{v}_n^-\mathrm{tg}\,\alpha \to \mathrm{v}_\tau^- \qquad (10)$$

Очевидно, что в этом случае скольжение всегда сохраняется при любом значении коэффициента трения.

Уравнение импульсивного движения имеет вид:

$$\mathrm{v}^+ + \mathrm{v}_\tau^- = -f\,\mathrm{v}_n^-\,\mathrm{sign}\,\mathrm{v}_n^-, \qquad (11)$$

где учтено, что $\mathbf{v}_n^+ = 0$ и $\mathbf{v}_\tau^+ = \mathbf{v}^+$.

Используя уравнение (11), получим выражение для потерянной энергии при условии сохранения скольжения

$$(-\Delta W) = W^- - W^+ = W^* - fm(\mathrm{v}_n^-)^2[f - (\mathrm{tg}\alpha)\mathrm{sign}\,\mathrm{v}_n^-]. \qquad (12)$$

Выражение (12) можно трактовать как *обобщение теоремы Карно* применительно к рассматриваемой динамической модели на случай неидеальной импульсивной связи. Естественно, что при $f = 0$ это выражение совпадает с (8). Аналогичный результат с учетом (10) получается при $\mathrm{v}_n^- = 0$, поскольку при этом неидеальность связи не проявляется, причем $W^* = 0$.

Если неравенство (9) не выполняется, то процесс соударения разделяется на два интервала, причем на втором интервале *скольжение отсутствует* ($\mathbf{v}^+ = 0$). В этом случае выражение для кинетической энергии «потерянных» скоростей приобретает вид $W^* = 0{,}5m\ (\mathbf{v}^-)^2$. Следовательно, для потерянной при соударении энергии справедливо классическое соотношение Карно (8).

Литература

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
2. *Вейц В.Л., Шнеерсон Е.З. и др.* Нелинейные задачи динамики и прочности машин. - Л.: ЛГУ, 1983.-336 с.
3. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики. Т. 2. - М. Наука, 1983.-640 с.
4. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. - М.: Наука, 1971. - 636 с.

Поступила: 27.01.10.