

УДК 621.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ С ВЯЗКОУПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

© Ю.В. Суворова, С.И. Алексеева, А.В. Мосин

Институт машиноведения РАН, Россия, Москва

Аннотация. Результаты работы показывают, что одно и то же уравнение нелинейно-наследственного типа с одним и тем же набором параметров может быть использовано для описания различных режимов нагружения. Необходимость в применении такого типа уравнения часто возникает в инженерной практике расчетов конструкций, подверженных немонокотному нагружению. Модель позволяет описать переход из одного состояния в другое и учесть влияние предыдущих состояний на окончательное поведение конструкции. Могут быть рассчитаны также циклическое нагружение и усталость.

Данный подход может быть применен к любым материалам с вязкоупругими характеристиками: к полимерам, композитам и металлам при высокой температуре.

Хорошо известно, что некоторые композиты с полимерной матрицей и чистые полимеры обладают вязкоупругими характеристиками, иногда даже при пониженной температуре. Определяющие уравнения таких материалов должны включать не только напряжения и деформации, но также и время. Простейшие модели – это обыкновенные дифференциальные уравнения, включающие скорость деформации и содержащие три-четыре члена. Более общие и более сложные модели – это интегральные соотношения с бесконечным числом членов (например, в [1] можно найти соответствующую библиографию).

В 1876 г. Больцманом [2] была сформулирована теория упругого последействия, которая в течение длительного времени не использовалась. В начале 20-го века итальянский математик Вольтерра [3,4] получил такие же результаты и назвал принцип построения модели принципом наследственности. Широкое приложение принцип наследственности получил, только начиная с 60-х годов 20-го века. Работы Вольтерра связаны, в основном, с линейными интегральными уравнениями. Однако для расчетов элементов конструкций часто приходится учитывать нелинейность. Очень удобное обобщение линейной теории наследственности на нелинейный случай предложено Работновым [1]

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1)$$

Здесь $\sigma = \varphi[\varepsilon(t)]$ – уравнение кривой мгновенного деформирования, которое получается, если в (1) положить $t = 0$, т.е. процесс нагружения происходит мгновенно. При $t > 0$ наблюдается постепенное «сползание» с этой кривой вниз.

Очень важным вопросом является выбор ядра интегрального уравнения (1). Оказалось, что введение нелинейности позволяет во многих случаях упростить ядро. Точность расчетов может быть скорректирована соответствующим выбором $\varphi(\varepsilon)$ [5]. В настоящей работе рассмотрим простейшее ядро Абеля

$$K(t-\tau) = \frac{k}{(t-\tau)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

Это ядро содержит только два параметра.

Для некоторых типов нагружения, например, $\sigma = \text{const}$ или $\dot{\sigma} = \text{const}$ уравнение (1) с учетом (2) может быть приведено к алгебраическому выражению. Это существенно для инженерной практики. Преимущество подхода, использующего (1), состоит в том, что длительное поведение материала может быть предсказано с помощью набора параметров, определенных из кратковременных лабораторных опытов.

1. Методика определения параметров определяющего уравнения

Соотношение (1) с (2) содержит два параметра ядра и уравнение мгновенной кривой. Для определения параметров необходимы опытные данные, осуществленные, например (как в данной работе), по режиму $\dot{\sigma} = \text{const}$, позволяющему преобразовать соотношение (1) в алгебраическое

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma \left(1 + \frac{k}{(1-\alpha)(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \right) \quad (3)$$

Имея в распоряжении диаграммы деформирования, полученные с тремя различными скоростями и зафиксировав некоторое значение ε , получим систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Полученную систему из трех уравнений

$\varphi(\varepsilon) = \sigma_i (1 + \xi t_i^{1-\alpha})$, где $\xi = \frac{k}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$, можно разрешить относительно α , ξ и $\varphi(\varepsilon)$, причем

$$\xi = \frac{\sigma_2 t_2^{1-\alpha} - \sigma_1 t_1^{1-\alpha}}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

а значение α находится как корень трансцендентного уравнения

$$\sigma_1(\sigma_2 - \sigma_3)t_1^{1-\alpha} + \sigma_2(\sigma_3 - \sigma_1)t_2^{1-\alpha} + \sigma_3(\sigma_1 - \sigma_2)t_3^{1-\alpha} = 0$$

Существует ряд интегрированных математических пакетов, которые можно настроить на решение этой задачи. Однако их использование для решения столь узкой задачи предполагается нецелесообразным, поскольку предоставляет ряд неудобств людям, незнакомым с интерфейсом данных математических пакетов и особенностями работы их алгоритмов.

В то же время выбор в качестве алгоритмической среды универсального языка программирования позволяет написать компактную программу, предоставляющую достаточно простой и понятный интерфейс для решения данной задачи. Кроме того, возможности данной программы могут быть относительно легко и практически неограниченно расширены. В настоящей работе в качестве языка программирования был выбран язык Visual C++, средой разработки стал пакет Microsoft Visual Studio 6.0, а базовой операционной системой, соответственно, Microsoft Windows 95 и более поздние версии. Подробное описание программы можно найти в [6]. Следует подчеркнуть, что процедура определения параметров может быть осуществлена не только с помощью диаграмм деформирования, но также с помощью кривых ползучести (перестроенных в изохронные кривые) и с помощью данных по релаксации.

2. Описание экспериментальных результатов

Ниже приведены результаты экспериментов на материале РОМ (полиоксиметилен) при различных скоростях нагружения, при ползучести и релаксации.

2.1. Растяжение с постоянной скоростью

Осуществлены эксперименты с тремя скоростями $\dot{\varepsilon} = 0.0038; 0.038$ и 1.1 1/сек (Рис.1).

Параметры определялись по описанной в разделе 1 методике: $\alpha = 0.913$, $k = 0.025 \text{ сек}^{-(1-\alpha)}$, кривая $\varphi(\varepsilon)$ – кривая 4. Приведены кривые $\sigma \sim \varepsilon$ с использованием определенных параметров: эксперимент (сплошные линии) и расчет (штрих).

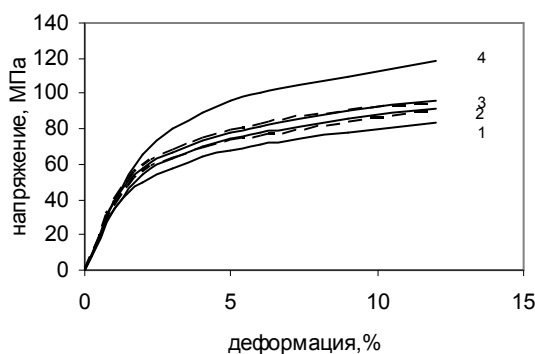


Рис.1

2.2. Ползучесть

Эксперименты на ползучесть проводились при трех уровнях $\sigma_* = 74$ (Рис.2), 70 (1) и 66 (2) МПа (Рис.3); сплошные линии – эксперимент, штрих - расчет. Сначала материал нагружался с постоянной скоростью $\dot{\sigma} = 0.8 \text{ МПа/сек}$ вплоть до σ_* :

$$\begin{aligned} \sigma &= \dot{\sigma} t, & 0 \leq \sigma \leq \sigma_*, & & 0 \leq t \leq t_* \\ \sigma &= \sigma_*, & \sigma_* = \text{const}, & & t_* \leq t. \end{aligned}$$

Поскольку имеются два режима нагружения, уравнение (1) может быть записано

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma_* + \int_0^{t_*} \frac{k}{(t-\tau)^\alpha} \dot{\sigma} \tau d\tau + \int_{t_*}^t \frac{k}{(t-\tau)^\alpha} \sigma_* d\tau \quad (4)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma_* + \frac{k\sigma_*}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left[t^{1-\alpha} + (1-\alpha)(t-t_*)^{1-\alpha} \left(1 - \frac{t_*}{t} \right) \right] \quad (5)$$

Первая часть нагружения составляла 92 сек и ясно видна на Рис.2.

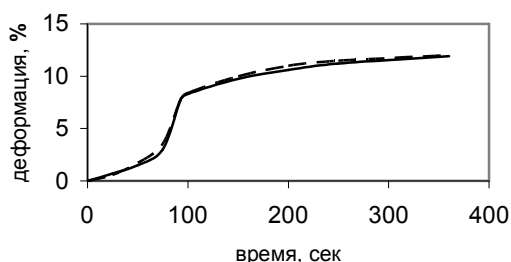


Рис.2

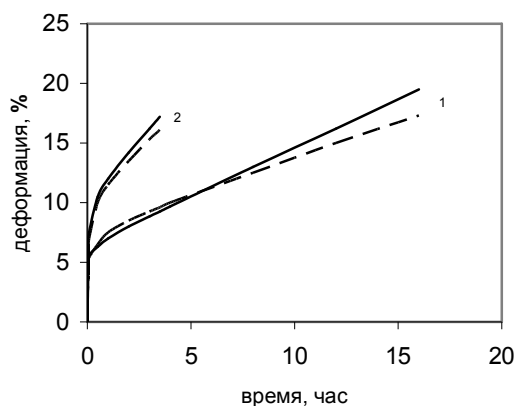


Рис.3

Для длительного нагружения, когда $t_* \leq t$, уравнения (4) и (5) могут быть переписаны в виде:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma_* + \int_0^t \frac{k}{(t-\tau)^\alpha} \sigma_* d\tau, \quad \varphi(\varepsilon) = \sigma_* \left(1 + \frac{k}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right) \quad (6)$$

Рис.3 показывает, что для времен нагружения, составляющем несколько часов, начальный участок нагружения, составляющий полторы минуты, не оказывает влияния на конечные результаты. Это является следствием затухающей памяти принципа наследственности.

2.3. Релаксация напряжений

Эксперименты на релаксацию были проведены при трех уровнях ε_* : 3, 6 и 9%, Рис.4 (сплошные линии – эксперимент, штрих - расчет). В интервале $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$ образцы нагружались с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon} = 0.0004$ 1/сек. Рассматриваемый процесс, так же, как и в разделе 2.2, распадается на два:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = \text{const}, & \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*, & \quad 0 \leq t \leq t_*, \\ \varepsilon = \text{const}, & \quad \varepsilon = \varepsilon_*, & \quad t_* < t. \end{aligned}$$

Уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \frac{k\sigma}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left\{ t^{1-\alpha} - (t-t_*)^{1-\alpha} \left[1 + \frac{t_*}{t} (1-\alpha) \right] \right\} + \int_{t_*}^t \frac{k}{(t-\tau)^\alpha} \sigma(\tau) d\tau \quad (7)$$

Для процесса релаксации интересно поведение материала при достаточно больших временах $t_* \ll t$. В этом случае

$$\varphi(\varepsilon) = \int_0^t \frac{k}{(t-\tau)^\alpha} \sigma(\tau) d\tau,$$

или

$$\varphi(\varepsilon) = (1 + K^*)\sigma \quad (8)$$

Принимая во внимание, что при релаксации $\varepsilon = \text{const}$ и значение $\varphi(\varepsilon)$ имеет фиксированное значение, уравнение (8) может быть обращено [1]:

$$\sigma = \frac{\varphi(\varepsilon)}{1 + K^*} = \varphi(\varepsilon)(1 - K^* + K^{*2} - K^{*3} + \dots).$$

Поскольку $K(t-\tau) = k/(t-\tau)^\alpha$, получаем

$$\sigma = \varphi(\varepsilon) \left[1 - \beta \int_0^t \varepsilon_\alpha(-\beta, t-\tau) d\tau \right], \quad (9)$$

где $\beta = \frac{k}{1-\alpha}$, $\varepsilon_\alpha(-\beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma[(1-\alpha)(n+1)]}$. Здесь $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция. Выражение

(9) может быть рассчитано с помощью таблиц ε_α -функций [7].

На Рис.4 приведены результаты экспериментов и расчеты, осуществленные по уравнению (9).

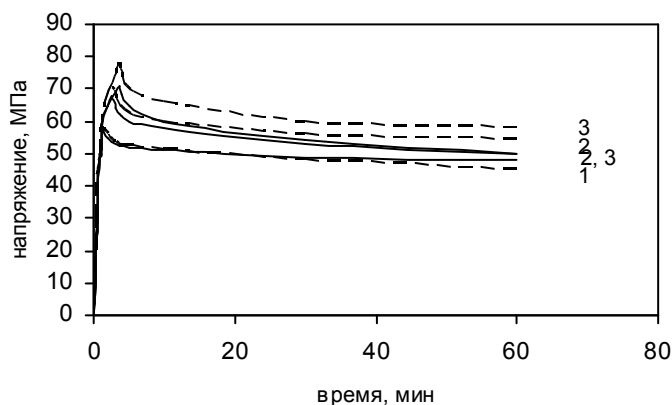


Рис. 4

Заключение

Результаты работ показывают, что одно и то же уравнение нелинейно-наследственного типа с одним и тем же набором параметров может быть использовано для описания различных режимов нагружения. Необходимость в применении такого типа уравнения часто возникает в инженерной практике расчетов конструкций, подверженных немонотонному нагружению. Модель позволяет описать переход из одного состояния в другое и учесть влияние предыдущих состояний на окончательное поведение конструкции. Могут быть рассчитаны также циклическое нагружение и усталость.

Данный подход может быть применен к любым материалам с вязкоупругими характеристиками: к полимерам, композитам и металлам при высокой температуре.

Литература

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. 1966. 752 с.
2. Boltzmann L. Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. Ann. Phys. und Chemie, Erg. Bd. 7. 1876.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука. 1976. 288 с.
4. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1982. 304 с.
5. Осокин А.Е., Суворова Ю.В. Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров//ПММ. 1978. Т.42. Вып.6. С.1107-1114.
6. Мосин А.В. Моделирование деформационного поведения вязкоупругих материалов для расчета деталей конструкций. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. М., 2007.
7. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Звонов Е.Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М.: Наука. 1969. 132 с.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект 07-01-00277а).

Поступила: 25.0110.