

УДК 534.1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ЧЕРЕЗ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДВИЖЕНИЯ «ИМПУЛЬС – ФАЗА» (часть I)

© В.Л. Крупенин

Аннотация. Дан обзор результатов исследования периодических виброударных систем различной природы и структуры посредством методов частотно-временного анализа [1-5]. Показано, что определяющими факторами, описывающими виброударные процессы, оказываются параметры так или иначе, связанные с физическими параметрами движения - здесь импульсами ударов и их моментами, отсчитываемыми от некоторого начала измерения времени (фазы удара). При этом указанные параметры могут иметь весьма сложную структуру, определяемую физическими и геометрическими факторами, а также внутренним строением соударяющихся подсистем.

Ключевые слова: виброударные процессы, многопараметрические представления, импульсы и фазы ударов, периодические функции Грина.

1. Представления виброударных процессов через параметры «импульс-фаза» и их расширения и аналоги диктуются физикой виброударных систем: параметры эти весьма естественны для колебательных процессов, сопровождаемых ударами. И эти параметры оказываются столь же естественными при проведении расчетов виброударных систем методами частотно-временного анализа, базирующимися на переходе к интегральным уравнениям периодических колебаний и записи искомых режимов через периодические функции Грина (ПФГ) соответствующих линейных («безударных») задач. Указанные методы были предложены В.И. Бабицким и М.З. Коловским [6].

2. Рассмотрим систему, состоящую из двух стационарных склерономных линейных упруго-вязких систем с полной диссипацией, обозначаемых далее A_0 и A_N (рис.1), где эти системы выделены овалом и вначале предполагается, что другие подсистемы, показанные на рис. 1, «заморожены». Каждой из систем отвечает поле перемещений $u_r(x_r, t) \in R^3$, причем векторы $x_r \in X_r \subset R^3$ - суть векторные координаты точек систем A_r ; $t \in R$; $r=0$ или N (сейчас, в «замороженном» виде индекс r может пробегать только два значения.)

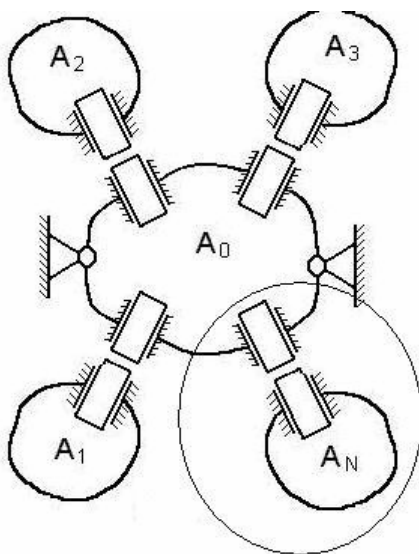


Рис. 1

Динамика всех членов составной (размороженной) системы $A=\{A_0, A_I; A_N\}$ определяется системами матричных операторов динамической податливости [1, 4] $L^{(r)}(y_r, x_r; p)$, где p – оператор дифференцирования; операторы имеют размерность [3x3] и ставят в соответствие силовым, вообще говоря, нелинейным и нестационарным полям $f_r(x_r, t; p; u_r)$ [$x_r \in X_r$] поля перемещений [1, 2, 4]

$$u_r(x_r, t) = L^{(r)}(y_r, x_r; p) f_r(y_r, t; p; u_r). \quad (1)$$

Пусть при $x_r = x_{r0}$ в каждой из систем A_r сосредоточено по одному включению, содержащему точечные тела с массами m_{r0} .

Вернемся к «замороженному» случаю, введем относительную координату

$$u_r(t) = u_0(x_{0r}, t) - u_N(x_{Nr}, t) \quad (2)$$

и обозначим $\Phi[u_r(t), \dot{u}_r(t)]$ силу удара, полагая вначале, что удары происходят вдоль какой-либо оси. Удары предполагаются прямыми и центральными, отвечающими, гипотезе Ньютона. Кроме того сейчас не предполагается изменение индекса r . Таким образом, если, например, удар происходит при $t = t_{\alpha}$, то в соответствии с [1, 2] можно записать

$$\Phi[u_r(t), \dot{u}_r(t)]|_{t=t_{\alpha}} = J_{\alpha r} \delta(t - t_{\alpha}); u_r(t_{\alpha}) = \Delta_r; J_{\alpha r} = (1 + R_r) m_r \dot{u}_r(t_{\alpha} - 0) \geq 0, \quad (3)$$

где $\Delta_r \geq 0$ – величины установочных зазоров или (при $\Delta_r < 0$ – натягов); $J_{\alpha r}$ – ударный импульс во время α -го удара, произошедшего в момент времени t_{α} ; R_r и $m_r = m_{0r} m_{Nr}$ ($m_{0r} + m_{Nr}$) – коэффициент восстановления и приведенная масса; $\delta(t)$ – δ -функция Дирака.

Пусть теперь в формуле (1) $f_r(y_r, t; p; u_r) = U_{r0}(t) + \Phi_r[u_r(t), \dot{u}_r(t)]$, где $U_{r0}(t)$ – T -периодическая внешняя сила.

Формализм методов частотно-временного анализа [1, 2, 4] для T -периодических виброударных процессов с одним ударом за период движения приводит к так называемому двухпараметрическому представлению для искомой относительной координаты

$$u_r(t) = u_{r0}(t) - J_r \chi_r(t - \phi_r), \quad (4)$$

где $u_{r0}(t)$ – решение задачи в пренебрежении ударами (решение линейной задачи); J_r и ϕ_r – искомые параметры – импульс и фаза удара. ПФГ $\chi_r(t)$ – реакция линейной системы на силовое воздействие, описываемое T -периодической последовательностью δ -функций Дирака $\delta^T(t)$ [1, 2]. Существует два популярных равносильных представления обобщенной периодической функции $\delta^T(t)$. Первое отвечает бесконечному повторению «одиночных» δ -функций, второе – обобщенному ряду Фурье:

$$\delta^T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = T^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp(iq\omega t), \quad (5)$$

Причем равенства понимаются в обобщенном смысле [1, 2]. В то же время периодические функции Грина, отвечающие оператору динамической податливости $L^{(r)}(y_r, x_r; p)$, определяются так [1, 2]:

$$\chi_r(t) = T^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} L^{(r)}[y_r, x_r; (iq\omega t)] \exp(iq\omega t). \quad (6)$$

В случае матричного оператора динамической податливости определение (6) вводится покомпонентно [1, 2].

Отметим, что в теории виброударных систем весьма распространены системы с поочередными соударениями о каждый из двух симметрично установленных ограничителей.

В этом случае анализ часто осуществляется с помощью симметричных ПФГ

$$\chi_r^*(t) = T^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} L^{(r)} \{y_r, x_r; [i(2q+1)\omega t]\} \exp(iq\omega t). \quad (7)$$

Ниже эти задачи специально почти рассматриваться не будут, так как весь формализм методов частотно-временного анализа сохраняется [1, 2, 4]. Точно также методы частотно-временного анализа успешно применяются и при анализе комбинационных режимов периода $T_1 = nm^{-1}T$.

Возвращаясь к двухпараметрическому представлению (4), заметим, что для искомой относительной координаты и параметров движения должны действовать условия:

$$u_r(t) \leq \Delta_r; t \in [0, T]; J = 2m_r(1+R) |\dot{u}_r(\varphi_r - 0)| \geq 0; u_r(\varphi) = \Delta_r \quad (8)$$

Третье и четвертое соотношения здесь дают два уравнения для определения импульса и фазы удара. Изложенное и представляет собой реализацию методов частотно-временного анализа для систем с одной ударной парой. Подчеркнем, что приведенные соотношения нетривиальны, так как нетривиальной может оказаться структура взаимодействующих систем. В ряде случаев проведение расчетов другими методами проблематично.

Первое условие (8), вообще говоря, проверяется только численно. Однако для случаев нелинейного резонанса, они, как правило, выполняются [1, 2]. Решения (4), (8) должны еще анализироваться на устойчивость. При выполнении инженерных расчетов удобно пользоваться так называемым энергетическим условием неустойчивости, позволяющим выделить заведомо неустойчивые режимы [1-5].

3. В приложениях наибольший интерес представляют режимы с одним ударом за период движения. Однако, в некоторых случаях за время периода движения происходит несколько соударений. Явление, заключающееся в появлении повторных (обычно затухающих соударений) называется дребезгом [1, 2]. В этом случае вместо определяющего представления (4) имеет место 2ν -параметрическое представление режима с дребезгом:

$$u_r(t) = u_{r0}(t) - \sum_{j=1}^{\nu} J_{vr} \chi_{vr}(t - \phi_{vr}), \quad (9)$$

при этом вид условий удара не изменяется, увеличивается лишь число соотношений типа (8).

4. «Разморозим» систему, приведенную на рис. 1. То есть рассмотрим полную систему, содержащую $2n$ ударных пар, образованных и семейством $A = \{A_0; A_1, \dots, A_n\}$. Таким образом, в определяющих соотношениях предыдущих пунктов индекс $r = 1, 2, \dots, n$. Условий удара (8), выписываемых для относительных координат $u_r(t)$, становится $2n-2$ и также подлежат индексации параметры системы m_r, R_r, Δ_r .

Учитывая сказанное, и переходя в (6) к скалярным величинам получаем, внося (8) в (6) следующее представление для семейства T -периодических виброударных процессов при $r = 1, \dots, N$:

$$u_r(t) = f_{r0}(t) - J_r \chi_{0r}(t - t_r) - \sum J_k \chi(x_{0r}, x_{0i}; t - t_k), \quad (10)$$

где суммирование производится при $k \neq r$. ПФГ χ_{0r} определяется локальными операторами динамической податливости, приведенными к точкам ударного взаимодействия; $\chi(x_{0r}, x_{0i}; t)$ определяются проходными операторами, взаимодействующих систем, приведенных к точкам взаимодействия [1, 2, 4].

Представление (10) описывает важнейший в приложениях случай одного удара, приходящегося на один период внешнего воздействия [1, 2]. Сохраняя единообразное наименование с другими аналогичными представлениями, получаемых при посредстве методов частотно-временного анализа, будем называть его $2n$ -параметрическим [3, 4, 9]. Здесь искомые n относительных перемещений $u_r(t)$ ($r = 1, \dots, n$) определяются при посредстве

$2n$ параметров движения – n импульсов J_r и n фазами ударов t_r в каждой из n ударных пар.

Вспользуемся вторым и третьим условиями удара (8). Серия «третьих» условий (8) даст n линейных алгебраических уравнений, связывающих неизвестные величины J_r и t_r :

$$\Delta_r = U_{r0}(t_r) - J_r \chi_{0r}(0) - \sum J_k \chi(x_{0r}, x_{0k}; t_r - t_k) \quad (r=1, \dots, n). \quad (11)$$

Серия «вторых» условий (8) даст n нелинейных алгебраических уравнений, связывающих те же величины :

$$J_r [(1 + R_r) m_r]^{-1} = \dot{f}_{r0}(t) - J_r \dot{\chi}_{0r}(t - t_r - 0) - \sum J_k \chi(x_{0r}, x_{0k}; t - t_k - 0); \quad (12)$$

в формулах (11) и (12) суммирование при $k \neq r$ не ведется. Решения системы (10), (11) – пары (J_r^0, t_r^0) числом кратным n , могут определить n представлений (9), определяющих изменение каждой из n относительных координат $u_r(t)$ при условии, что за один период возбуждающего воздействия в каждой из ударных пар происходит ровно одно соударение. Пользуясь общими схемами методов частотно-временного анализа [1, 2], аналогичные соотношения можно получить и в случае симметричных ударных пар или более сложных комбинированных случаев присутствия в системе ударных пар обоих типов. Точно также аналогичные соотношения можно получить и для случаев, когда в системе дребезг (см. п.3).

5. Теория виброударных систем [1 – 3], изучающая динамические эффекты, как правило, в качестве базовых механических моделей рассматривает несимметричные системы с одним ограничителем либо симметричные системы с двусторонними ограничителями. Однако в точности симметричных систем не существует, так как гарантированно выставить, например, ударник на одинаковые расстояния между двумя ограничителями хода практически невозможно.

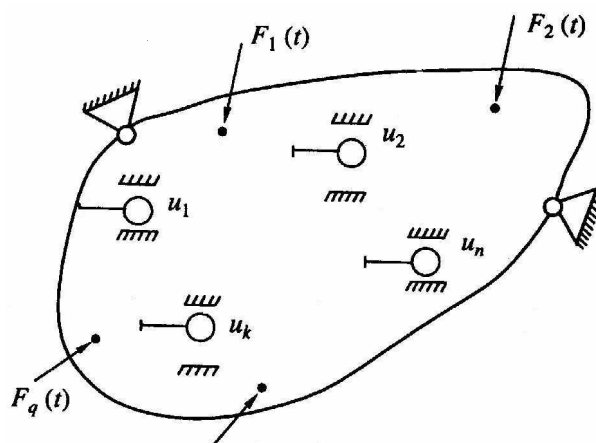


Рис. 2

Снова рассмотрим линейную склерономную стационарную механическую систему с произвольным числом степеней свободы (рис.2). Ограничимся, вообще говоря, несущественным предположением, что каждая точка рассматриваемой системы совершает одномерные движения вдоль некоторой оси. Будем также предполагать, что данная система оснащена конечным числом (N) двусторонних несимметричных ударных пар, каждая из которых реализует прямой центральный удар точечного ударника с двумя ограничителями хода. Снова предполагая удар мгновенным, прямым и центральным, моделируемым при помощи гипотезы Ньютона, можем записать, во-первых, очевидные геометрические

ограничения вида: $-\Delta_k^{(2)} \leq u_k \leq \Delta_k^{(1)}$ и при выходе на связь $u_k = \pm \Delta_k^{(2,1)}$:

$$u_{kt}(t_{jk}^{(1)}+0) = -R_k^{(1)} u_{kt}(t_{jk}^{(1)}-0); \quad u_{kt}(t_{jk}^{(2)}+0) = -R_k^{(2)} u_{kt}(t_{jk}^{(2)}-0). \quad (13)$$

Здесь $t_{jk}^{(1)}$ и $t_{jk}^{(2)}$ - некоторый j -й момент удара в k -й правой (верхней) (1) или левой (нижней) - (2) ударной паре; $R_k^{(1),(2)}$ - значения соответствующих коэффициентов восстановления.

Пусть структура движения такова, что период виброударного процесса $T=2\pi/\omega$ снова совпадает с периодом возбуждающего воздействия и сопровождается поочередными ударами об ограничители (1) и (2). Тогда, используя, например, данные выше соотношения, а также соотношения, данные в [3] записываем для силы удара:

$$\Phi_j(u_j, u_{ji}) = -J_{1j} \delta^T(t - \varphi_{1j}) + J_{2j} \delta^T(t - \varphi_{2j}), \quad (14)$$

где $\varphi_{1,2,j}$ - фазовые сдвиги, однозначно связанные с моментами соударений в j -х парах ($2n$ неизвестных параметра движения). Условия удара определяют соотношения для еще двух неизвестных параметров движения - импульсов ударов в каждой из n двойных ударных пар

$$J_{1j} = m_j(1 + R_j^{(1)}) u_{ji}(\varphi_{1j} - 0) \geq 0; \quad J_{2j} = m_j(1 + R_j^{(2)}) u_{ji}(\varphi_{2j} - 0) \geq 0. \quad (15)$$

Теперь, используя алгоритмы методов частотно-временного анализа, мы можем получить аналог $2n$ -параметрического представления, которое теперь становится $4n$ -параметрическим

$$u_k(t) = f_k(t) + \sum_{j=1}^n [-J_{1j} \chi(u_j, u_k, t - \varphi_{1j}) + J_{2j} \chi(u_j, u_k, t - \varphi_{2j})], \quad (16)$$

Неизвестные $4n$ параметров движения $J_{1,2j}$ и $\varphi_{1,2j}$ определяются из $2n$ условий (4) и еще $2n$ условий удара, выражающих напряжение неударяющей связи: $\Delta_k^{(1)} = u_k(\varphi_{1k})$; $-\Delta_k^{(2)} = u_k(\varphi_{2k})$.

Мы получили определяющее представление и $4n$ уравнений для определения параметров движения.

6. Дальнейшее расширение теории дают задачи о двухмерных (2D) виброударных процессах. Например, в решетчатых конструкциях [5, 7, 8, 10].

Рассмотрим прямоугольную решетку [5, 7, 8], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих одинаковых линейных струн, зашпеленных на концах и имеющих длины L_1 и L_2 (рис.3). Динамика решетчатой конструкции описывается посредством N функций прогибов $u_{kq}(t)$, где индексы $k=1,2,.. N_1$; $q=1,2,.. N_2$. Каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Считаем, что первый по счету индекс (в данном случае k) - нумерует струны «слева направо» или наоборот (рис.3), а второй индекс (в данном случае q) - «снизу вверх» или наоборот (рис.3). В вершинах решетки помещены точечные абсолютно твердые тела с одинаковыми массами m .

Параллельно плоскости статического равновесия решетки на расстояниях $\Delta_{1kq} > 0$ и $\Delta_{2kq} < 0$ от каждого из узлов установлены ограничители хода, с которыми точечные тела, находящиеся в узлах решетки могут совершать абсолютно соударения; удары предполагаются прямыми и центральными. Ограничители также могут находиться и только с одной из сторон: для каких-то k и q либо $\Delta_{1kq} \rightarrow \infty$, либо для каких-то n и m $\Delta_{2nm} \rightarrow -\infty$. В

частности, некоторые узлы могут быть вообще не оснащены ограничителями. Наконец, параллельно плоскости статического равновесия решетки на фиксированных расстояниях $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 < 0$ могут быть установлены две плоские стенки, с которыми точечные тела, могут также соударяться. Заметим также, что такие стенки могут располагаться только по одну сторону от решетки. Например, см. рис. 3, где с одной стороны установлен неподвижный ограничитель, а с противоположенной стороны показано несколько прямых ограничителей – помечены штриховкой и «галочками». Для простоты не обозначены соответствующие ограничителям индексы.

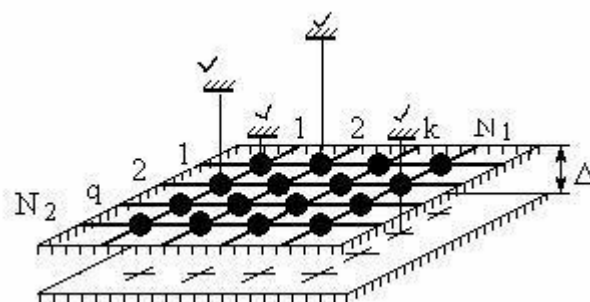


Рис. 3

Таким образом, если при $t=t^0$ и (или) при $t=t_0$ для каких либо k и q происходит соударение с верхним или нижним ограничителями, то [5, 8]:

$$u_{tkq}(t_0-0) = -R_{kq}u_{tkq}(t_0+0), \quad u_{kq}(t_0^0) = \Delta_{1kq} > 0; \quad u_{tkq}(t_0-0) = -R_{kq}u_{tkq}(t_0+0),$$

$$u_{kq}(t) = \Delta_{2kq} < 0; \quad 0 < R_{kq} \leq 1; \quad \Delta_{1kq} \leq u_{kq}(t) \leq \Delta_{2kq}; \quad (17)$$

Здесь R_{kq} – коэффициенты восстановления [5, 8] в каждой из N ударных пар. Решение данной задачи методами частотно – временного анализа отличается от предыдущих только существенным усложнением, определяющих решение операторов динамической податливости и ПФГ.

Ограничим рассмотрения случаем, когда решетка взаимодействует только с нижним ограничителем, т.е. предпоследнее двойное неравенство в общих выражениях (1) принимает для всех k и q , например, вид $u_{kq}(t) \geq \Delta; \Delta \leq 0$

Предполагая, что в отсутствии ударов перемещение каждого узла – синусоидально (частота $\omega = 2\pi T^{-1}$). Для описания установившихся виброударных T-периодических решений, получим, аналогично предыдущим представлениям

$$u_{kq}(t) = \varepsilon A_{kq} \cos(\omega t + \psi_{kq}) + \sum \sum J_{nj} \chi_{kq,nj}(t - \varphi_{nj}), \quad (18)$$

где суммирование ведется по n и j ; $\chi_{kq,nj}(t-s)$ - периодические функции Грина (ПФГ) решетчатой конструкции, являющиеся T - периодическими реакциями (перемещениями) узлов решетки, пронумерованных парами (k, q) на силовые воздействия, даваемые периодическими последовательностями δ - функций Дирака - $\delta^T(t)$, приложенными, соответственно, в узлах (n, j) . Представления для ПФГ решетчатой системы также даны в [8]. Величины A_{kq} и Δ_{kq} – амплитуда и фаза решения соответствующей линейной задачи. Эти величины определяются системой операторов динамической податливости решетки, которая также определяет и ПФГ $\chi_{kq,nj}(t)$ [8]. Определяющие неизвестные параметры движения J_{nj} и φ_{nj} даются матрицами размерностями $[(N_1-1) \times (N_2-1)]$. Их компоненты (импульсы и фазы ударов) определяются при помощи соотношений совместности (16).

Ударные силы при T – периодическом режиме движения $\Phi_{nj}(u_{nj}, u_{tnj}) = J_{nj} \delta^T(t - \varphi_{nj})$; $J_{nj} = (1 + R_{nj})m|u_{tnj}(\varphi_{nj} - 0)| > 0$ – импульсы ударов; $\varphi_{nj} \in]0, T[$ – фазы ударов. Полученное представление становится полностью определенным после нахождения $2N$ параметров импульсов и фаз ударов, для чего необходимо воспользоваться условиями совместности, следующими из условий удара:

$$u_{kq}(\varphi_{kq}) = \Delta \rightarrow [\Delta - \varepsilon A_{kq} \cos \psi_{kq} = \sum \sum J_{nj} \chi_{kq, nj}(\varphi_{kq} - \varphi_{nj})]; \quad (19)$$
$$J_{nj} = (1 + R_{nj})m|u_{tnj}(\varphi_{nj} - 0)| \rightarrow [J_{kq} = (1 + R_{nj})m|\varepsilon A_{kq} \sin(\psi_{kq}) + \sum \sum J_{nj} \chi_{tkq, nj}(\varphi_{kq} - \varphi_{nj} - 0)|];$$
$$k, n = 1, 2, \dots, (N_1 - 1); q, j = 1, 2, \dots, (N_2 - 1).$$

Выражения, стоящие в квадратных скобках, представляют собой N алгебраических уравнений $[N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)]$. Их решения полностью определяют искомый процесс. Сюда необходимо добавить следующие из (17) геометрические ограничения. Так при всех допустимых значениях индексов при данной конфигурации препятствия $J_{kq} \geq 0$ и $u_{kq}(t) \geq \Delta_{kq}$. Представление решения в виде типа (8) будем называть $2N_{2D}$ -параметрическим представлением. Также строятся (при необходимости) $4N_{2D}$ -параметрические представления или представления, определяемые меньшим числом параметров из-за отсутствия каких-либо ограничителей.

7. Выведенное представление допускает многочисленные обобщения и модификации, однако, с точки зрения «вычислительного формализма» периодических режимов движения методика расчетов при помощи методов частотно-временного анализа сводится к следующему:

- анализируемая система задается с помощью локальных и проходных операторов динамической податливости;
- эти операторы однозначно определяют периодические функции Грина системы;
- используя гипотезу мгновенного удара, строится, представление искомого процесса, определяемое импульсами удара в ударных парах и моментами соударений (фазами удара);
- для определения значений импульсов и фаз строится, следующая из условий удара система, вообще говоря, нелинейных алгебраических уравнений, решаемая аналитически (в простых случаях) или численно.

Перейдем к континуальным аналогам рассматриваемых систем- так называемым системам с распределенными ударными элементами, более подробный обзор таких систем будет дан в последующих публикациях.

8. Рассмотрим струну, вибрирующую вблизи протяженного ограничителя хода (рис.4), который параллелен оси статического равновесия струны. Здесь для примера показана фотография струны, вибрирующей между двумя симметричными ограничителями [11].

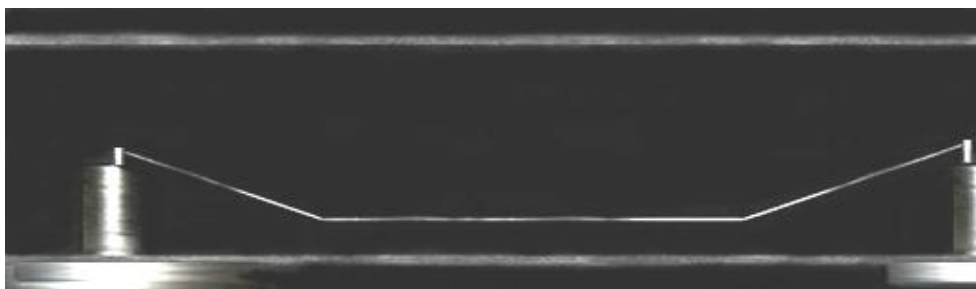


Рис. 4

Пусть искомым прогиб есть $u(x,t)$; $t \geq 0$, $x \in [-1/2, 1/2]$. Имеем неравенства, отражающие неударживающую связь: $u(x,t) \geq \Delta > -1$; при реализации здесь строгого неравенства, система описывается линейным волновым уравнением $\square u = u_{tt} - u_{xx} = 0$, где без ограничения общности приняты единичными погонная масса и натяжение. Граничные и начальные условия положим следующими: $u(-1/2,t) = u(1/2,t) = 0$; $u(x,0) = u_0(x)$; $u_t(x,0) = 0$. Предполагаем, что гладкость функции $u_0(x)$ обеспечивает существование и единственность решения линейной задачи Коши для уравнения $\square u = 0$, по крайней мере, в обобщенном смысле [11]. Кроме того, имея в виду изучать стоячие волны в определенном смысле подобные первой форме колебаний, будем предполагать, что функция $u_0(x)$ – унимодальная и четна на отрезке $x \in [-1/2, 1/2]$. При достижении точками струны ограничителя, последний действует на струну «от себя». Поэтому, если $u \leq 0$, то $\square u \geq 0$. Гипотеза удара предполагает, что потеря энергии не происходит, т.е. как и для линейной струны в смысле обобщенных функций

$$\partial/\partial t (|u_x|^2 + |u_t|^2) = \partial/\partial x (2u u_x). \quad (20)$$

Это соотношение в данном уже «нелинейном случае» постулируется и, в частности, выражает гипотезу взаимодействия. Отсюда следует аналог классической гипотезы об абсолютно упругом ударе: $u_t(x,t-0) = -u_t(x,t+0)$, $u(x,t) = \Delta$. Вопрос о гипотезах рассеяния энергии при ударах в настоящей статье не рассматривается. В рассматриваемом случае сила ударного взаимодействия

$$\Phi[u] = J(x) \delta[t - t_n(x)] \gamma(x; \Delta). \quad (21)$$

Здесь $J(x)$ – плотность ударного импульса, $t_n(x)$ – распределение n -й «фазы» удара, определяемой в данном случае как решение уравнения

$u[x, t_n(x)] = \Delta$; $\delta(t)$ - δ -функция Дирака.

Индикаторная функция $\gamma(x; \Delta) = 0$ при тех x , когда струна не взаимодействует с плоской частью ограничителя и $\gamma(x; \Delta) = 1$, когда такое взаимодействие возможно. Анализируемая задача, следовательно, может быть записана в виде нелинейного уравнения типа Клейна – Гордона $\square u - \Phi[u] = 0$ с краевыми и начальными условиями. При рассмотрении неконсервативной системы будем иметь такое же уравнение, но с правой частью: $\square u - \Phi_0[u] = f(u, u_t, t)$, где $f(u, u_t, t)$ – функция, описывающая силы демпфирования и, например, T – периодическое возбуждения.

Будем искать стоячие периодические волны периода $T(E) = 2\pi/\omega$ где ω - частота вибрации струны; E – полная энергия системы. Методы частотно-временного анализа дают представление (в предположении одного взаимодействия струны за период движения, продолжительность которого $t^* : 0 \leq t^* \leq t^0 \leq T$)

$$u(x,t) = g(x,t) - \int_{-1/2}^{1/2} J(y) \gamma(y; \Delta) \chi(x,y; t - \varphi(y)) dy \quad (22)$$

где $g(x,t)$ – решение линейного волнового уравнения; $J(y)$ и $\varphi(y)$ – распределения импульса и фазы удара.

ПФГ струны [3, 11]

$$\chi(x,y; t) = \sum \sin \pi n(x+1/2) \sin \pi n(z+1/2) \chi_n(t). \quad (23)$$

Здесь суммирование ведется по всем целым положительным числам; функции $\chi_n(t)$ – «элементарные» ПФГ линейных осцилляторов с частотами, отвечающими спектру струны $\{\Omega_n\} = \{2\pi n\}$. При $0 \leq t < T$ имеет место формула [1, 2]:

$$\chi_n(t) = (2\Omega_n \sin 0,5\Omega_n T)^{-1} \cos[\Omega_n(t - 0,5T)].$$

Представление (22) называется двухфункциональным. Для нахождения функций, определяющих плотность импульса $J(y)$ и распределение фазы $\varphi(y)$, используются следующие из (20) или (и) других дополнительных гипотез соотношения [3, 9, 11].

Отметим, что представления, определяющие решения различных типов распределенных систем, существенно более многообразны, чем приведенные выше. Автор предполагает вернуться к ним в последующих работах.

9. Удивительное формальное единообразие представлений, определяющих виброударные процессы в простейших и сложных системах, имеет, разумеется, физическую интерпретацию. Оказывается, что ряд динамических явлений, наблюдаемых в случае простейшего ударного осциллятора, при усложнении структур виброударных систем в той или иной мере сохраняются. При этом, естественно, проявляются и новые явления, но ряд «базовых» свойств виброударных систем остается практически всегда.

Для ударного осциллятора можно назвать его следующие важнейшие нелинейные свойства:

А. Появление нескольких ветвей амплитудно-частотных характеристик, и чередование устойчивая ветвь, отвечающая устойчивым режимам движения, неустойчивая ветвь, отвечающая неустойчивым режимам движения. При этом в системах с зазором проявляется жесткий, а с натягом – мягкий анизохронизм колебаний, в то время как системы с нулевым зазором изохронны [1, 2, 9, 11].

Б. Проявление явлений затягивания колебаний по частоте или амплитуде (плавного изменения частоты или зазора), срыва колебаний после достижения некоторых наивысших значений амплитуд, а также так называемое явление жесткого запуска, состоящее в том, что после срыва колебаний необходимо не только уменьшить (увеличить) частоту возбуждения, но и придать системе дополнительный (запускающий импульс) [1, 2, 9, 11].

В. Явления А и Б проявляются во всех типах виброударных систем, рассмотренных выше. Этот факт устанавливается как теоретически на основании анализа описанных выше представлений, так и экспериментально. При этом во всех системах с большим числом степеней свободы реализуются специфические стоячие волны, характеризующиеся одновременным выходом на ограничители удаленных тел или (в случае струны) ее удаленных точек. Такие стоячие волны называются хлопками [11]. На рис.4 приведен пример хлопка в случае дискретной струны. Хлопки возникают также в дискретных системах и решетках. При реализации какой-либо из форм хлопков наблюдаются эффекты затягивания, срыва, жесткого запуска. Для хлопков могут быть построены также неоднозначные амплитудно-частотные характеристики.

Г. Очевидно, что при усложнении систем усложняются и наблюдаемые динамические явления. Усложняется возможная картина волн, в ряде случаев, например, явно проявляются решения солитонного типа, существуют хаотические режимы движения, режимы, порождаемые различного рода бифуркациями и т.д. Однако общность динамических эффектов виброударных систем во многом сохраняется.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-08-00500-а)

Литература

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 384 с.
2. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.

3. *Krupenin V.L., Veprik A.M.* Vibroconductors equipped with impact elements and distributed vibroimpact systems // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V.1. Czech Prague: CTU, 1996. P. 229-R. 234.
4. *Крупенин В.Л.* Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. №3. С.20-28.
5. *Крупенин В.Л.* К анализу динамики колеблющейся двумерной решетки // Научн. техн. Интернет журнал Вестник научно-технического развития
Url: <http://www.vntr.ru/nomera/2007-2>, 2007. №2. С.8-18 (дата обращения 20.05.09).
6. *Бабицкий В.И., Коловский М. З.* К анализу резонансных режимов виброударных систем. // Изв. АН СССР, МТТ. 1978. №4. С 47-52.
7. *Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш.* Колебания механических систем с периодической структурой. Ташкент: ФАН, 1973. 272 с.
8. *Крупенин В.Л.* О расчете вибрационных процессов в решетчатых двумерных конструкциях // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006, № 4. С. 24-32.
9. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 5. С. 13-30.
10. *Крупенин В.Л.* Случайные соударения решетчатой конструкции с периодической структурой и плоским ограничителем хода // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. №4. С. 105-109.
11. *Крупенин В.Л.* К исследованию высших нелинейных форм колебаний виброударных систем с распределенными ударными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. №4. С. 105-109.

Поступила: 02.12.2009.