УДК 658

О формировании стратегических решений при управлении развитием (предприятий) при помощи распределенных процедур (часть 2)

Тренев В.Н.

Построим пример реализаций РС для каждого из приведенных классов задач.

Будем при этом считать, что возможные разбиения системы $\tilde{G}$ на подсистемы $\tilde{G}_i$. определяются структурой системы $\tilde{G}$, которая представляет собой объединение структур типа дерева (соответствующих финансовой, производственной, административной, маркетинговой и другим структурам предприятия).

Выделение в таких древесных структурах древесных же подструктур соответствует проектам.

Множество сред $П_i$. описания подсистем определяется множеством принятых в соответствующих ведомостях набором рабочих и выходных документов («форм») и соответственно множеством используемых показателей.

1) Рассмотрим задачи класса 1 - «расчетного» типа.

Пусть это задача $Z =< x^0; Ф; P^Ф >$, где x^0- начальное состояние системы; Ф - множество достижимости; $p^Ф$- множество показателей, в терминах которых оценивается решение задачи.

Для задач класса 1 множество Ф может быть задано в виде :

$Ф = \{x_p = x_p^0, p \in \tilde{P}\}$, где $\tilde{P}$ - множество «исходных» показателей.

По определению данного класса задач, в каждой подсистеме R_i существуют «расчетные» алгоритмы, представляющие собой набор расчетных формул.

Выделим множество $\tilde{R}^0$- «исходных» подсистем - множество минимальной мощности, такое, что:

$$\tilde{R}^0 = \{R_i \mid (in(A_i) \subseteq \tilde{P}) \& (U \quad in(A_1) \supseteq \tilde{P}\}$$

$$R \in \tilde{R}_i^0$$

Определим множество $\tilde{R}^e$ конечных подсистем :

$$\tilde{R}^e = \{R_i \mid U \quad out(A_i) \supseteq P_Ф o\}.$$

$R \in \tilde{R}^e$

Построим граф $\tilde{G} =< \{R_i\},V >$, в котором множество вершин совпадает с множеством подсистем $\{R_i\}$, а множество дуг определяется следующим образом :

$v_{ij} = (R_{i,} R_j) \in V \;<=>\; \{A_i \in R_i, A_j \in R_j \big|$
$out\;(A_i) \cap in(A_i) \neq 0\}$,

т.е. выходные показатели системы R_i являются исходными для R_j. В такой интерпретации формирование реализации РС (и РП) решения задачи Z, сводится к нахождению путей на данном графе из вершин множества G во все вершины множества G^e известными методами.

2) Задачи класса 3 («агрегирование») решаются аналогично. Граф G в этом случае строится по признаку иерархического подчинения подсистем.

3) Задачи класса 2 («анализ, коррекция») связаны с неформальным выделением множества $\{R_i\}_{i\in\tilde{I}}$ подсистем в результате анализа пользователем сред $\{S_1\}$ их описания.

4) Задачи «балансового типа»:

$Z = \{x^0, \Phi^0, P_\Phi o\}$,

$\Phi^0 = \{\vec{\varphi} \;\big|\; (\vec{a}_j, \vec{\varphi})\} \le b_j;\; \vec{\varphi} = \{x_p\}_{p\in P_\Phi o}$,

$\vec{a}_j = \{x_p^o\}\; p \in P_\xi^j,\; j = \overline{1, J}$;

$\{b_j\} = \{x_{p_1}^0, \ldots, x_{p_j}^0, \ldots, x_{p_j}^0\}, p_i \in P^B\}$.

Здесь показатели множества P_Φ выполняют роль переменных; показатели множества P_ξ^j - роль удельных (они фиксированы и заданы в x^0*)* ', показатели множества P^B - роль правых частей. Выберем подсистемы (и задачи), участвующие в решении задачи **Z**.

Пусть S - среда описания подсистемы S: $S_i =< P_i, F_i >$, где P - множество показателей подсистемы S_i, F_i - множество связей на этих показателях:

$F_i = \{f^j(x_p),\; p \in P_i\}$.

Без ограничения общности можно считать, что

$\forall\; \tilde{p} \in P_i \;\exists \tilde{f}\; (\tilde{x}_p, x_p)_{p\in P_i} \in F_i\!: \; \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x_p} \neq 0,$

(т.е. $\tilde{f}$ зависит от $\tilde{x}_p$ - в P нет «лишних показателей»). Очевидно, в решении задачи Z будут участвовать подсистемы R_i, для которых $P_i \cap P_\Phi o \neq 0$. Для задач Z_i. множества Φ^i записываются следующим образом :

$\Phi^{i} = \Phi^{i1} \bigcap \Phi^{i2}$,

где Φ^{i1} строится аналогично Φ^{0} , только

$\vec{\varphi} = \{x_p\}, p \in P_{\Phi}o \bigcap \Phi^{i2}$

а Φ^{i2} - множество допустимых состояний системы R^i по связям F^i В случае, когда связи F^i носят линейный характер, в качестве механизма регламентации взаимодействия подсистем можно применить методы интерактивного формирования сбалансированных решений, основанные на обобщении алгоритмов проектирования.

5) Задачи «учета возможностей НТП».

Эти задачи являются обобщением задач «балансового типа», рассмотренных выше:

$$Z = \{x^0, \Phi^0, P_{\Phi}o\},$$

$$\Phi^0 = \{\vec{\varphi} \mid (a_j, \vec{\varphi}) \le \mathrm{b_j};\ \vec{\varphi} = \{\mathrm{x_p}\},\ \mathrm{p} \in \mathrm{P}_{\Phi}o,$$
$$\vec{a}_j = \{x_p\}_{p \in P_i^j},\ \mathrm{b_j} = x_{p_j},\ \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{J}},\ \mathrm{p_i} \in \mathrm{P^B},$$
$$x_p = x_p^0,\ \mathrm{p} \in \mathrm{P}^0\}.$$

В данном случае варьируются показатели не только из множества $P_{\Phi}o$, но и из множеств P^jи P^B. В решении задачи Z участвуют подсистемы R^i для которых

$$(P_i \cap \mathrm{P}_{\Phi}o) \cup ((\mathrm{U}_j P_i^j) \cap \mathrm{P}_{\Phi}o) \cup (\mathrm{P_i^B} \cap \mathrm{P}_{\Phi}o) \ne 0.$$

Множество достижимости Ф строится так же, как и для задач «балансового типа». В качестве механизма регламентации можно использовать методы, основанные на обобщении алгоритмов проектирования.

В случае, когда в условия, определяющие множество Φ^0 , добавлены требования принадлежности решения траектории наиболее предпочтительных решений, удобно использовать для регламентации методы системной оптимизации, основанные на траекторном подходе.

6) Задачи «анализа жизненных циклов». Формально могут быть сведены к виду, в котором записываются задачи «балансового типа» и

задачи «учета НТП». Поэтому выбор подсистем R_i и задач Z происходит аналогично.

Однако в случаях, когда существенен дискретный характер решений, требуется разработка особых механизмов регламентации, носящих интерактивный характер.

7) Задачи класса 7 - («дезагрегирование»). Решаются аналогично задачам класса 3 - «агрегирование».

8) Задачи класса 8 - «выбор рациональной информационной структуры» могут возникать независимо в каждой из подсистем R при выборе полного описания (из набора сред $\{S_i\}$) минимальной сложности.

Основные утверждения и алгоритмы.

Далее приведем основные утверждения.

В качестве примера в данном докладе мы остановимся на двух основных классах задач, с которыми приходится сталкиваться в процессах реформирования крупных промышленных предприятий.

Это, в первую очередь задачи управления инновациями и структурными сдвигами в, реализуемыми в процессе выполнения плана финансово-экономического оздоровления предприятия. С формальной точки зрения – это задачи системной оптимизации.

Второй класс задач – это задачи формирования согласованного решения в распределенных процедурах управления предприятием – кординация решения локальных задач.

П.2.1. Задачи и алгоритмы системной оптимизации. К классу задач системной оптимизации относятся задачи, в которых возникает проблема выбора не только значений неизвестных переменных, но и параметров модели, включая элементы матрицы коэффициентов и значения правых частей ограничений.

К этому классу относятся, например, задачи стратегического планирования, формально представимые в виде :

$$\Phi \geq \Phi^{дир}, \tag{П.2.1}$$

$$\Phi = D \cdot x, \tag{П.2.2}$$

$$A \cdot x \leq B, \tag{П.2.3}$$

$$x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \tag{П.2.4}$$

$$A \in F_A, \tag{П.2.5}$$

$$B \in F_B. \tag{П.2.6}$$

Здесь x есть n - мерный вектор вводимых мощностей, Φ - l -мерный вектор продуктов отрасли, $\Phi^{дир}$ - вектор потребностей, D -матрица $l \times n$ удельных коэффициентов использования мощности, B - вектор ресурсов, A - матрица $m \times n$ коэффициентов удельных расходов ресурсов, F_A и F_B - области возможных значений параметров модели.

Ограничения (П.2.1), (П.2.2) определяют желательные значения целевых установок (наиболее существенных показателей) на перспективу. Ограничения (П.2.3), описывающие возможности предприятия, могут сильно варьироваться как за счет дополнительных поставок ресурсов (вектор B), так и за счет влияния инноваций, технического перевооружения и пр. (далее, для простоты – использования возможностей научно-технического прогресса) - изменения матрицы A.

Уточним особенности рассматриваемого класса задач. Основной особенностью является наличие целевой установки в форме траектории наиболее предпочтительных решений в пространстве целевых показателей Γ_Φ или (и) в пространстве мощностей Γ_x:

$$\Gamma_\Phi(\lambda) = \{\Phi \mid \Phi_j = \gamma_j(\lambda),\ j = 1,2,\ldots,l\}$$

$$\Gamma_X(\lambda) = \{\Phi \mid x_j = x_j(\lambda),\ j = 1,2,\ldots,l\}$$

В этом случае задача поиска решения, наиболее близкого по траектории к желаемому $\Phi^{дир}$, сводится к следующей задаче математического программирования.

З а д а ч а 1.

$$\lambda \to \max, \tag{П.2.7}$$

$$\Phi \in \Gamma_\Phi(\lambda), \tag{П.2.8}$$

где параметр λ характеризует степень приближения к цели, причем на Φ накладываются дополнительные ограничения.

В дальнейшем будем рассматривать ситуацию, когда траектория $\Gamma(\lambda)$ задана в кусочно-линейном виде (в виде ломаной) с узлами в точках $s=1,2,\ldots,m$:

$$\Gamma_\Phi(\lambda) = \{\Phi \mid \Phi = \Phi^{s-1} + \lambda_s \cdot (\Phi^s - \Phi^{s-1}),\ \lambda = \lambda + \lambda_s,\ \lambda_s \in [0,1]\} \tag{П.2.9}$$

Второй особенностью рассматриваемого класса задач является специальный вид областей F_A и F_B возможных значений элементов матрицы A удельных расходов ресурсов и вектора B ресурсов. Конкретизируем эти области. Заметим, что каждый столбец $\vec{a}_i = (a_{1,i},\ldots,a_{m,i})$ матрицы A имеет смысл коэффициентов удельных расходов ресурсов i-й технологией, где под технологией имеется в виду комплекс оборудования, обеспечивающий производство конечного продукта. В связи с этим исключение какой-либо технологии из плана не влияет на значения технико-экономических показателей остальных технологий. Тогда естественной является следующая гипотеза.

<u>Г и п о т е з а П.1.</u> Области возможных значений параметров a_i различных технологий не зависят друг от друга. Иными словами, область возможных значений элементов матрицы A имеет вид:

$$F_A(A) = \{A \mid A = \|\tilde{a}_i\|, i = 1,\ldots,n\ \&\ \tilde{a}_i \in S_i, i = 1,\ldots,k_i\}. \tag{П.2.10}$$

В зависимости от того, учитывается НТП на уровне укрупненных технологий или на уровне конкретных технологий, области S будут иметь различный вид:

$$S_i = \{\vec{a}_i^1,\ldots,\vec{a}_i^j,\ldots,\vec{a}_i^{k_i}\} \tag{П.2.11}$$

$$S_i = \{\vec{a}_i \mid \vec{a}_i = \sum_{j=1}^{k_i} \gamma_i^j \cdot a_i^j, \gamma_i^j \in [\underline{\gamma}_i^j, \overline{\gamma}_i^j] \mid j = 1,\ldots,k_i, \gamma_i^j \geq 0, \sum_{j=1}^{k_i} \gamma_i^j = 1\}, \tag{П.2.12}$$

Условие (П.2.11) соответствует выбору технологии i-го типа из дискретного набора k_i конкурирующих между собой технологий $\vec{a}_i^j$. Таким образом, условие (П.2.12) описывает учет НТП на уровне конкретных технологий. Условие (П.2.12) соответствует выбору из области возможных значений укрупненных технологий, образуемых комбинацией конкретных технологий *i* с различными долями x_i использования. Область F_B возможных значений вектора правых частей ограничений определяется ограничениями вида:

$$B = B^0 + \Delta B \qquad (П.2.13)$$

$$B \geq B^{\min}, \qquad (П.2.14)$$

$$\sum_{p=1}^{m} \alpha_p \cdot \Delta B_p = \Delta K \qquad (П.2.15)$$

Эти условия содержательно означают возможность перераспределения имеющихся в наличии ресурсов B^0 и распределения дополнительно выделенных средств ΔB (в денежном исчислении) по статьям расходов. Параметры α_p имеют смысл удельных капиталовложений в производство ресурса *p*-го типа, например, в добычу топлива, необходимого для электростанций.

Заметим, что в реальных условиях при планировании на перспективу дефицит ресурсов по отношению к запросу обычно составляет 20-30 %. В этих условиях может стать существенной зависимость удельных капиталовложений в добычу ресурсов α_p от объема поставок ресурсов ΔB_p, т.е.

$$\alpha_p = \alpha_p(\Delta B_p),\; p = 1,\ldots,m.$$

На практике обычно ограничиваются линейным приближением

$$\alpha_p = \alpha_p^0 + \delta_p(\Delta B_p), \qquad (П.2.16)$$

где

$$\delta_p = \frac{\partial \alpha_p(\Delta B_p)}{\partial(\Delta B_p)} \geq 0. \qquad (П.2.17)$$

В случае, если из общего количества ресурса *R* (в денежном исчислении) часть средств ΔK_H расходуется на научные исследования и опытно-конструкторские работы, имеют место ограничения

$$R = \Delta K + \Delta K_H, \qquad (П.2.18)$$

$$\Delta K_H = \sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{a}_i). \qquad (П.2.19)$$

Величины $f_i(\vec{a}_i)$ имеют смысл затрат на НИОКР по технологии *i*.

В случае, если учитываются средства ΔK_M, необходимые для приобретения (технического перевооружения) различного оборудования, нужного предприятию, т.е. средства, выделенные на развитие машиностроения, добавляются ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot x_i^{\max} \leq \Delta K_M, \qquad (П.2.20)$$

где δ_i имеют смысл удельных капиталовложений в производство оборудования по *i*-й технологии.

Исследуем основные свойства задачи 1. Будем предполагать, что траектория обладает рядом естественных свойств.

Г и п о т е з а П.2. Если в условиях задачи 1 точка $\Gamma(\lambda_1)$ траектории допустима, то допустима и любая точка траектории с меньшим значением параметра $\Gamma(\lambda_2)$, где $\lambda_2 < \lambda_1$.

Теорема 1 (С в о й с т в о 1). В условиях гипотезы П.2 решение задачи 1 сводится к решению последовательности задач 2 для нескольких линейных отрезков кусочно-линейной траектории.

З а д а ч а 2.

$$\lambda \to \max, \qquad (П.2.21)$$

$$x = x^{s-1} + \lambda \cdot \Delta x^{ид}, \qquad (П.2.22)$$

$$\Delta x^{ид} \in \widehat{X}^{ид} = \{x \mid D \cdot x = \Phi^s - \Phi^{s-1}\}, \qquad (П.2.23)$$

$$x^{s-1} \in X^{s-1} = \{x \mid D \cdot x = \Phi^{s-1}\}, \qquad (П.2.24)$$

$$A \cdot x \le B, \qquad (П.2.25)$$

$$x \ge 0, \qquad (П.2.26)$$

$$A \in F_A, \qquad (П.2.27)$$

$$B \in F_B \qquad (П.2.28)$$

Свойство 1 позволяет решать исходную задачу 1 в пространстве фазовых переменных *X*, а результаты решения представлять для анализа ЛПР (лицу, принимающему решение) в категориях показателей *Ф*. (Доказательства приводимых здесь свойств имеются в § 6.2, [79]).

Введем обозначения, удобные для описания перемещения вдоль траектории. Пусть

$$B_p^H = \sum_{i=1}^{n} a_{p,i} \cdot x_i^{s-1}, \qquad (П.2.29)$$

$$\Delta B_p^{ид} = \sum_{i=1}^{n} a_{p,i} \cdot x_i^{ид}, \qquad (П.2.30)$$

где B_p^H и $\Delta B_p^{ид}$ - запрос ресурсов в начальной точке траектории x^{s-1} и при переходе из x^{s-1} в точку идеала $x^s + \Delta x^{ид} (\Delta x^{ид} = x^{ид} - x^{s-1})$.

Тогда показатель дефицитности λ_p ограничения, соответствующего ресурсу *p*-го вида, будет равен отношению имеющегося в наличии ресурса B_p^H к запросу ресурса, необходимого для перехода из точки траектории x^{s-1} в точку $x^{s-1} + \Delta x^{ид}$. Показатель дефицитности λ_p задается

соотношением

$$\lambda_p = \frac{B_p^0 - B_p^{ид}}{\Delta B_p^{ид}}. \qquad (П.2.31)$$

<u>О п р е д е л е н и е 1.</u> Ограничения с минимальным уровнем дефицитности будем называть существенными. Множество существенных ограничений будем обозначать

$$P^0 = \{p_0 \mid \lambda_{p_0} = \min_p \lambda_p\} \qquad (П.2.32)$$

<u>О п р е д е л е н и е 2.</u> Ограничения будем называть сбалансированными на уровне λ, если они имеют одинаковый показатель дефицитности, равный λ. Множество сбалансированных на уровне λ ограничений будем обозначать

$$P^\lambda = \{p \mid \lambda_p = \lambda\}. \qquad (П.2.33)$$

Отметим, что если траектория задана в фазовом пространстве *X*, т.е. когда x^{s-1} и $\Delta x^{ид}$ фиксированы, имеет место свойство, согласно которому степень достижения цели λ^* равна показателю дефицитности существенных ограничений, т.е. ограничений с наиболее дефицитными ресурсами.

<u>Г и п о т е з а П.3.</u> Движение вдоль траектории в сторону увеличения параметра траектории при фиксированных значениях элементов *A* (в отсутствие НТП) требует дополнительных затрат ресурсов (т.е. $\Delta B^{ид}$ >0).

С в о й с т в о 2. При изменении параметров *B* и *A*, $B = B^0 + \Delta B$, $A = A^0 + \Delta A$ изменения показателя дефицитности *p*-го ограничения определяется выражением

$$\Delta\lambda_p = -\frac{-\Delta B_p + \sum_{i=1}^{n} \Delta a_{p,i} \cdot (x_i^{s-1} + \lambda_p \cdot \Delta x_i^{ид})}{\Delta B_p^{ид} + \Delta(\Delta B_p^{ид})} \qquad (П.2.34)$$

С л е д с т в и е 1. *При изменении элементов A и B от* A^0, B^0 *до* $A^0 - \Delta A, B^0 + \Delta B$ *необходимым и достаточным условием возрастания показателя дефицитности* λ_p *ограничения, соответствующего ресурсу p-го вида, является условие*

$$\Delta B_p - \sum_{i=1}^{n} \Delta a_{p,i} \cdot (x_i^{s-1} + \lambda_p \cdot \Delta x_i^{ид}) > 0.$$

С л е д с т в и е 2. *Чувствительность показателя дефицитности p-го ограничения к изменению параметров B и A определяются выражениями*

$$\frac{\partial\lambda_p}{\partial B_q} = 0,\ p \neq q, \frac{\partial\lambda_p}{\partial B_p} = \frac{1}{\Delta B_p^{ид}},$$
$$\frac{\partial\lambda_p}{\partial a_{q,i}} = 0, q \neq p, \qquad (П.2.35)$$
$$\frac{\partial\lambda_p}{\partial a_{p,i}} = -\frac{x_i^{s-1} + \lambda_p \cdot x_i^{ид}}{\Delta B_p^{ид}}.$$

Доказательство следствия 2 вытекает непосредственно из формулы (П.2.31) (так как $\Delta B_p^{ид} > 0$).

Определение 3. Будем говорить, что область F_B возможных значений компонент вектора *B* допускает комплектные поставки ресурсов при некотором фиксированном значении A^* параметра *A*, если существует такой вектор $B^* \in F_B$, что все ограничения будут сбалансированы на одном уровне. Соответствующие поставки ресурсов (вектор *B*) будем называть комплектными.

Свойство 3. Пусть множество ограничений *P* сбалансировано на уровне λ_1, т.е. $P = P^{\lambda_1}$. Для того чтобы при изменении параметра *B* от B^0 до $B^0 + \Delta B$ ограничения из *P* остались сбалансированными, т.е. $P = P^{\lambda_2}$, где λ_2 - новый уровень сбалансированности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\sum_{p \in P} \alpha_p \cdot \Delta B_p}{\sum_{p \in P} \alpha_p \cdot \Delta B_p^{ид}}, \qquad (П.2.36)$$

$$\Delta B_p = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \Delta B_p^{ид}, p \in P. \qquad (П.2.37)$$

Необходимость. Пусть при $B = B^0 + \Delta B$ их ограничения *P* стали сбалансированными на уровне λ_2, тогда из свойства 3 следует (П.2.37). Просуммировав по $p \in P$, получим (П.2.36).

Достаточность. Пусть выполняются (П.2.36), (П.2.37). Из свойства 2 следует, что $\lambda_p + \Delta\lambda_p = \lambda_2$ для любого $p \in P$, т.е. $P = P^{\lambda_2}$.

Свойство 3 позволяет распределять ресурс $\Delta K = \sum_{p \in P} \alpha_p \cdot \Delta B_p$ между ограничениями так, чтобы сохранялась их сбалансированность. Содержательно свойство 3 означает, что ресурсы должны распределяться пропорционально запросам $\Delta B_p^{ид}$.

Теорема 2 (Свойство 4). При фиксированном значении параметров $x^0, x^{ид}, A$ необходимым и достаточным условием оптимальности решения $< x^*, B^*, \lambda^* >$ задачи 2 является выполнение условий

$$\lambda^{**} = \frac{\Delta K + \sum_{p \in P^2} \alpha_p \cdot \left(B_p^0 - B_p^H\right) + \sum_{p \in P^1} \alpha_p \cdot (B_p^0 - B_p^{\min})}{\sum_{p \in P^2} \alpha_p \cdot \Delta B_p^{ид}} \qquad (П.2.37)$$

$$B_p^* = B_p^{\min}, p \in P^1, \qquad (П.2.38)$$

$$B_p^* = \lambda^* \cdot \frac{\Delta B_p^{ид}}{B_p^H}, p \in P^2, \qquad (П.2.39)$$

$$x^* = x^* + \lambda^* \cdot \Delta x^{ид}, \qquad (П.2.40)$$

где $B_p^H, \Delta B_p^{ид}$ определяются согласно (П.2.29), (П.2.30), а P^1 и P^2 - имеют вид

$$P^2 = \{p \mid \frac{B_p^{\min} - B_p^H}{\Delta B_p^{ид}} \le \lambda^*\}, \qquad (П.2.41)$$

$$P^1 = \{p \mid \frac{B_p^{\min} - B_p^H}{\Delta B_p^{ид}} > \lambda^*\}. \qquad (П.2.42)$$

Свойство 4 означает, что дополнительно выделенные ресурсы ΔK должны распределяться только среди существенных ограничений P^2 , которые должны быть сбалансированы на одном уровне (т.е. поставки ресурсов комплектные). При перераспределении ресурсов по статьям расходов ресурсы должны отбираться из несущественных ограничений P^1 и распределяться среди существенных.

Совершенно аналогично можно показать, что свойство 4 будет иметь место и в случае, если удельные капиталовложения в добычу ресурсов α^P линейно зависят от ΔB_p , т.е. если имеет место ограничение (П.2.42).

С л е д с т в и е 1. *Если при фиксированных значениях $A^*, x^{s-1}, x^{ид}$ область F_B допускает комплектные поставки ресурсов, то для оптимальности решения λ^*, B^*, x^* задачи 2 необходимо и достаточно, чтобы все ограничения были сбалансированы на уровне λ^* , причем справедливы*

$$\lambda^* = \frac{\Delta K + \sum_{p=1}^{m} \alpha_p \cdot B_p^0 - \sum_{p=1}^{m} \alpha_p \cdot B_p^H}{\sum_{p=1}^{m} \alpha_p \cdot \Delta B_p^{ид}}, \qquad (П.2.43.)$$

$$B_p^* = \lambda^* \cdot \Delta B_p^{ид} + B_p^H, \ p = 1,\dots,m, \qquad (П.2.44.)$$

$$x^* = x^0 + \lambda^* \cdot \Delta x^{ид} \qquad (П.2.45)$$

С л е д с т в и е 2. *Если значение удельного коэффициента α_p в увеличение прироста ресурса зависит от ΔB_p , т.е. $\alpha_p = \alpha_p^0 + \delta_p \cdot \Delta B_p$, то в условиях свойства 2 уровень сбалансированности λ^* является положи-тельным корнем уравнения $G \cdot \lambda^2 + B \cdot \lambda + C = 0$, где*

$$G = \sum_{p \in P^2} \delta_p \cdot (\Delta B_p^{ид})^2, \ B = \sum_{p \in P^2} (\alpha_p \cdot B_p^{ид} + 2 \cdot \delta_p \cdot \Delta B_p^{ид} \cdot (B_p^H - B_p^0)),$$

$$C = \sum_{p \in P^2} (\delta_p \cdot (B_p^H - B_p^0)^2 + \alpha_p^0 \cdot (B_p^H - B_p^0)) - \Delta K.$$

Г и п о т е з а П.4. Движение вдоль траектории в сторону увеличения параметра траектории не может приводить к уменьшению мощностей в пространстве *X*, т. е. если точке $x^1 \in X$ соответствует точка $\Gamma(\lambda_1)$ траектории, а точке $x^2 \in X$ - точка $\Gamma(\lambda_2)$ траектории, причем $\lambda_2 > \lambda_1$, то $x_i^2 \ge x_i^1$ $(i = 1,2,\dots,n)$ и $\exists j : x_j^2 > x_j^1$.

Теорема 3 (С в о й с т в о 5). Пусть область *F* допускает комплектные поставки ресурсов для всех значений элементов $A \in F$. Тогда необходимым и достаточным условием оптимальности решения λ^*, x^*, B^*, A^* задачи 2 является сбалансированность всех ограничений на одном уровне λ^*, который определяется первым уравнением в (П.2.44), причем B^* и x^* определяются выражениями (П.2.44) и (П.2.45); $x^{s-1}, x^{ид}$ находятся как решение задач линейного программирования (П.2.44), (П.2.47), а $\vec{a}_i^*, i = 1,2,...,$ определяются как решение задачи математического программирования (П.2.49):

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot \sum_{p=1}^{m}\alpha_p \cdot a_{p,i}^*) \to \min, \tag{П.2.46}$$

$$x \in X^{s-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot \sum_{p=1}^{m}(\alpha_p \cdot a_{p,i}^*)) \to \min,$$

$$x \in X^{ид}$$

(П.2.47),(П.2.48.)

$$\sum_{p=1}^{m}\alpha_p \cdot a_{p,i}^* \to \min, \tag{П.2.49}$$

$$\vec{a}_i \in S_i. \tag{П.2.50}$$

С в о й с т в о 6 (о согласованности изменения элементов A). Пусть при $A = A^1$ ограничения r, q имеют показатели дефицитности λ_r^1, λ_q^1, так что $\lambda_r^1 < \lambda_q^1$, а при $A = A^1 + \Delta A$ соответственно $\lambda_r^1 > \lambda_q^1$. Тогда существует $\gamma^* \in [0,1]$ такое, что при $A^3 = A^1 + \gamma^* \Delta A$ выполняется $\lambda_r^3 = \lambda_q^3$.

С л е д с т в и е 1. *В условиях свойства* 2 *величина* γ^{**} *находится как решение уравнения*

$$\frac{\lambda_r^1 - \gamma \cdot \cdot (\sum_{i=1}^{n}\Delta a_{r,i} \cdot x_i^{s-1})}{\sum_{i=1}^{n} a_{r,i}^1 \cdot x_i^{ид}} \cdot \left(1 + \gamma \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta a_{q,i} \cdot \Delta x_i^{ид}}{\sum_{i=1}^{n} a_{q,i}^1 \cdot \Delta x_i^{ид}}\right) =$$
$$= \left(\lambda_q^1 - \gamma \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta a_{r,i} \cdot x_i^{s-1}}{\sum_{i=1}^{n} a_{r,i}^1 \cdot x_i^{ид}}\right) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta a_{q,i} \cdot \Delta x_i^{s-1}}{\sum_{i=1}^{n} a_{q,i}^1 \cdot \Delta x_i^{ид}} \cdot \left(1 + \gamma \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta a_{r,i} \cdot x_i^{ид}}{\sum_{i=1}^{n} a_{r,i}^1 \cdot x_i^{ид}}\right). \tag{П.2.51.}$$

С л е д с т в и е 2. *В случае линейного приближения траектории* $(x^{s-1} = 0)$ *величина* γ^* *в условиях свойства* 6 *определяется из выражения*

$$\gamma^{**} = \frac{\lambda_q^1 - \lambda_r^1}{\lambda_r^1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta a_{q,i} \cdot \Delta x_i^{ид}}{\sum_{i=1}^{n} a_{q,i}^1 \cdot \Delta x_i^{ид}} - \lambda_й^1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{r,i} \cdot x_i^{ид}}{\sum_{i=1}^{n} a_{r,i}^1 \cdot x_i^{ид}}}. \tag{П.2.52}$$

Свойство 6 позволяет балансировать ограничения за счет изменения элементов матрицы *Ф*.

С в о й с т в о 7. Оптимальное решение задачи 2 лежит на множестве Парето ($P(F_A)$) области F_A.

С в о й с т в о 8. Если возможна комплектная поставка ресурсов, то оптимальное решение задачи 1 лежит только на множестве Парето области F_A (необходимое условие оптимальности).

С в о й с т в о 9.

а) Если F_B и F_A - выпуклые области, а $<\lambda^*, B^*, A^*, x^*>$- локально-оптимальное решение задачи 2 при фиксированных $x^0, \Delta x^{ид}$, то это решение будет глобально-оптимальным.

б) Если $\widetilde{F}(B), X^0, \Delta x^{ид}$ - выпуклые области, а $\lambda^{**}, B^{**}, x^* = x^{0,0} + \lambda^* \cdot \Delta x^{ид}$ - локально-оптимальное решение задачи 2 при фиксированных элементах матрицы *Ф*, то это решение будет глобально-оптимальным.

Это свойство дает возможность построить процедуры, в которых параметры *Ф* и *И* модели (или $B, x^{s-1}, x^{ид}$) определяются в произвольном порядке (например, сначала *А* при фиксированном *В*, затем *В* при фиксированном *А* или наоборот).

Рассмотренные свойства задачи 2 носят конструктивный характер и позволяют создать простые, легко интерпретируемые алгоритмы (см. гл. 5) решения задачи 1 как в частных случаях (когда НТП учитывается или нет, на уровне отдельных технологий или на уровне укрупненных технологий, когда возможна или невозможна комплектная поставка ресурсов), так и в общем случае.

Алгоритмы.

Рассмотрим сначала алгоритмы для перечисленных частных случаев задачи 2 при фиксированных значениях компонент $A, B, B^{\min}$.

Идея алгоритма оптимального распределения дополнительно выделенных ресурсов и перераспределения имеющихся в наличии средств по статьям расходов при фиксированных значениях *А* состоит в том, что он на каждом *k*-м шаге выделяет множество существенных ограничений P^0 по (П.2.32) и распределяет на них дополнительные ресурсы так, чтобы сохранялась сбалансированность (П.2.37). При этом показатель дефицитности λ_p этих ограничений увеличивается. Если показатель дефицитности ограничений из P^0 стал больше, чем показатель дефицитности какого-либо ограничения $p_1, p_1 \in P^0$, то определяется самое дефицитное ограничение из несущественных:

$$p_1 \in P_k^1 = \{\widetilde{p} \mid \lambda_{\widetilde{p}} = \min_{p \notin P_k^0} \lambda_p\}. \qquad (П.2.53)$$

Согласно свойству 3, для изменения ограничений из P_k^0 выделяется столько ресурсов, сколько необходимо, чтобы их показатель дефицитности сравнялся с показателем дефицитности ограничений из P_k^1.

Затем происходит расширение множества существенных ограничений $P_{k+1}^0 = P_k^0 \cup P_k^1$ и переход к следующему шагу. Если на некотором k_0-м шаге не происходит расширения множества P_k^0 , то это означает, что весь дополнительный ресурс распределен и проверяется возможность перераспределения имеющихся в наличии ресурсов. Для этого у несущественных ограничений отбирается «излишек» ресурсов и распределяется среди существенных. Геометрически процесс работы алгоритма эквивалентен последовательному сдвигу ограничений, приводящему к увеличению λ^*.

Алгоритм 1.

П р е д в а р и т е л ь н ы й шаг. Определение возможности сбалансировать ограничения λ^*, B^*, x^* определяется согласно (П.2.43)-(П.2.45).

Если B^* удовлетворяет ограничениям (П.2.13)-(П.2.15), то алгоритм работу заканчивает, если нет, то полагаем $\Delta K_0 = \Delta K, \overset{*}{\lambda_0}, p_0 \in P_0^0$, где $P_0^0 = P^0$, (определяется согласно (П.2.32)).

О б щ и й ш а г (распределение дополнительного ресурса).

а) Определяем P_k^1 по (6.2.64), $\lambda_1 = \lambda_{p_1}$. Если $P_k^1 = \varnothing$ то переход к п. г). Если $P_k^1 \neq \varnothing$, то

$$\Delta_k = \lambda_1 - \lambda_k^* - \frac{\Delta K_k}{\sum\limits_{p \in P_k^0} \alpha_p \cdot \Delta B_p^{ид}};$$

б) если $\Delta_k \geq 0$, то переход к п. г); если $\Delta_k < 0$, то переход к п. в).

в) $\Delta K_{k+1} = \Delta K_k - (\lambda_1 - \lambda_k^*) \cdot \sum\limits_{p \in P_k^0} \alpha_p \cdot \Delta B_p^{ид}$,

$$P_{k+1}^0 = P_k^0 \cup P_k^1, \lambda_{k+1} = \lambda_1;$$

полагаем k=k+1 и переходим к п. а);

г) распределение остатка ресурса ΔK_k:

$$\lambda^* = \lambda_k^* + \frac{\Delta K_k}{\sum\limits_{p \in P_k^0} \alpha_p \cdot B_p^{ид}}; \lambda_p = \lambda^*, p \in P_k^0;$$

$B_p^* = B_p^0 + (\lambda^* - \lambda_p^0) \cdot \Delta B_p^{ид}, p \in P_k^0$ и переход к п. д);

д) перераспределение наличных средств; определение $P^2 = P \setminus P^0$ - множества несущественных ограничений; если $\exists p \in P^2 : B_p > B_p^{\min}$, то алгоритм заканчивает работу; если $\exists p \in P^2 : B_p > B_p^{\min}$, , то переход к п. е);

е) снятие ресурсов с несущественных ограничений:

$$\Delta K_0 = \sum_{p \in P^2} (B_p - \max\{\lambda^* \cdot \Delta B_p^{ид}; B_p^{\min}\}), \lambda_0^* = \lambda^*, P_0^0 = P_k^0, K = 0,$$

переход к п. а).

У т в е р ж д е н и е 1. *Алгоритм сходится к оптимальному решению задачи* 2 *с траекторией вида* (П.2.22) *и с фиксированными значениями* $A, x^0, \Delta x^{ид}$ *не более чем за* $m - m_0 + 2$ *шагов, где* $m_0 = cardP_0^0, m = cardP$ *(P – множество всех ограничений).*

Заметим, что вид ограничений (П.2.40), (П.2.20), определяющий выбор значений $x^{\max}$ - ограничений по машиностроению, формально не отличается от ограничений вида (П.2.13)-(П.2.17) при $B^{\min}$ =0.

Следовательно, в этом случае применимо следствие 1 из свойства 3, т.е. оптимальные значения $x^{*,\max}$ выбираются по формулам

$$\tilde{\lambda}^* = \frac{\Delta K_m - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot x_i^0}{\sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot \Delta x_i^{ид}} \qquad (П.2.54)$$

$$x^{*,\max} = x^0 + \tilde{\lambda}^* \cdot \Delta x^{ид}. \qquad (П.2.55)$$

Для учета ограничений по машиностроению предложен алгоритм 2, идея которого состоит в том, что сначала задача 2 решается только с ограничениями (П.2.4)-(П.2.20), затем с ограничениями (П.2.13) - (П.2.17), и из полученных решений отбирается решение, допустимое для всех ограничений.

Алгоритм 2.

1. Учет ограничений по машиностроению. Значения $\tilde{\lambda}^* = x^{*,\max}$ определяются по (П.2.54).

2. Распределение средств по статьям расходов:

а) алгоритм 1 получает решение $< \lambda^*, B^*, x^* >$;

б) если $\tilde{\lambda}^* \le \lambda^*$, то полученное решение оптимально и алгоритм работу заканчивает;

в) если $\tilde{\lambda}^* > \lambda^*$, то формируется новое решение $\lambda^* = \tilde{\lambda}^*, x^* = x^{*,\max}, B^*$ и алгоритм заканчивает работу.

У т в е р ж д е н и е 2. *Алгоритм* 1, *а за один цикл* (*шаги* 1,2) *дает оптимальное решение задачи* 1 *при фиксированных* $A, x^0, \Delta x^{ид}$ *с учетом ограничений* (П.2.20).

Алгоритм 3. Учет НТП при комплексных поставках ресурсов используется в случае, если область $\tilde{F}(B)$ допускает балансирование ограничений за счет перераспределения средств по статьям расходов.

Алгоритм использует свойство 3 задачи 2, минимизируя дефицит суммарных ресурсов системы.

Схема алгоритма 3.

Э т а п 1. Выбор перспективных технологий.

О б щ и й i-й ш а г.

а) Если S_i имеет вид (6.43), то переходим к п. б), если S_i имеет вид (6.44), то переходим к п. в);

б) $M_j = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p a_{p,i}^j,\ j = 1,...,K_i;\ j^* = \arg\min_j M_j;\ \vec{a}_i^* = \vec{a}_i^{j,*}$, переходим к п. е);

в) полагаем $\gamma_j = \underline{\gamma}_j,\ j = 1,...,K_i$;

г) если $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$, то переходим к е);

д) $M_j = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p a_{p,i}^j, j^* = \arg\min M_j, \gamma_j^* = \min\{\bar{\gamma}_j^*\}$, переходим к п. г);

е) если $i=n$, то переходим к этапу 2, если $i<n$, то $i=i+1$ и переходим к п. а).

Э т а п 2. Определение степени достижения цели λ^{**}, вектора ресурсов B^*, значений x^*, Φ^* по формулам (П.2.37)-(П.2.42).

<u>У т в е р ж д е н и е 3.</u> *Оптимальное решение задачи* 2 *с траекторией вида* (П.2.22) *в случае, если возможны комплектные поставки ресурсов* (*т.е.* 2 *вектор* $B^{**} \in \tilde{F}_B$ *получается за одну итерацию, включающую выполнение этапов* 1 *и* 2).

Доказательство утверждения 3 непосредственно следует из свойства 3 задачи 2.

Алгоритм 4 выбора конкретных технологий из дискретного набора при фиксированных поставках ресурсов.

Алгоритм используется в случае, если F_A имеет вид (П.2.10), (П.2.11), что соответствует выбору технологии $\vec{a}_i$ из дискретного набора K_i конкурирующих между собой конкретных технологий и фиксированных значениях компонент вектора B. Алгоритм основан на свойстве 3 задачи 2. Идея алгоритма состоит в том, что при некоторых фиксированных $A, x^0, \Delta x^{ид}$ находится множество P^0 существенных ограничений. Из P^0 выбирается наименее чувствительное (в смысле (П.2.35)) к изменению матрицы A ограничение p_1. Это - ограничение, которому соответствует наибольший запрос ресурса $\Delta B_p^{ид}$. Далее, путем сокращенного перебора выбираются значения элементов матрицы A, позволяющие максимально увеличить показатель дефицитности λ_{p_1} p_1-го ограничения так, чтобы улучшилось общее решение λ^{**} , и цикл повторяется. Критерием останова алгоритма является невозможность увеличить показатель дефицитности какого-либо из существующих ограничений.

Геометрически это эквивалентно повороту плоскостей, соответствующих существенным ограничениям, приводящему к увеличению степени достижения цели.

Алгоритм 4.

Предварительный шаг. Для I=1,…,n в множестве S_i выделяем множество $\tilde{S}_i$ недоминируемых (парето - оптимальных) технологий

$$\tilde{S}_i = \{\vec{a}_i^j \mid \exists \vec{a}_i \in S_i : a_{p,i} \geq a_{p,j}^i\}.$$

Общий s-й шаг.

а) Полагаем $G = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, где $I_r = \{1,2,...,K_r\}$ - множество индексов технологий, принадлежащих набору $\tilde{S}_r$;

б) определяем P^0 по (П.2.33), $p_1 = \arg\max_{p \in P^0} B_p^{ид}$.

в) формируем вектор $\vec{q} = \{q_1,...,q_n\} \in G$:

$$M_{p_1} = \sum_{i=1}^{n} (a_{p_1,i}^{q_i} - a_{p_1,i}) \cdot (x_i^0 + \lambda \cdot p_1 \cdot \Delta x_i^{ид});$$

г) если $M_{p_1} \geq 0$, то $G = G \setminus \vec{q}$, и переходим к п. з). Если $M_{p_1} < 0$, то переходим к п. д);

д) контроль монотонности: $P^1 = \{p \mid M_p \geq 0\}$, где

$$M_p = \sum_{i=1}^{n} (a_{p,i}^{q_i} - a_{p,i}) \cdot (x_i^0 + \lambda \cdot p_1 \cdot \Delta x_i^{ид}).$$

Если $P^1 \bigcap P^0 = \varnothing$, то переходим к п.е). Если $P^1 \bigcap P^0 \neq \varnothing$, то $G = G \setminus \vec{q}$, и переходим к п.з);

е) определяются $\Delta\lambda_p, p \in P^1$ по (П.2.34), $p_2 = \arg\min_{p \in P^1}(\lambda_p + \Delta\lambda_p)$; если $\lambda_{p_2} + \Delta\lambda_{p_2} \leq \lambda_{p_1}$, то $G = G \setminus \vec{q}$, и переходим к п.з); Если $\lambda_{p_2} + \Delta\lambda_{p_2} > \lambda_{p_1}$, то переходим к п. ж);

ж) $\vec{a}_1^0 = \vec{a}_i^{q_i}, i = 1,...,n,\ G = G \setminus \vec{q}$, переходим к п. з);

з) если $G \neq \varnothing$, то переходим к п. б); если $G = \varnothing$, то алгоритм заканчивает работу.

Утверждение 4. *Алгоритм 4 сходится к оптимальному решению задачи 1 с траекторией вида (П.2.22) при фиксированных значениях* $B, x^{s-1}, x^{ид}$ *не более чем за* $N = r_1, r_2, ..., r_n$ *итераций, где* $r_i = card\tilde{S}_i$, $\tilde{S}_i$ *- Множество Петри.*

На каждом шаге алгоритма отбрасывается решение $\vec{a}_1^{q_1},...,\vec{a}_n^{q_n}$, худшее, чем решение $\vec{a}_1^0,...,\vec{a}_n^0$ (в силу пп. г)-е) и следствия 1 из свойства 3). Всего таких шагов будет $N = cardG = r_1,...,r_n$, т.е. алгоритм сходится за N шагов к решению $\vec{a}_1^*,...,\vec{a}_n^*$, которое в силу пп. г) - е) и свойств 6, 7 будет оптимальным.

Идея алгоритма выбора параметров укрупненных технологий в условиях, когда поставки ресурсов фиксированы, состоит в том, что определяется множество существенных ограничений P^0 и находятся изменения ΔA^* параметров A^0, позволяющие максимально снизить дефицитность ограничений из P^0. Затем ΔA^* корректируется так, чтобы решение не ухудшалось за счет ограничений, не лежащих в P^0 . Далее цикл повторяется.

Алгоритм 5.

1. Определение P^0 по (П.2.32): $\lambda_p, p = 1,...,m,$ по (П.2.31).

2. Определение $\|\Delta a^*_{p,i}\|$ как решение задачи

$$\min_{p\in P^0} -(\sum_{i=1}^{n} \Delta a_{p,i} \cdot (x_i^{s-1} + \lambda^* \cdot \Delta x_i^{ид})) / B_p^{ид} \to \max,$$
$$\vec{a}_i \in S_i, i = 1,...,n.$$

3. $$\Delta\lambda = \min_{p\in P^0} -(\sum_{i=1} \Delta a^*_{p,i} \cdot (x_i^{s-1} + \lambda_0^* \cdot \Delta x_i^{ид})) / B_p^{ид} \to \max.$$

Если $\Delta\tilde{\lambda} = 0$, то алгоритм оканчивает работу, причем $\vec{a}_i^* = \vec{a}_i^0, i = 1,...,n$.

Если $\Delta\tilde{\lambda} > 0$, то переходим к п.4.

4. Контроль монотонности:

а) $\tilde{P} = \{p \mid \sum_{i=1}^{n} \Delta a^*_{p,i} \cdot (x_i^0 + \lambda_0^* \cdot \Delta x_i^{ид}) > 0\},$, если $\tilde{P} = \varnothing$, то переходим к п.4,в);

б) определение $\lambda_p, p \in \tilde{P}$ по (П.2.31): если $\min_{p\in\tilde{P}}(\lambda_p + \Delta\lambda_p) \ge \lambda^* + \Delta\lambda^*,$ то переходим к п. 4,в); если $\min_{p\in\tilde{P}}(\lambda_p + \Delta\lambda_p) < \lambda^* + \Delta\lambda^*,$ то переходим к п. 5;

в) $\lambda^* = \lambda^* + \Delta\lambda^*, \vec{a}_i^0 = \vec{a}_i^0 + \Delta\vec{a}_i^*, i = 1,...,n,$ переходим к п.1.

5. Коррекция $\|\Delta\vec{a}^*_{p,i}\|$:

а) $p_1 = \min_{p\in P^0}(\lambda_p^0 + \lambda_p),\ p_2 = \min_{p\in P^0}(\lambda_p^0 + \lambda_p)$;

б) $\gamma^* \in (0,1)$ определяется как корень квадратного уравнения $\lambda_{p_1}(\gamma) = \lambda_{p_2}(\gamma)$, где $\lambda_p(\gamma)$ определяется согласно (П.2.52);

в) Если $\lambda_{p_1}(\gamma) > \lambda_{p_2}(\gamma), \forall p, p \in \tilde{P} \cup P^0,$ то $\vec{a}_i^0 = \vec{a}_i^0 + \gamma^* \cdot \Delta\vec{a}_i^*, i = 1,...,n,$, переходим к п.1;

г) $\Delta\vec{a}_i^* = \gamma^* \cdot \Delta\vec{a}_i^*$; переходим к п.5,а).

<u>У т в е р ж д е н и е 5.</u> *Алгоритм* 5 *сходится к фиксированному решению задачи 1 с траекторией* (П.2.32) *при фиксированных* $B, x^{s-1}, x^{ид}$.

В общем случае, когда постановки не фиксированы, но комплексная их поставка невозможна, используется общий алгоритм 6, на каждом шаге которого последовательно применяется алгоритм 5 оптимального распределения дополнительных и перераспределения имеющихся в наличии ресурсов и алгоритм 3 или 4, учитывающий влияние НТП.

Поступила: 6 июля 2007 г.