

ХАОТИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ С РЕДКИМИ АТТРАКТОРАМИ

© В.Ю.Евстигнеев¹, М.В.Закржевский¹, И.Т.Щукин², Р.С.Смирнова²

¹Рижский технический университет, Институт механики, Латвия, Рига

²Рижский технический университет, Даугавпилсский филиал, Латвия, Даугавпилс

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены топологические структуры островного типа, в которых имеет место рождение хаотических аттракторов. Показано, что типовой структурой островов такого типа являются, на плоскости двух параметров, замкнутые оболочки с периодическим режимом nT на границе оболочки (вблизи бифуркации типа складка) и бесконечным числом неустойчивых периодических режимов внутри области. Показано существование хаотических аттракторов в тонком слое оболочки, что является типовым топологическим элементом хаотической динамики при вынужденных нелинейных колебаниях. Показана также топологическая эквивалентность устойчивых регулярных и хаотических аттракторов этих оболочек с редкими аттракторами конечного типа в различных нелинейных системах.

Ключевые слова: топологические структуры, хаотические аттракторы.

Введение

Известно, что при вынужденных колебаниях существенно нелинейных систем хаотические аттракторы появляются в результате механизма удвоения периода при изменении параметров системы, например, амплитуды или частоты вынуждающей силы, см. например [1-10]. Использование метода полных бифуркационных групп [7] позволяет выявить различные бифуркационные группы с бесконечным числом неустойчивых периодических режимов (UPI – Unstable Periodic Infinitium), существование которых является необходимым условием рождения хаотических аттракторов. В настоящей работе рассматриваются топологические структуры островного типа [5-10], в которых имеет место рождение хаотических аттракторов. Как правило, эти структуры являются субгармоническими островами на бифуркационных диаграммах состояние-параметр. В работе показано, что типовой структурой островов такого типа является, на плоскости двух параметров, замкнутая оболочка с периодическим режимом nT на границе оболочки (вблизи бифуркации типа складка) и UPI внутри области. Показано существование хаотических аттракторов в тонком слое оболочки, на плоскости двух параметров, что является типовым топологическим элементом хаотической динамики при вынужденных нелинейных колебаниях. Показана также топологическая эквивалентность устойчивых регулярных и хаотических аттракторов этих оболочек с редкими аттракторами конечного типа, обнаруженных ранее в различных нелинейных системах [5-7].

Субгармонические острова с редкими аттракторами конечного типа на плоскости состояние-параметр

В настоящее время известно, что одним из типовых элементов бифуркационных диаграмм для диссипативных систем являются субгармонические острова с редкими аттракторами конечного типа. Такие острова существуют, например, в системе $\ddot{x} + b\dot{x} + f(x) = h \cos \omega t$, где упругая характеристика имеет различный вид: квадратичная $f(x) = x|x|$, кубическая $f(x) = x^3$, Дуффинга $f(x) = x + x^3$, билинейная, трилинейная, маятниковая $f(x) = a_1 \sin(\pi x)$ и др. (рис. 1,а-с), а также каскады таких островов (рис. 1,д). Как уже отмечалось, рождение бесконечного числа неустойчивых периодических режимов (UPI) происходит после удвоения соответствующего периода, причём, существование устойчивых

периодических режимов наблюдается лишь вблизи границ острова. Поэтому эти режимы являются редкими аттракторами. Типовой фрагмент бифуркационной диаграммы, соответствующий редкому аттрактору конечного типа, показан на рис. 2. Как уже отмечалось, структура бифуркационных кривых вблизи оконечности субгармонических островов подобна структуре редких аттракторов бифуркационных групп 1Т (рис. 3).

Субгармонические острова с редкими аттракторами конечного типа на плоскости двух параметров

Перейдём к рассмотрению субгармонических островов с конечными редкими аттракторами на бифуркационных картах, т.е. на плоскости двух параметров. Можно показать, что в этом случае для ряда нелинейных систем существуют двумерные структуры, топологически эквивалентные многослойной тонкостенной структуре. А в пространстве трёх параметров сферической тонкой многослойной оболочке. Внешний слой соответствует редкому периодическому режиму nT , а внутренние слои с уменьшающейся толщиной периодическим режимам $2nT$, $4nT$, ..., и затем, как правило, тонкий слой, соответствующий хаотическим аттракторам.

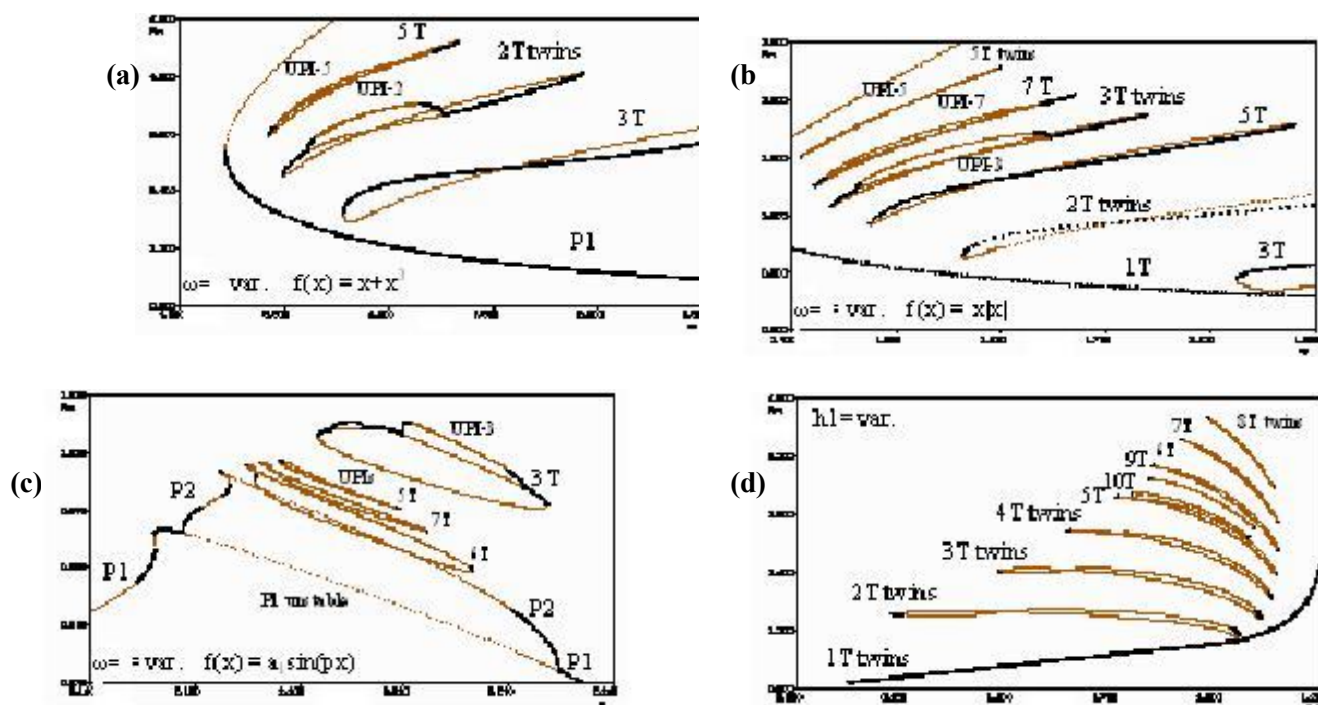


Рис. 1. Субгармонические острова с редкими аттракторами конечного типа в нелинейной системе $\ddot{x} + b\dot{x} + f(x) = h \cos \omega t$, с различными видами восстанавливающих сил: (а) остров 5Т в системе Дуффинга; (б) острова 5Т и 7Т в квадратичной системе; (в) острова 5Т-7Т в маятниковой системе; (д) каскад субгармонических островов 2Т-10Т с редкими аттракторами конечного типа в кусочно-линейной системе с зазором. Бифуркационные диаграммы – (а-с) амплитуда колебаний от частоты возбуждения и (д) амплитуда колебаний от амплитуды возбуждения. Тёмным цветом показаны устойчивые режимы, светлым – неустойчивые.

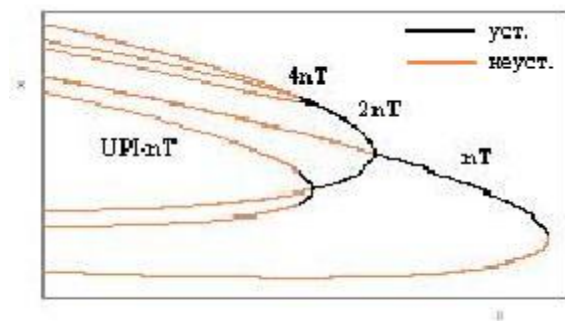


Рис.2. Типовой фрагмент бифуркационной диаграммы, соответствующий редкому аттрактору концевому типа с бесконечным числом неустойчивых периодических режимов (UPI)

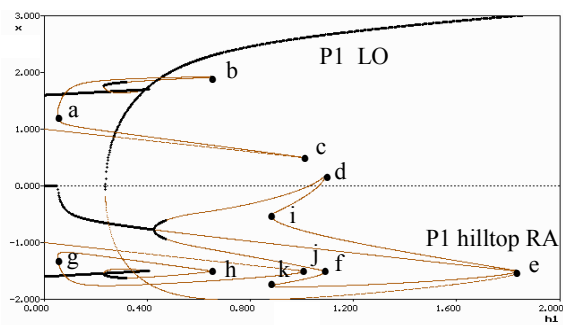


Рис. 3. Редкие аттракторы концевому типа a-k трёх бифуркационных групп 1T в кусочно-линейной с тремя потенциальными ямами симметричной системе

Рассмотрим более подробно топологию субгармонических бифуркационных групп для наиболее простой нелинейной системы с билинейной упругой характеристикой. На бифуркационной карте ω - b (рис. 4) показаны шесть бифуркационных групп, представляющих собой субгармонические острова с редкими аттракторами концевому типа – 3T и 5T-9T. Наличие таких островов приводит к тому, что в системе рождаются устойчивые хаотические колебания (хаотические аттракторы), однако, они существуют в узком диапазоне параметра. Бифуркационный анализ, проведенный для различных систем, позволяет предположить, что всегда имеется слой периодических режимов и слой с хаотическими аттракторами, которые для многих систем являются тонкими, что и обуславливает использование термина «оболочка». На рис. 5 показано сечение бифуркационной карты (рис. 4), на котором помимо основной бифуркационной группы имеется два субгармонических острова с редкими аттракторами на концах 6T и 8T,

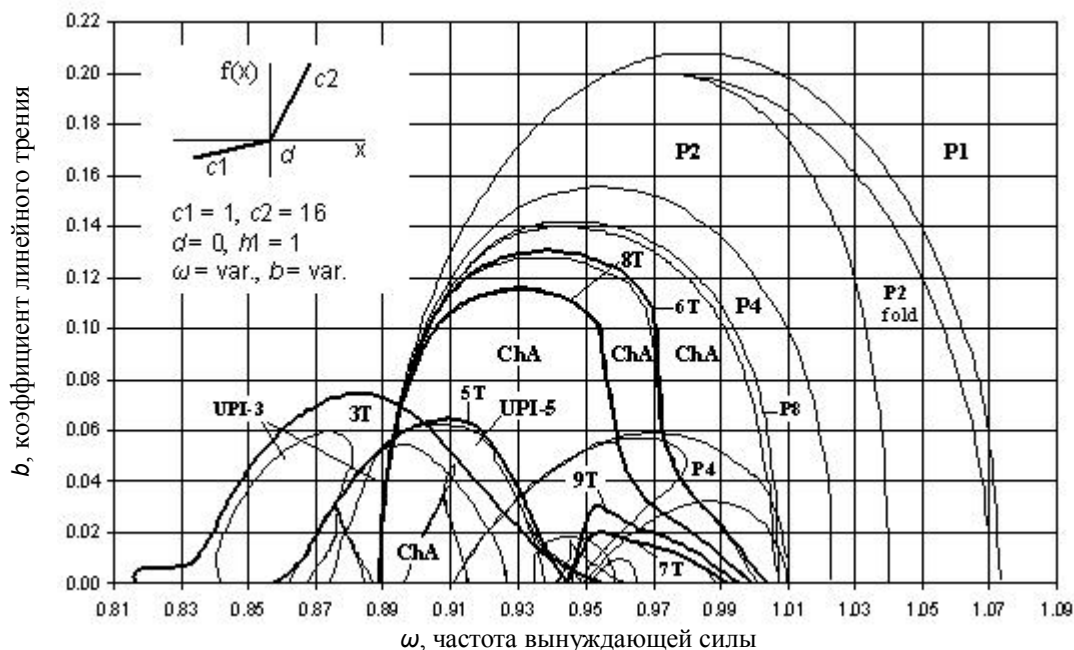


Рис. 4. Бифуркационная карта с шестью областями субгармонических островов с редкими аттракторами концевго типа 3T, 5T-9T (отмечены жирными линиями, соответствующими бифуркациям типа складка) для системы с билинейной упругой характеристикой и линейным трением при гармоническом возбуждении на плоскости параметров ω - b . Параметры: $m = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 16$, $d = 0$, $h_1 = 1$, $\varphi_0 = 0$, $k = 7$, $\omega = \text{var.}$, $b = \text{var.}$

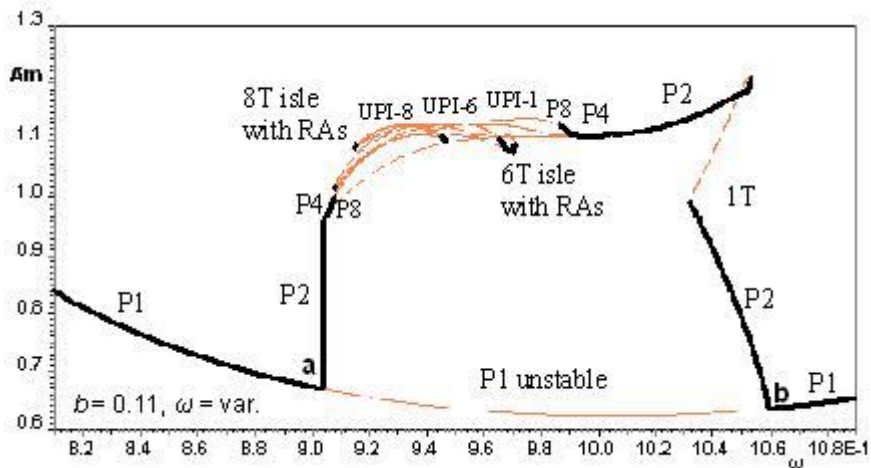
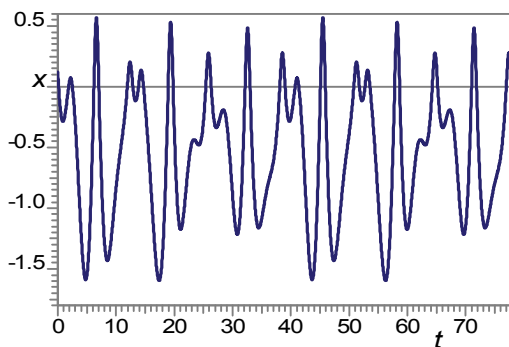
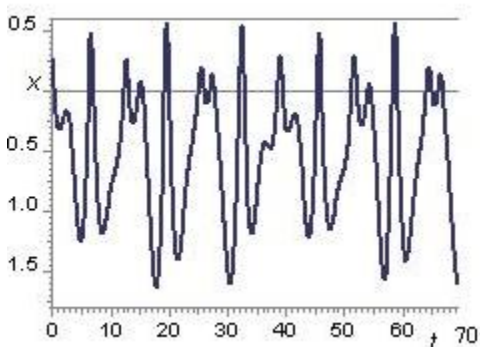
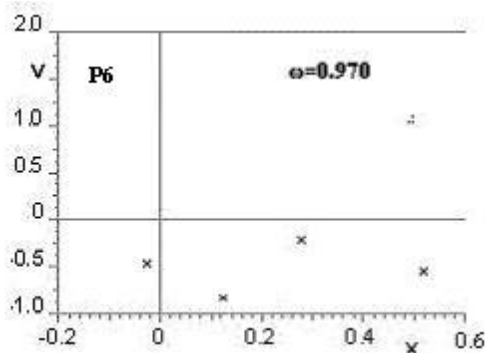


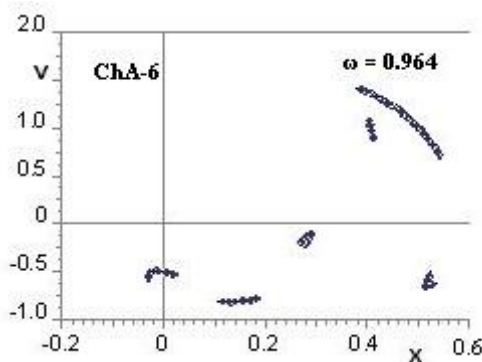
Рис. 5. Бифуркационные группы субгармонических островов 6T и 8T с обеих сторон оканчиваются редкими аттракторами концевго типа. Сечение бифуркационной карты, представленной на рис. 4. Амплитуда колебаний A_m периодического режима от частоты вынуждающей силы ω . Параметры: $m = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 16$, $d = 0$, $b = 0.11$, $h_1 = 1$, $\varphi_0 = 0$, $k = 7$, $\omega = \text{var.}$

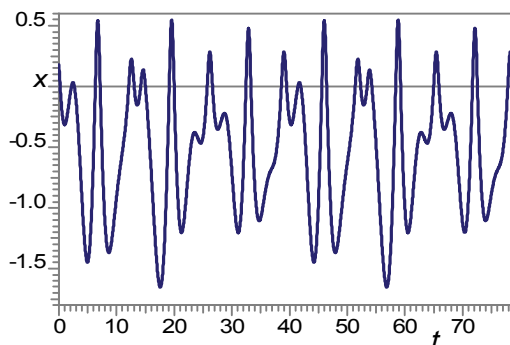


(a)



(b)





(с)

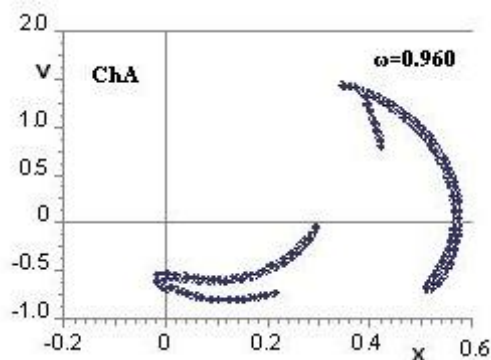


Рис. 6. Каскад удвоения периода субгармонического режима P6 (а) приводит к появлению хаотического аттрактора ChA-6 (b), однако, при дальнейшем изменении параметра реализуется хаотический аттрактор ChA (с), соответствующий бифуркационной группе 1Т (см. рис. 5) в системе с билинейной упругой характеристикой. Временные зависимости и плоскости Пуанкаре. Начальные условия и количество показанных периодов для плоскости Пуанкаре: (а) P6 (0.12036249, -0.81781539), 12Т; (b) ChA-6 (0.163255, -0.778966), 5000Т; (с) ChA (0.180723, -0.750709), 5000Т. Параметры: $m = 1, c_1 = 1, c_2 = 16, d = 0, b = 0.11, h_1 = 1, \varphi_0 = 0, k = 7, \omega = \text{var.}$

соответствующие описанному случаю. Для бифуркационной группы 6Т данный случай проиллюстрирован также на примере законов движения и сечений Пуанкаре (рис. 6). Аналогичная ситуация наблюдается в системе с трilinearной упругой характеристикой, для которой показан, для примера, субгармонический остров с аттракторами конечного типа 3Т (рис. 7-9). Рассматриваемые острова встречаются во всех исследуемых системах при вынужденных колебаниях. Соответственно количество хаотических аттракторов значительно больше, чем обычно находится в системах без применения метода полных бифуркационных групп.

На плоскости двух параметров может оказаться, если нелинейность системы увеличивается, что тонкий слой с редкими периодическим и хаотическим аттракторами уходит в бесконечность при изменении одного из параметров системы, т.е. топологическая структура может быть незамкнутой. По-видимому, могут существовать и другие более сложные структуры.

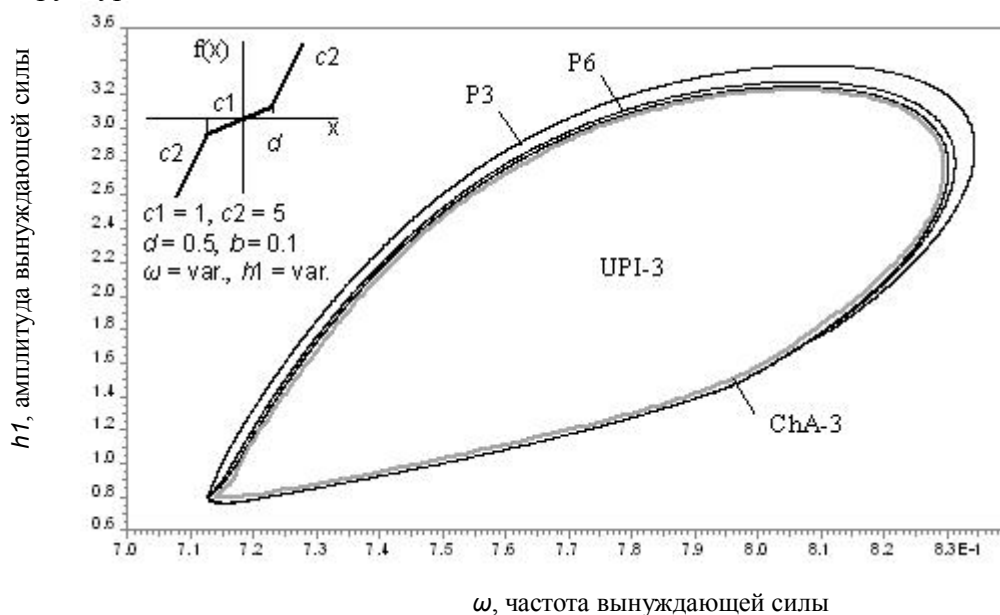


Рис. 7. Бифуркационная карта субгармонического острова 3Т с редкими аттракторами концевой типа и многослойной структурой с хаотической оболочкой для системы с симметричной трилинейной упругой характеристикой и линейным трением при гармоническом возбуждении на плоскости параметров ω - $h1$. Параметры: $m = 1, c1 = 1, c2 = 5, d = 0.5, b = 0.1, \varphi0 = 0, k = 7, \omega = \text{var.}, h1 = \text{var.}$

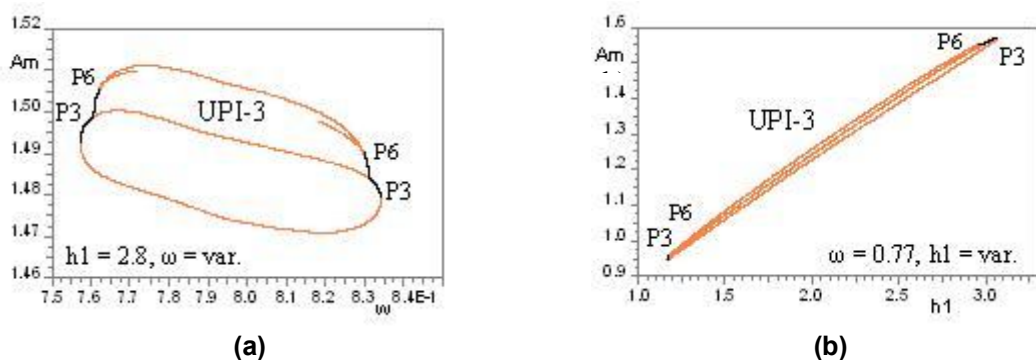
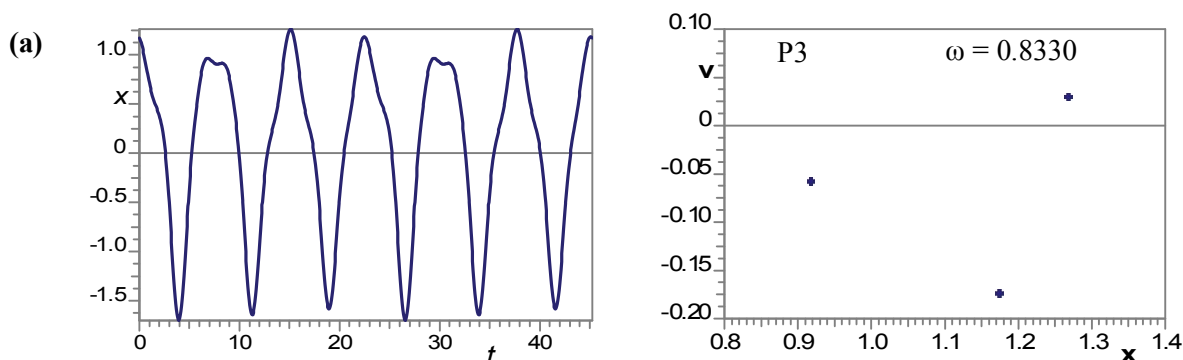


Рис. 8. Бифуркационные диаграммы – сечения бифуркационной карты (рис. 7) субгармонического острова 3Т. Редкий аттрактор концевой типа существует по всему периметру острова, образуя оболочку. Амплитуда колебаний Am периодических режимов от: (а) частоты вынуждающей силы; (b) амплитуды вынуждающей силы. Параметры: $m = 1, c1 = 1, c2 = 5, d = 0.5, b = 0.1, \varphi0 = 0, k = 7$

О существовании хаотических оболочек

Бифуркационная подгруппа с бесконечным числом неустойчивых периодических режимов (UPI) существует в широком диапазоне параметров. Устойчивые режимы, связанные с данной бифуркационной подгруппой, реализуются только в узких диапазонах параметра, а соответствующие хаотические колебания в ещё более узких диапазонах. Внутри оболочки существование UPI сказывается лишь на характере переходных режимов (chaotic transient) к тому или иному регулярному или хаотическому аттрактору другой бифуркационной группы и не приводит к хаотическому аттрактору этой бифуркационной группы (рис. 6, 9).



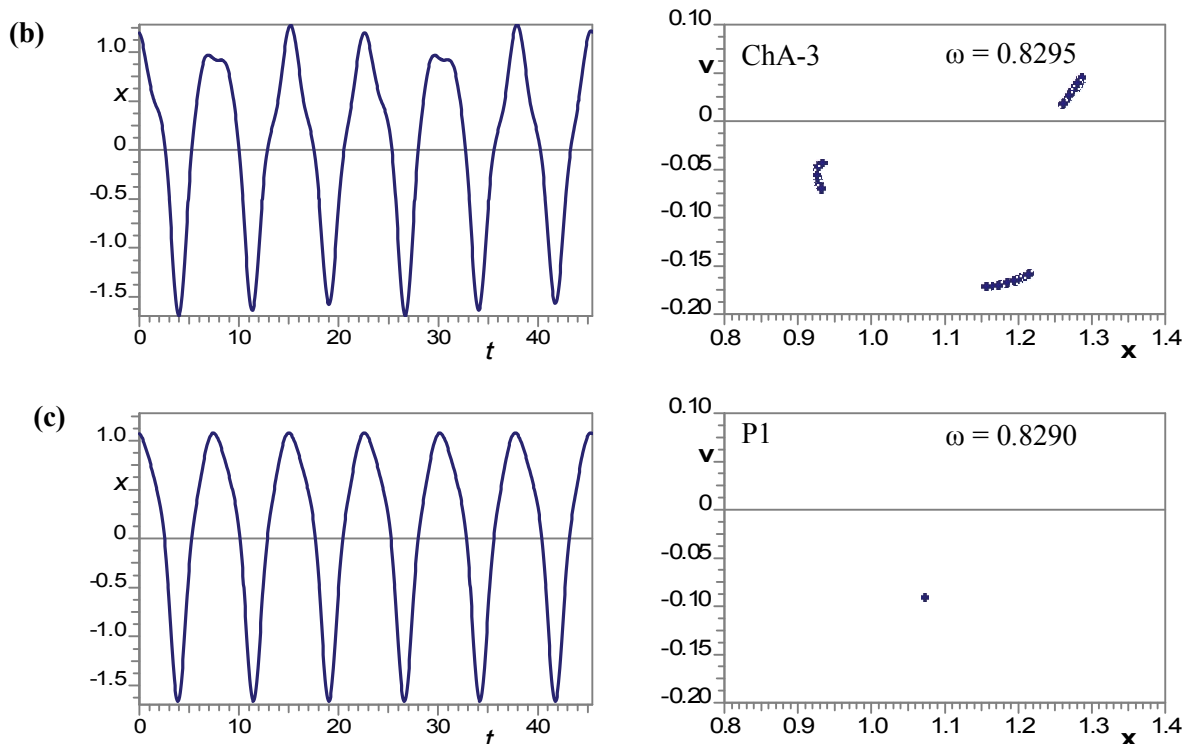


Рис. 9. Каскад удвоения периода субгармонического режима P3 (а) приводит к появлению хаотического аттрактора ChA-3 (b), однако, при дальнейшем изменении параметра реализуется периодический режим P1 (c), соответствующий бифуркационной группе 1T в системе с трилинейной упругой характеристикой. Временные зависимости и плоскости Пуанкаре. Начальные условия и количество показанных периодов для плоскости Пуанкаре: (а) P3 (1.196010, -0.160695), 6T; (b) ChA-3 (1.196010, -0.160695), 5000T; (c) P1 (1.069496, -0.088987), 2T. Параметры: $m = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 5$, $d = 0.5$, $b = 0.1$, $h_1 = 2.8$, $\varphi_0 = 0$, $k = 7$, $\omega = \text{var}$.

Рассматриваемые редкие хаотические аттракторы, существующие в оболочке, по амплитудам колебаний могут быть как больше, так и меньше других «обычных» аттракторов. Иллюстрации в статье относятся к системе с одной степенью свободы с внешним периодическим воздействием (размерность 3D), однако, существование аналогичных структур имеет место и для систем с двумя степенями свободы и большей размерности. Редкие хаотические аттракторы оболочечного типа могут быть глобально устойчивыми, но чаще сосуществуют с другими аттракторами.

Редкие хаотические аттракторы оболочечного типа имеют большое значение для приложений. Они могут нарушать функционирование работы оборудования, транспортных средств, аэрокосмических аппаратов и т.д. При этом рассматриваемые редкие хаотические и периодические аттракторы остаются незамеченными при традиционных методах анализа нелинейных систем.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены топологические структуры островного типа, в которых имеет место рождение хаотических аттракторов. Показано, что типовой структурой островов такого типа являются, на плоскости двух параметров, замкнутые оболочки с периодическим режимом nT на границе оболочки (вблизи бифуркации типа складка) и бесконечным числом неустойчивых периодических режимов внутри области. Показано существование хаотических аттракторов в тонком слое оболочки, что является

типовым топологическим элементом хаотической динамики при вынужденных нелинейных колебаниях. Показана также топологическая эквивалентность устойчивых регулярных и хаотических аттракторов этих оболочек с редкими аттракторами конечного типа в различных нелинейных системах.

Исследования проводятся в рамках гранта Латвийской академии наук Nr 09.1073.

Литература

1. Guckenheimer J. and Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, Applied Mathematical Sciences, Volume 42, 1983.
2. Ueda Y. The Road to Chaos - II, Aerial Press Inc. - Santa Cruz, 2001.
3. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики, Москва, 2004.
4. Thompson, J.M.T. and Stewart, H.B. Nonlinear Dynamics and Chaos, 2nd Edition, Wiley, 2002.
5. Zakrzhevsky M. Nonlinear Oscillatory and Vibro-Impact Systems: Rare Attractors, in V.K.Astashev and V.L.Krupenin (eds.) The Dynamics of Vibroimpact (Strongly Nonlinear) Systems, Russian Academy of Sciences, Moscow-Zvenigorod, 2001, pp. 156-162.
6. Закржевский М.В., Типовые бифуркационные группы в теории нелинейных колебаний, Труды XV симпозиума «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем, РАН, Москва, 2006, с. 116-122.
7. Zakrzhevsky M.V. *New concepts of nonlinear dynamics: complete bifurcation groups, protuberances, unstable periodic infinitiums and rare attractors // Journal of Vibroengineering*, 2008, Volume 10, Issue 4, 421-441.
8. Yevstignejev V.Yu., Zakrzhevsky M.V., Schukin I.T. *Bifurcation analysis by method of complete bifurcation groups of the driven system with two degrees of freedom with three equilibrium positions // Journal of Vibroengineering*, 2008, Volume 10, Issue 4, 519-528.
9. Smirnova R.S., Zakrzhevsky M.V., Yevstignejev V.Yu., Schukin I.T., *Paradoxes of increasing linear damping in the nonlinear driven oscillators // Journal of Vibroengineering*, 2008, Volume 10, Issue 4, 529-537.
10. Евстигнеев В.Ю. Применение метода полных бифуркационных групп для анализа существенно нелинейных колебательных и виброударных систем, Диссертация, Рига, 2008.

Поступила: 17.06.09.