УДК 519.6; 519.85

ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЛП-ПОИСКА

И.Н. СТАТНИКОВ, Г.И. ФИРСОВ

Проведение цифрового моделирования динамики систем с несколькими ударными парами требует моделировать для каждой из соударяющихся масс две различные системы дифференциальных уравнений движения, а именно, уравнения «свободного» движения массы в зазоре и уравнения движения массы в контакте с ограничителем. При этом следует учитывать, что в процессе моделирования типы интервалов движения для каждой из масс могут сочетаться произвольным образом. Дальнейший анализ будем иллюстрировать на примере двумерного движения массы в зазоре (i = 1, 2), моделирующего колебания i-го сечения теплообменной трубы [1],

$$m_i\ddot{x}_i + p_{ix}(\dot{x},\dot{y}) + q_{ix}(x,y) = F_{ix}(t),$$
$$m_i\ddot{y}_i + p_{iy}(\dot{x},\dot{y}) + q_{iy}(x,y) = F_{iy}(t).$$

(1)

Здесь m_i - масса, приведенная к рассматриваемому i-му сечению; $p_{ix}(\dot{x},\dot{y}), p_{iy}(\dot{x},\dot{y})$ - проекции на оси x и y сил сопротивления движению, которые предполагаются зависящими как от скоростей в i-м сечении, так и от скоростей относительного перемещения сечения; $q_{ix}(x,y), q_{iy}(x,y)$ - проекции упругой силы, зависящие от величин абсолютного смещения i-го и относительного смещения обоих сечений из положения статического равновесия, отвечающего недеформированному состоянию упругой системы; $F_{ix}(t), F_{iy}(t)$ - внешние силы, возбуждающие колебания, которые задаются в виде явных функций времени.

В предположении линейности диссипативных и упругих сил в (1) запишем систему уравнений на интервалах движения в зазоре в следующем виде

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) = P_{1x}\sin\omega t,$$
$$m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 + c_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2(y_1 - y_2) = P_{1y}\sin 2\omega t,$$

(2)

$$m_2\ddot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + c_3\dot{x}_2 + k_3x_2 = P_{2x}\sin\omega t,$$
$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) + c_3\dot{y}_2 + k_3y_2 = P_{2y}\sin 2\omega t.$$

(3)

Удвоенная частота возбуждающей силы, действующей по оси *y*, соответствует вихревому характеру возбуждения колебаний трубы потоком жидкости [2]. Система уравнений (2), (3) может использоваться только при движении обеих масс без контакта с ограничителем. В рассматриваемой модели предполагается, что каждая из масс совершает плоское поступательное движение, причем и массы, и ограничители имеют круглую форму. Соответствующие геометрические характеристики масс и ограничителей обозначим так: r_{i1} - радиус i-й массы; r_{i2} - радиус ограничителя; $\Delta_i = r_{i2} - r_{i1}$ - максимальное относительное перемещение центра i-й массы в зазоре; e_{ix} , e_{iy} - координаты центра для i-го ограничителя (эксцентриситеты). При недеформированном состоянии упругой системы координаты центров обеих масс равны нулю, $x_i = y_i = 0$, что вытекает из системы уравнений (2), (3), другими словами, начало системы координат совпадает с недеформированным положением системы.

В соответствии с принятой моделью интегрирование уравнений движения (2), (3) осуществляется лишь при выполнении следующих геометрических условий

$$(x_i(t) - e_{ix})^2 + (y_i(t) - e_{iy})^2 < \Delta_i^2, \quad i = 1, 2.$$

Когда одно из неравенств нарушается, то происходит удар соответствующей массы об ограничитель. Будем использовать традиционное допущение о том, что продолжительность удара пренебрежимо мала, принимая, как это принято в теории виброударных систем [3], удар мгновенным. Подчеркнем, что указанное допущение не препятствует рассмотрению интервалов скольжения массы по ограничителю, которые могут возникать после ударов. При мгновенном ударе скорость массы изменяется скачком, что позволяет описывать процесс такого улара безотносительно к текущему динамическому состоянию другой системы, положение и скорость которой остаются при ударе неизменными.

Подчеркнем, что двумерный характер движения массы в зазоре приводит к необходимости рассматривать процесс косого удара, когда относительная скорость элементов ударной пары включает как нормальную, так и тангенциальную составляющие к поверхности этих элементов в точке контакта.

Основные положения по формированию системы уравнений и алгоритмам расчета динамики рассматриваемой системы приведены в работе [4]. К анализируемым динамическим характеристикам относятся следующие: A_i - полное число ударов i-й массы; $\Sigma|u_{i-}|$, $\Sigma|v_{i-}|$ - накопленные тангенциальная и нормальная составляющие скорости удара i-й массы; τ_i, $\Sigma|s_i|$ - полная длительность режима скольжения и полный путь скольжения i-й массы; $\int \Phi_{in} dt$ - полный импульс силы нормального давления при скольжении i-й массы. После завершения процесса моделирования полученные накопленные значения динамических характеристик нормируются. Величины A_i делятся на число периодов интегрирования, так что нормированные значения определяют среднее число ударов на период возбуждающей силы, если эта величина равна нулю, то имеет место безударный режим чистого скольжения. Остальные характеристики нормируются длительностью интервала реализации, определяя среднее значение соответствующего критерия в единицу времени.

Помимо перечисленных выше в отдельных вычислительных экспериментах определялись и характеристики «комплексного» характера, относящиеся к ударным взаимодействиям и к режиму скольжения. Такими характеристиками являются, соответственно, средняя полная скорость удара $\sqrt{(u_{i-})^2+(v_{i-})^2}$ и среднее значение работы сил трения скольжения $\int f \Phi_{in} ds_i$, где f - коэффициент ударного трения, определяющий уменьшение тангенциальной составляющей скорости удара вследствие мгновенного проскальзывания соударяющихся тел.

Очевидно, что сколько-нибудь подробный анализ динамики рассматриваемой системы в зависимости от каждого из основных параметров, в том числе величин зазоров Δ_i, эксцентриситетов e_{ix}, e_{iy}, амплитуд возмущающих сил P_{ix}, P_{iy}, частоты возбуждения ω и диссипативных коэффициентов, практически невозможен, поскольку для такого анализа требуется проводить моделирование динамики при всевозможных сочетаниях остальных параметров.

С учетом сказанного целесообразно применить для анализа зависимостей динамических характеристик от значений отдельных конструктивных параметров (зазоров, эксцентриситетов в ударных парах и т.д.) в широком диапазоне изменения этих параметров метод планируемого ЛП-поиска (ПЛП-поиска) [5]. Данный метод, объединяя идеи метода Монте-Карло, позволяющих квазиравномерный выбор точек в многомерной области пространства параметров, в которой проводится моделирование, и подходы планирования экспериментов, выделяющие значимые параметры и области концентрации наилучших решений. В основание метода положена рандомизация расположения векторов $\bar{\alpha}$ в области $G(\bar{\alpha})$, задаваемой неравенствами типа $\alpha_{j*} \le \alpha_j \le \alpha_{j**}$ ($j=\overline{1,J}$, а само J - число варьируемых параметров; $J=\overline{1,N}$) и рассчитываемых с помощью ЛП$_\tau$ - сеток [6]. На сегодняшний день в ПЛП-поиске используются величины $J \le 51$ и $N < 2^{20}$.

Процесс рандомизации расположения векторов $\bar{\alpha}$ в области $G(\bar{\alpha})$ состоит в случайном смешении уровней параметров α_{ijhk} тем или иным способом, где $i = \overline{1, M(j)}$ - номер уровня, а $M(j)$ - число уровней варьируемого j-го параметра по k-му критерию; $h = \overline{1, H_{ijk}}$, а H_{ijk} - число значений k-го критерия $\Phi_k(\bar{\alpha})$ на i-м уровне j-го параметра; $k = \overline{1, K}$ - номер критерия, где K -количество критериев качества. В результате обработки всех N вычислительных экспериментов, проведенных на математической модели, появляются выборочные множества значений $\{\bar{\Phi}_{ijk}(\alpha_{ij})\}$, где $\bar{\Phi}_{ijk}(\alpha_{ij})$ - среднее значение k-го критерия качеств в i-м сечении j-го варьируемого параметра. Естественно рассматривать множество значений $\{\bar{\Phi}_{ijk}(\alpha_{ij})\}$ как аналог чувствительности в среднем критерия $\Phi_k(\bar{\alpha})$ к изменениям параметра α_j при возможных сочетаниях значений других варьируемых параметров в заданной области $G(\bar{\alpha})$.

Анализ графических зависимостей $\bar{\Phi}_{ijk}$ от α_{ij} позволяет визуально (конечно, приближенно) выделять области $G_k(\bar{\alpha}) \subseteq G(\bar{\alpha})$, концентрированно содержащие наилучшие результаты по $\Phi_k(\bar{\alpha})$, и одновременно, область $G_0(\bar{\alpha}) \subseteq G(\bar{\alpha})$, в которой сконцентрировано множество Парето-решений, либо компромиссных решений, если задана какая-либо схема компромисса. Разумеется, такой анализ подается и автоматизации, что требует дополнительной программной реализации. На сегодняшний день все алгоритмы ПЛП - поиска реализованы в пакете MATLAB [7]. Структура разработанного пакета включает следующие основные этапы: 1) определение существенных параметров α_m ($m \le J$) в смысле их влияния на значения каждого критерия $\Phi_k(\bar{\alpha})$; 2) выделение областей концентрации $G_k(\bar{\alpha})$ наилучших решений по каждому критерию $\Phi_k(\bar{\alpha})$ при заданной метрике $\rho(\Phi_k(\bar{\alpha}), \Phi_k^+)$ где Φ_k^+ - экстремальное значение k-го критерия качества, заранее известное или определяемое по ходу проведения вычислительных экспериментов; 3) построение на основе определенных существенных параметров и выделенных подобластей регрессионных зависимостей $\hat{\Phi}_k = \Psi_k(\alpha_1..., \alpha_m)$ 4) выделение в K-мерном пространстве критериев множества с высокой концентрацией точек Парето (или, если возможно, построение поверхности Парето); в случае задания какой-либо схемы компромисса - выделение подобласти $G_0(\bar{\alpha}) \subseteq G(\bar{\alpha})$, содержащую наибольшую концентрацию требуемых компромиссных решений.

Наличие графических зависимостей $\bar{\Phi}_{ijk}(\alpha_0)$, а также возможность определения влияющих параметров на критерии качества с требуемой доверительной вероятностью, в значительной мере решают проблему интегрирования огромной численной информации, полученной в эксперименте, в ясные и поддающиеся логическому анализу (вплоть до "здравого смысла") характеристики.

Таким образом, метод ПЛП-поиска не только позволяет на основе проведения имитационных модельных экспериментов осуществить квазиравномерный просмотр пространства параметров в заданных диапазонах их изменения, но и в результате специального рандомизированного характера планирования этих экспериментов применить количественные статистические оценки влияния изменения варьируемых параметров и их парных сочетаний на анализируемые свойства рассматриваемой динамической системы. При этом путем построения аппроксимационных моделей критериев в зависимости от варьируемых параметров оказывается возможным провести оценку чувствительности критериев в среднем по этим параметрам.

В качестве варьируемых параметров были выбраны следующие: значения радиусов зазоров Δ_1 и Δ_2, ограничивающих перемещение масс; значения составляющих e_{ix}, e_{iy}, эксцентриситетов, определяющих положение центров ограничителей относительно равновесного положения упругой системы; амплитуды P_{ix}, P_{iy} возбуждающих сил и частота возбуждения ω.

Введем вектор $\bar{\alpha}$ варьируемых параметров, используя следующие обозначения: $\alpha_1 = \Delta_1$, $\alpha_2 = \Delta_2$, $\alpha_3 = e_{1x}$, $\alpha_4 = e_{1y}$, $\alpha_5 = e_{2x}$, $\alpha_6 = e_{2y}$, $\alpha_7 = \ln (P_{1y}/P_{1x})$, $\alpha_8 = \ln (P_{2y}/P_{2x})$, $\alpha_9 = \omega$. Представление отношений амплитуд возбуждающих сил в форме экспоненциальной функции от соответствующих параметров α_7 и α_8, равномерно распределенных в анализируемой области пространства параметров, позволяет эффективно проводить вычислительные эксперименты в достаточно широкой зоне изменения отношений P_{iy}/P_{ix}, охватывающей точку равенства амплитуд $P_{ix} = P_{iy}$ ($\alpha_j = 1$).

Приведем обозначения динамических критериев:

$\Phi_1(\bar{\alpha})$, $\Phi_4(\bar{\alpha})$ - среднее значение числа ударов первой и второй масс в установившемся режиме за один период возбуждающей силы;

$\Phi_2(\bar{\alpha})$, $\Phi_5(\bar{\alpha})$ - среднее значение накопленной нормальной составляющей ударной скорости первой и второй масс в единицу времени;

$\Phi_3(\bar{\alpha})$, $\Phi_6(\bar{\alpha})$ - среднее значение накопленной тангенциальной составляющей ударной скорости первой и второй масс в единицу времени;

$\Phi_7(\bar{\alpha})$ - средняя доля времени, когда первая масса двигалась в контакте с ограничителем (режим скольжения);

$\Phi_8(\overline{\alpha})$ - среднее значение скорости скольжения по ограничителю для первой массы;

$\Phi_9(\overline{\alpha})$ - среднее значение силы нормального давления первой массы на ограничитель (для критериев Φ_8 и Φ_9 в качестве нормирующего множителя при усреднении выбирается длительность интервала скольжения). Аналогичные критерии с индексами от Φ_{10} до Φ_{12} вычисляются для движения массы m_2 в режиме скольжения по ограничителю.

Как говорилось выше, алгоритм ПЛП-поиска основывается на специальном планировании выбираемых векторов $\overline{\alpha}_k$, где k - номер вычислительного эксперимента; этот алгоритм обеспечивает достаточно равномерный «просмотр» всей области изменения каждого из параметров $G(\overline{\alpha})$:

$$\begin{cases} \alpha_1 \in (0,05;0,85); & \alpha_4 \in (0,05;0,85); & \alpha_7 \in (-1,7;1,7); \\ \alpha_2 \in (0,05;0,85); & \alpha_5 \in (0,05;0,85); & \alpha_8 \in (-1,7;1,7); \\ \alpha_3 \in (0,05;0,85); & \alpha_6 \in (0,05;0,85); & \alpha_9 \in (0,7;2,4). \end{cases}$$

Выбор указанных диапазонов изменения варьируемых безразмерных параметров обусловлен следующими соображениями: значения зазоров Δ_1, Δ_2, изменялись в достаточно широком диапазоне по сравнению с величиной статического деформирования упругой системы под действием сил вихревого возбуждением; изменение значений эксцентриситетов e_{ix}, e_{iy}, позволяет анализировать произвольные смещения зазора по отношению к недеформированному положению упругой системы, причем максимальные величины эксцентриситета обеспечивают «натяг» упругой системы в соответствующем зазоре; отношение амплитуд P_{iy}/P_{ix} варьируется в диапазоне от 0,2 до 5,0, что соответствует данным [2]; диапазон изменения основной частоты возбуждения охватывает оба значения безразмерных собственных частот упругой системы $\omega_1 = 1$; $\omega_2 = 2,2$.

Было проведено 10 групп вычислительных экспериментов, отличающихся числом N_0 векторов (от 64 до 256) и областью исследования. В первой группе экспериментов, проведенной в исходной области изменения параметров показано, что практически «детерминированное» (доверительная вероятность $P \geq 0,9999$) влияние оказывают значения α_1 (зазоры) на критерии $\Phi_6(\overline{\alpha})$ ... $\Phi_{12}(\overline{\alpha})$. Такое сильное (существенно) влияние зазора на указанные характеристики движения масс имеет вполне ясную физическую интерпретацию. Дело в том, что величины зазоров в значительной мере определяют кинематические характеристики движущегося объекта (скорость и перемещения). Тем самым определяется и их влияние на тангенциальные и нормальные составляющие скоростей удара. Так как тангенциальные составляющие ударной скорости определяют начальные условия режима скольжения масс, а нормальные составляющие в значительной степени влияют на длительность этого режима, то становится ясным факт статистически сильного влияния величины зазоров на характеристики режима скольжения масс. Столь же ясную физическую интерпретацию имеет и факт существенного влияния параметра α_7 (= α_8) почти на все критерии (при этом самый низкий уровень доверительной вероятности лишь для критерия $\Phi_9(\bar{\alpha})$: $0{,}95 \le P < 0{,}96$). Ведь α_7, α_8 - это значения амплитуды силы возбуждения по одной из степеней свободы. Также очевидно и влияние параметра α_9 (частоты силы возбуждения) на характеристики движения, причем, с высокой доверительной вероятностью: от $0{,}999 \le P \le 0{,}9995$ до $P > 0{,}9999$. Несколько «смазанное» влияние параметров α_3, α_4, α_5, α_6 на характеристики движения может быть объяснено тем, что значения зазоров для двух масс и амплитуды возбуждающих сил, приложенных к массам, брались в каждой точке $\bar{\alpha}$ одинаковыми: $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\alpha_7 = \alpha_8$. Степень статистического влияния параметров на критерии маскируется возможной корреляцией самих значений критериев (линейной или нелинейной). Сама же корреляция обуславливается как условиями проведения вычислительного эксперимента (например, степенью независимости варьируемых параметров), так и реально существующей функциональной (детерминированной) связью между критериями; установление такой функциональной связи затруднительно вследствие невозможности получить в замкнутом виде аналитические решения исходной существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений. Расчеты коэффициентов корреляции r_{lk} и коэффициентов критерия Стьюдента $t^{э}_{lk}$ [8, 9] показали наличие тесной линейной связи между $\Phi_1(\bar{\alpha})$ и $\Phi_2(\bar{\alpha})$ (r_{12} = 0,639) и между $\Phi_4(\bar{\alpha})$ и $\Phi_5(\bar{\alpha})$ (r_{45} = 0,699). Причем, значения этих коэффициентов корреляции носят не случайный характер, поскольку соответствующие им значения критериев Стьюдента $t^{э}_{lk} = 17{,}28 \ge t_{0{,}0001}$ и $t^{э}_{lk} = 21{,}87 \ge t_{0{,}0001}$. Результаты дисперсионного анализа и визуального рассмотрения геометрического изображения функции $\bar{\Phi}_{ijk}(\alpha_{ij})$ позволил определить области $G_k(\alpha_j) \subseteq (\alpha_{j*}, \alpha_{j**})$ концентрации наилучших решений по k-му критерию. В частности, во второй группе экспериментов $N_0 = 64$, эксперименты проводились в предварительно выбранной в первой группе экспериментов области $G_0(\bar{\alpha}) \subseteq G(\bar{\alpha})$,

$$\begin{cases} \alpha_1 \in (0{,}375; 0{,}625); & \alpha_4 \in (0{,}05; 0{,}85); & \alpha_7 \in (-0{,}32; 0{,}532); \\ \alpha_2 \in (0{,}375; 0{,}625); & \alpha_5 \in (0{,}05; 0{,}525); & \alpha_8 \in (-0{,}32; 0{,}532); \\ \alpha_3 \in (0{,}125; 0{,}575); & \alpha_6 \in (0{,}05; 0{,}525); & \alpha_9 \in (1{,}5; 2{,}4). \end{cases}$$

в которой одновременно концентрируются наилучшие решения по всем 12 критериям. Заметим, что отношение объема выделенной области к объему исходной области составляет 0,822%.

В результате проведенного вычислительного эксперимента с исследуемой двухмассовой виброударной системой с двумя степенями свободы:

- в заданной исходной области изменения коэффициентов математической модели (для конструктивных параметров реальной системы) удается выделить подобласти , концентрирующие наилучшие решения по критерию качества движения масс , причем, для большинства критериев эти подобласти совпадают между собой;

- вывод из предыдущего пункта объясняется твердо установленных фактами наличия сильных линейных корреляционных связей между критериями (положительных и отрицательных); наличие таких связей позволяет существенно снизить размерность пространства критериев;

- установлен и статистически подтвержден факт о том, что в исследуемой математической модели наличие неравных зазоров в двух ударных парах при неравных амплитудах сил возмущения приводит к улучшению характеристик ударного режима, не меняя существенно значения характеристик режимов скольжения;

- в рамках рассматриваемой математической модели установлено, что минимальные значения динамических нагрузок при ограничении диапазонов варьирования анализируемых параметров (при выделении областей концентрации наилучших решений) достигаются в том случае, когда принимаются равными и величины зазоров в обеих парах, и амплитуды сил возбуждения.

Литература

1. Динамика конструкций гидроаэроупругих систем / Фролов К.В., Махутов Н.А., Каплунов С.М. и др.); отв. Ред. Каплунов С.М., Смирнов Л.В. – М.: Наука, 2002. – 397 с.
2. Махутов Н.А., Каплунов С.М., Прусс Л.В. Вибрация и долговечность судового энергетического оборудования. - Л.: Судостроение, 1985. - 302 с.
3. Кобринский А.А., Кобринский А.Е. Двумерные виброударные системы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 336 с.
4. Каплунов С.М., Кобринский А.А., Статников И.Н. К анализу двумерных виброударных колебаний для многопролетных труб теплообменных аппаратов // Нелинейные колебания механических систем. Ч. 2. – Горький: Изд. ГГУ, 1987. – С.91-93.

5. Статников И.Н., Андреенков Е.В. ПЛП-поиск - эвристический метод решения задач математического программирования. / Под ред. И.Н Статникова. - М.: МГУДТ, 2006. - 140 с.

6. Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 288 с.

7. Статников И.Н., Фирсов Г.И. ПЛП-поиск и его реализация в среде MATLAB // Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB. - М.: ИПУ РАН, 2004. - С.398-411.

8. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. - М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит. 1971. - 576 с.

9. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. - М.: Наука; Гл. ред. физ-мат. лит. 1980. - 512 с.

Поступила: 10 августа 2007 г.