УДК 531.36

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВИБРИРУЮЩИМ ПОДВЕСОМ

А.П.Маркеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия, Москва

Аннотация. *В работе получена приближенная система дифференциальных уравнений, описывающая вращение твердого тела, обладающего произвольной геометрией масс, вокруг точки О в предположении о том, что ее вибрации являются малыми и высокочастотными. Указана также погрешность, с которой решения приближенной системы аппроксимируют решения точной системы и рассмотрен ряд примеров.*

Ключевые слова: *движение твердого тела с подвижной точкой подвеса.*

Пусть твердое тело массы m движется в однородном поле тяжести. Одна из точек тела O (точка подвеса) совершает заданное движение (вибрации) в неподвижной системе координат $O^*X^*Y^*Z^*$, ось O^*Z^* которой направлена вертикально вверх. Компоненты X_O, Y_O, Z_O вектора $\mathbf{O^*O}$ — периодические (с частотой Ω) или условно-периодические (с частотами $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$) дважды непрерывно дифференцируемые функции времени t. Средние значения этих функций по времени считаем равными нулю.

Пусть ℓ — расстояние центра тяжести тела G от точки O, a g —ускорение свободного падения. Положим $\mathbf{O^*O} = a\,\mathbf{F}$, где a – максимальное отклонение точки подвеса O от неподвижной точки O^*; безразмерные компоненты вектора **F** обозначим через F_X, F_Y и F_Z. Для скорости и ускорения точки подвеса относительно неподвижной системы координат имеем выражения $\mathbf{V_O} = a\Omega\,\mathbf{F}'$ и $\mathbf{W_O} = a\,\Omega^2\,\mathbf{F}''$, где штрихом обозначается дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \Omega t$; Ω — частота вибраций точки подвеса (в случае их периодичности) или наибольшая из частот $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ (когда вибрации условно-периодические); в последнем случае предполагаем, что $\Omega_k / \Omega \sim 1$ (k=1,2,…,n).

Первые результаты в задаче о движении твердого тела с подвижной точкой подвеса получены сто лет назад [1]. Много внимания уделялось этой задаче в середине прошлого века [2, 3]. Исследования продолжаются и по настоящее время [4-12]. Основная библиография исследований содержится в монографиях [4,5] и цикле статей [12]. Наиболее полно исследованы движения маятников различного типа [1-8,10,11], динамика твердого тела с произвольным эллипсоидом инерции почти не исследована.

В данной работе получена приближенная система дифференциальных уравнений, описывающая вращение твердого тела, обладающего произвольной геометрией масс, вокруг точки O в предположении о том, что ее вибрации являются малыми и высокочастотными

$$a \ll \ell, \qquad g \ll \Omega^2 \ell, \tag{1}$$

указана также погрешность, с которой решения приближенной системы аппроксимируют решения точной системы и рассмотрен ряд примеров.

Исходные уравнения движения. Введем две системы координат с началом в точке O. Система координат OXYZ движется поступательно, ее оси параллельны соответствующим осям неподвижной системы $O^*X^*Y^*Z^*$. Другая система координат $Oxyz$ жестко связана с телом, ее оси направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O. Моменты инерции относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно A, B и C. Единичные векторы осей Ox, Oy и Oz в системе координат $OXYZ$ задаются соотношениями $\mathbf{e}_x^T=(\alpha_{11},\alpha_{21},\alpha_{31})$, $\mathbf{e}_y^T=(\alpha_{12},\alpha_{22},\alpha_{32})$, $\mathbf{e}_z^T=(\alpha_{13},\alpha_{23},\alpha_{33})$ (« т » — операция транспонирования). В системе $Oxyz$ радиус-вектор **OG** центра тяжести имеет компоненты x_g, y_g, z_g, а вектор угловой скорости тела — компоненты $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Уравнения, описывающие вращение тела относительно системы координат $OXYZ$, будут такими же, как и в случае, когда точка O была бы неподвижной. Надо только к силам, действующим на тело, добавить переносные силы инерции, которые в рассматриваемом случае приводятся к равнодействующей $-m\mathbf{W_O}$, приложенной в центре тяжести тела.

Систему дифференциальных уравнений движения запишем в форме уравнений Эйлера-Пуассона:

$$A\frac{d\omega_x}{dt}+(C-B)\omega_y\omega_z = mg(z_g\alpha_{32}-y_g\alpha_{33})+m(z_g w_{oy}-y_g w_{oz}),$$

$$B\frac{d\omega_y}{dt}+(A-C)\omega_z\omega_x = mg(x_g\alpha_{33}-z_g\alpha_{31})+m(x_g w_{oz}-z_g w_{ox}), \qquad (2)$$

$$C\frac{d\omega_z}{dt}+(B-A)\omega_x\omega_y = mg(y_g\alpha_{31}-x_g\alpha_{32})+m(y_g w_{ox}-x_g w_{oy}),$$

$$\frac{d\alpha_{i1}}{dt}=\omega_z\alpha_{i2}-\omega_y\alpha_{i3}, \frac{d\alpha_{i2}}{dt}=\omega_x\alpha_{i3}-\omega_z\alpha_{i1}, \frac{d\alpha_{i3}}{dt}=\omega_y\alpha_{i1}-\omega_x\alpha_{i2} \ (i=1,2,3). \qquad (3)$$

Через w_{ox}, w_{oy}, w_{oz} в (2) обозначены проекции ускорения $\mathbf{W_O}$ точки подвеса на оси Ox, Oy, Oz: $w_{ox}=\mathbf{W_O}\cdot\mathbf{e}_x$, $w_{oy}=\mathbf{W_O}\cdot\mathbf{e}_y$, $w_{oz}=\mathbf{W_O}\cdot\mathbf{e}_z$.

Величины α_{ij} связаны шестью соотношениями $\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_x=1$, $\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_y=0$, $\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_z=0$, $\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_y=1$, $\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_z=0$, $\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_z=1$. Поэтому из двенадцати уравнений системы (2), (3) независимыми являются только шесть.

Опираясь на предположения (1), положим

$$a=\varepsilon^2\ell, \qquad g=\varepsilon^4\Omega^2\ell k \qquad (0<\varepsilon<<1,\ k=g\ell/(\Omega^2a^2)\sim 1) \qquad (4)$$

Введя обозначения

$$x_g=\ell\xi_g, \quad y_g=\ell\eta_g, \quad z_g=\ell\varsigma_g, \quad A=m\ell^2A_1, \quad B=m\ell^2B_1, \quad C=m\ell^2C_1 \qquad (5)$$

сделаем в уравнениях (2),(3) замену переменных

$$\omega_x=\varepsilon\Omega\sigma_x, \qquad \omega_y=\varepsilon\Omega\sigma_y, \qquad \omega_z=\varepsilon\Omega\sigma_z \qquad (6)$$

и перейдем к новой независимой переменной τ. В новых переменных уравнения движения станут такими

$$\frac{d\sigma_x}{d\tau}=\frac{\varepsilon}{A_1}[(B_1-C_1)\sigma_y\sigma_z+\varsigma_g f_y-\eta_g f_z]+\frac{\varepsilon^3k}{A_1}(\varsigma_g\alpha_{32}-\eta_g\alpha_{33}),$$

$$\frac{d\sigma_y}{d\tau}=\frac{\varepsilon}{B_1}[(C_1-A_1)\sigma_z\sigma_x+\xi_g f_z-\varsigma_g f_x]+\frac{\varepsilon^3k}{B_1}(\xi_g\alpha_{33}-\varsigma_g\alpha_{31}), \qquad (7)$$

$$\frac{d\sigma_z}{d\tau}=\frac{\varepsilon}{C_1}[(A_1-B_1)\sigma_x\sigma_y+\eta_g f_x-\xi_g f_y]+\frac{\varepsilon^3k}{C_1}(\eta_g\alpha_{31}-\xi_g\alpha_{32}),$$

$$\frac{d\alpha_{i1}}{d\tau}=\varepsilon(\sigma_z\alpha_{i2}-\sigma_y\alpha_{i3}),\ \frac{d\alpha_{i2}}{d\tau}=\varepsilon(\sigma_x\alpha_{i3}-\sigma_z\alpha_{i1}),\ \frac{d\alpha_{i3}}{d\tau}=\varepsilon(\sigma_y\alpha_{i1}-\omega_x\alpha_{i2}) \qquad (8)$$

(i=1,2,3)

В (7) величины f_x, f_y, f_z — проекции вектора $\mathbf{F}''$ на оси Ox, Oy, Oz:

$f_x = w_{ox}/(a\Omega^2)$, $f_y = w_{oy}/(a\Omega^2)$, $f_z = w_{oz}/(a\Omega^2)$. Через посредство этих величин независимая переменная τ явно входит в правые части уравнений (7).

Приближенные уравнения движения. Исключение независимой переменной. При малых ε уравнения (7),(8) можно упростить путем исключения независимой переменной τ из их правых частей. С этой целью по алгоритму метода Деприи – Хори для негамильтоновых систем [13] была построена близкая к тождественной, периодическая (или условно-периодическая) по τ замена переменных $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\alpha_{ij}\to\mu_x,\mu_y,\mu_z,\beta_{ij}$, задаваемая многочленами третьей степени относительно ε. Вычисления показали, что коэффициенты этих многочленов можно выбрать так, чтобы правые части дифференциальных уравнений для новых переменных $\mu_x,\mu_y,\mu_z,\beta_{ij}$ не содержали τ в членах до порядка ε^3 включительно, причем члены порядка ε^2 можно уничтожить полностью. Сама замена переменных будет такой:

$$\sigma_x=\mu_x+\frac{\varepsilon}{A_1}[F'_X(\varsigma_g\beta_{12}-\eta_g\beta_{13})+F'_Y(\varsigma_g\beta_{22}-\eta_g\beta_{23})+F'_Z(\varsigma_g\beta_{32}-\eta_g\beta_{33})]+O(\varepsilon^2),$$

$$\sigma_y=\mu_y+\frac{\varepsilon}{B_1}[F'_X(\xi_g\beta_{13}-\varsigma_g\beta_{11})+F'_Y(\xi_g\beta_{23}-\varsigma_g\beta_{21})+F'_Z(\xi_g\beta_{33}-\varsigma_g\beta_{31})]+O(\varepsilon^2),$$

$$\sigma_z=\mu_z+\frac{\varepsilon}{C_1}[F'_X(\eta_g\beta_{11}-\xi_g\beta_{12})+F'_Y(\eta_g\beta_{21}-\xi_g\beta_{22})+F'_Z(\eta_g\beta_{31}-\xi_g\beta_{32})]+O(\varepsilon^2),$$

$$\alpha_{ij}=\beta_{ij}+O(\varepsilon^2) \qquad (9)$$

Приближенные уравнения. Вибрационный момент. В преобразованной системе отбросим члены порядка ε^4 и выше и возвратимся к старой независимой переменной t. Затем сделаем замену, «обратную» (6)

$$\mu_x=p/(\varepsilon\Omega),\quad \mu_y=q/(\varepsilon\Omega),\quad \mu_z=r/(\varepsilon\Omega),\quad \beta_{ij}=a_{ij} \qquad (10)$$

и учтем равенства (4),(5). В результате придем к следующей приближенной системе дифференциальных уравнений движения:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=mg(z_g a_{32}-y_g a_{33})+M_x^{(v)},$$

$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=mg(x_g a_{33}-z_g a_{31})+M_y^{(v)}, \qquad (11)$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=mg(y_g a_{31}-x_g a_{32})+M_z^{(v)},$$

$$\frac{da_{i1}}{dt}=ra_{i2}-qa_{i3},\ \frac{da_{i2}}{dt}=pa_{i3}-ra_{i1},\ \frac{da_{i3}}{dt}=qa_{i1}-pa_{i2}\ (i=1,2,3) \qquad (12)$$

Первые три уравнения этой системы отличаются от динамических уравнений Эйлера в случае неподвижной точки O наличием дополнительных слагаемых $M_x^{(v)},M_y^{(v)}M_z^{(v)}$ в их правых частях. Как показывают вычисления, эти слагаемые являются проекциями на оси Ox, Oy, Oz вектора $\mathbf{M}^{(v)}$, определяемого формулой

$$\mathbf{M}^{(v)} = \langle m\,\mathbf{V_O}\times(\mathbf{OG}\times\boldsymbol{\delta})\rangle \qquad (13)$$

Компоненты вектора **δ** в системе координат Oxyz таковы:

$$\delta_x=\frac{m}{A}(z_g v_{oy}-y_g v_{oz}),\quad \delta_y=\frac{m}{B}(x_g v_{oz}-z_g v_{ox}),\quad \delta_z=\frac{m}{C}(y_g v_{ox}-x_g v_{oy}),\qquad (14)$$

$$\begin{aligned} v_{ox} &= V_{OX}a_{11}+V_{OY}a_{21}+V_{OZ}a_{31},\\ v_{oy} &= V_{OX}a_{12}+V_{OY}a_{22}+V_{OZ}a_{32},\\ v_{oz} &= V_{OX}a_{13}+V_{OY}a_{23}+V_{OZ}a_{33} \end{aligned}\qquad (15)$$

В (14), (15) V_{OX}, V_{OY}, V_{OZ} и v_{ox}, v_{oy}, v_{oz} — проекции вектора $\mathbf{V_O}$ скорости точки подвеса на оси систем координат OXYZ и Oxyz соответственно. Угловыми скобками в (13) обозначено усреднение по времени. Используя терминологию статьи [3], назовем величину (13) вибрационным моментом.

На интервале времени $t\sim\varepsilon^{-1/2}$ решения системы (11),(12) аппроксимируют решения точной системы (2),(3) с погрешностью, определяемой равенствами $\omega_x = p+\delta_x+O(\varepsilon^{1/2})$, $\omega_y = q+\delta_y+O(\varepsilon^{1/2})$, $\omega_z = q+\delta_z+O(\varepsilon^{1/2})$, $\alpha_{ij} = a_{ij}+O(\varepsilon^{3/2})$.

Уравнения (11),(12) описывают «плавное» изменение во времени ориентации тела в абсолютном пространстве. На это «плавное» движение накладываются быстрые осцилляции, определяемые из замен (6),(9),(10). Их можно назвать осцилляционным движением тела.

В и б р а ц и о н н ы й п о т е н ц и а л . Компоненты вибрационного момента (13) можно вычислить по формулам

$$M_x=\frac{\partial\Pi^{(v)}}{\partial a_z}\cdot\mathbf{a}_y-\frac{\partial\Pi^{(v)}}{\partial a_y}\cdot\mathbf{a}_z,\quad M_y=\frac{\partial\Pi^{(v)}}{\partial a_x}\cdot\mathbf{a}_z-\frac{\partial\Pi^{(v)}}{\partial a_z}\cdot\mathbf{a}_x,\quad M_z=\frac{\partial\Pi^{(v)}}{\partial a_y}\cdot\mathbf{a}_x-\frac{\partial\Pi^{(v)}}{\partial a_x}\cdot\mathbf{a}_y$$

Здесь $\mathbf{a}_x^T=(a_{11},a_{21},a_{31})$, $\mathbf{a}_y^T=(a_{12},a_{22},a_{32})$, $\mathbf{a}_z^T=(a_{13},a_{23},a_{33})$, а функция $\Pi^{(v)}$(вибрационный потенциал) задается формулой

$$\Pi^{(v)}=<\frac{1}{2}m^2\left[\frac{(z_g v_{oy}-y_g v_{oz})^2}{A}+\frac{(x_g v_{oz}-z_g v_{ox})^2}{B}+\frac{(y_g v_{ox}-x_g v_{oy})^2}{C}\right]>\qquad \mathbf{(16)}$$

Поясним механический смысл функции (16). Пусть **J = - m** $\mathbf{V_O}$ («ударный импульс сил инерции»). Рассмотрим покоящееся твердое тело, точка O которого неподвижно закреплена. Мысленно приложим к центру тяжести тела ударный импульс **J.** Тогда оно получит угловую скорость $\Delta\omega=\boldsymbol{\delta}$, и для приобретенной при ударе кинетической энергии имеем выражение $T=1/2\,(A\,\delta_x^2+B\,\delta_y^2+C\delta_z^2)$, которое совпадает с выражением, заключенным в угловые скобки в формуле (16). Таким образом, вибрационный потенциал равен среднему по времени значению кинетической энергии, которую приобретает покоящееся твердое тело под действием ударного импульса **-** m $\mathbf{V_O}$**.**

Если в (9) отбросить слагаемые выше первого порядка по ε, то вектор **δ** будет представлять собой осцилляционную угловую скорость тела. Поэтому можно сказать, что вибрационный потенциал равен среднему по времени значению кинетической энергии осцилляционного движения, сообщаемому телу посредством вибраций его точки подвеса. Последняя трактовка вибрационного потенциала была известна ранее [3-5, 14].

О б и н т е г р а л а х п р и б л и ж е н н ы х у р а в н е н и й . Помимо шести геометрических инвариантных соотношений

$$\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_x=1,\quad \mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_y=0,\quad \mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_z=0,\quad \mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_y=1,\quad \mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_z=0,\quad \mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_z=1\qquad (17)$$

система уравнений (11),(12) всегда имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(A\,p^2+B\,q^2+Cr^2)+mg(x_g a_{31}+y_g a_{32}+z_g a_{33})+\Pi^{(v)}=\text{const}\qquad (18)$$

Для частных случаев движения точки подвеса и при некоторых специальных ограничениях на геометрию масс тела возможны также интегралы, отличные от (17),(18). Например, при вертикальных вибрациях точки подвеса ($V_{OX} = V_{OY} \equiv 0$) существует интеграл

$$A\,p\,a_{31} + B\,q\,a_{32} + C\,r\,a_{33} = \text{const} \qquad (19)$$

Если тело динамически симметрично и центр тяжести лежит на оси симметрии ($A = B, x_g = y_g = 0$), то $r = \text{const}$; если к тому же вибрации точки подвеса таковы, что величины $< V_{OX}^2 >$ и $< V_{OY}^2 >$ равны между собой, а $< V_{OX}V_{OY} >$, $< V_{OX}V_{OZ} >$, $< V_{OY}V_{OZ} >$ равны нулю, то существует также интеграл (19); при этом система уравнений (11),(12) будет интегрируемой.

Некоторые примеры. Рассмотрим некоторые частные случаи относительного (в системе координат $OXYZ$) равновесия и случаи стационарных вращений, описываемые приближенными уравнениями. Ориентацию тела будем задавать углами Эйлера ψ, θ, φ. Устойчивость исследуем при помощи теорем Лагранжа, Ляпунова и Рауса-Ляпунова [15]. Не останавливаясь на подробностях анализа, приведем только формулировки полученных результатов.

1. Пусть центр тяжести тела лежит в его главной плоскости инерции Oxy ($x_g = \ell\cos\chi, y_g = \ell\sin\chi, z_g = 0$), а вибрации точки подвеса происходят вдоль горизонтальной прямой ($V_{OY} \equiv 0, V_{OZ} \equiv 0$). Рассмотрим положения относительного равновесия, когда плоскость Oxy совпадает с вертикальной плоскостью $O^*X^*Z^*$ неподвижной системы координат ($\psi = \pi, \theta = \pi/2$).

Всегда существуют равновесия, для которых центр тяжести тела G лежит на вертикали, проходящей через точку подвеса O. Если при этом он расположен выше точки O ($\varphi = \pi/2 - \chi$), то положение равновесия неустойчиво по отношению к возмущениям углов Эйлера ψ, θ, φ и их производных $\dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi$. Если же в положении равновесия центр тяжести лежит ниже точки O ($\varphi = -\pi/2 - \chi$) и одновременно выполняются два неравенства

$$\frac{\sin^2\chi}{A} + \frac{\cos^2\chi}{B} - \frac{1}{C} > 0, \qquad m < V_{OX}^2 > \ell \;<\; Cg \qquad (20)$$

то имеет место устойчивость; когда хотя бы одно из неравенств (20) выполняется с обратным знаком, положение равновесия неустойчиво.

В случае, когда во втором из неравенств (20) имеет место обратный знак, помимо неустойчивых вертикальных положений равновесия $\varphi = \pm\pi/2 - \chi$ существует невертикальное положение равновесия, для которого радиус-вектор **OG** центра тяжести тела составляет тупой угол $\pi - \arccos(Cg/(m < V_{OX}^2 > \ell))$ с вертикалью OZ. Это положение равновесия устойчиво, если выполняется первое из неравенств (20).

Для частного случая математического маятника длины ℓ, точка подвеса которого совершает горизонтальные гармонические вибрации $X_O = a\cos\Omega t, Y_O \equiv 0, Z_O \equiv 0$, второе из неравенств (20) переходит в известное [14] неравенство $a^2\Omega^2 < 2g\ell$.

2. Пусть $V_{OX} = V_{OY} \equiv 0$ (вибрации точки подвеса вертикальны). Тогда угол ψ будет циклической координатой при любой геометрии масс тела. Будем считать, что центр тяжести лежит на главной оси инерции ($x_g = \ell, y_g = 0, z_g = 0$) и для определенности положим, что $B > C$. В положениях равновесия угол ψ будет произвольной постоянной величиной.

Существует два типа равновесий, для которых центр тяжести тела лежит на одной вертикали с точкой подвеса O. Для равновесий первого типа центр тяжести лежит ниже точки O, эти равновесия устойчивы по отношению к возмущениям величин $\theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$. Для равновесий второго типа центр тяжести лежит выше точки O, эти равновесия устойчивы, если выполняется неравенство

$$m < V_{OZ}^2 > \ell \ > \ Bg \tag{21}$$

и неустойчивы, если это неравенство выполняется с обратным знаком. В предельном случае математического маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания $Z_O = a\cos\Omega t$, неравенство (21) переходит в давно известное [1, 3] неравенство $a^2\Omega^2 > 2g\ell$.

При выполнении условия (21) существуют еще и равновесия третьего и четвертого типов, для которых центр тяжести располагается не на вертикали OZ, а лежит в произвольной точке горизонтальной окружности с центром на этой вертикали. Для равновесий третьего типа $\varphi = \pi/2, \theta = \theta_0 = \arcsin(Bg/(m < V_{OZ}^2 > \ell))$ или $\theta = \pi - \theta_0$; для них ось Oy перпендикулярна вертикали OZ, а радиус – вектор **OG** центра тяжести тела составляет с вертикалью острый угол $\pi/2 - \theta_0$. Для равновесий четвертого типа $\theta = \pi/2, \varphi = \varphi_0 = \arcsin(Cg/(m < V_{OZ}^2 > \ell))$ или $\pi - \varphi_0$; для этих равновесий ось Oz перпендикулярна вертикали, а радиус - вектор **OG** составляет с вертикалью острый угол $\pi/2 - \varphi_0$. Если $Cg < m < V_{OZ}^2 > \ell < Bg$, то равновесий третьего типа не существует, а если $m < V_{OZ}^2 > \ell < Cg$, то не существует равновесий и четвертого типа. Исследование показало, что равновесия третьего и четвертого типов (если они существуют) неустойчивы.

3. Пусть тело динамически симметрично и его центр тяжести лежит на оси симметрии ($A = B, x_g = y_g = 0, z_g$ может иметь любой знак; волчок Лагранжа), а точка подвеса совершает равномерное движение по горизонтальной окружности радиуса a ($V_{OX} = -a\Omega\sin\Omega t, V_{OY} = a\Omega\cos\Omega t, V_{OZ} \equiv 0$). В этом случае и угол ψ, и угол φ будут циклическими координатами.

Существует стационарное вращение тела с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси симметрии, расположенной вдоль вертикали, проходящей через точку подвеса ($\theta = 0$; «спящий» волчок). Исследование показало, что при выполнении неравенства

$$C^2\omega^2 > 4\,A\,m\,g\,z_g + 2\,m^2a^2\Omega^2 z_g^2 \tag{22}$$

это вращение устойчиво по отношению к возмущениям величин $\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$. Если неравенство (22) выполняется с обратным знаком, то имеет место неустойчивость. При отсутствии вибраций условие (22) переходит в условие Маиевского-Четаева [15]. Как видим, в вопросе об устойчивости «спящего» волчка рассматриваемые вибрации точки подвеса играют роль дестабилизирующего фактора.

Если к движению точки подвеса по горизонтальной окружности добавить еще ее движение по вертикали, положив $V_{OZ} = a\Omega\cos 2\Omega t$, то вибрационный момент (13) обращается в нуль, и приближенные уравнения (11),(12) в точности совпадают с дифференциальными уравнениями Эйлера-Пуассона движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Последнее утверждение справедливо при любой геометрии масс тела, а не только в случае волчка Лагранжа.

Плоские периодические движения. Методами Пуанкаре и КАМ – теории [16] проведено строгое (в рамках точной, а не приближенной, системы уравнений движения) исследование плоских движений твердого тела (физического маятника), когда его ось подвеса OX горизонтальна (параллельна оси O^*X^*), а точка O совершает малые периодические вибрации в вертикальной плоскости $O^*Y^*Z^*$. Задача зависит от двух безразмерных параметров $\alpha = \langle V_{OZ}^2 - V_{OY}^2 \rangle /(2g\ell_{пр})$ и $\beta = \langle V_{OZ}V_{OY} \rangle /(g\ell_{пр})$, где $\ell_{пр}$ - приведенная длина. В плоскости этих параметров получена полная картина существования, устойчивости и бифуркаций периодических движений тела, с периодом, равным периоду вибраций точки подвеса.

Когда вибрации точки подвеса не приводят к появлению вибрационного момента? Была решена задача о невозмущаемости (в рассматриваемом в статье приближении) «плавных» движений тела с неподвижной точкой посредством вибраций точки подвеса. Показано, что в случае тела с произвольной геометрией масс вибрационный момент тождественно равен нулю, т.е. приближенные уравнения движения (11)-(12) совпадают с классическими уравнениями движения Эйлера – Пуассона, тогда и только тогда, когда значения величин $\langle V_{OX}^2 \rangle, \langle V_{OY}^2 \rangle, \langle V_{OZ}^2 \rangle$ равны между собой, а величины $\langle V_{OX}V_{OY} \rangle, \langle V_{OX}V_{OZ} \rangle, \langle V_{OY}V_{OZ} \rangle$ равны нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08 – 01 – 00363) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (проект № НШ - 2975.2008.1).

Литература

1. Stephenson A. // Mem. and Proc. Manchester Literary and Philos. Soc. 1908.V.52. № 8. P.1-10.

2. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. ин-та строит. механики АН УССР. 1950. №14. С. 9-34.

3. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т.44. В.1. С.7-20.

4. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1981. 253 с.

5. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400с.

6. Акуленко Л.Д. Асимптотический анализ динамических систем, подверженных высокочастотным воздействиям // ПММ. 1994. Т.58. В.3. С.23-31.

7. Бардин Б.С., Маркеев А.П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ. 1995. Т.59. В.6. С.922-929.

8. Маркеев А.П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ. 1999. Т.63. В.2. С.213-219.

9. Холостова О.В. Динамика волчка Лагранжа с неподвижной и вибрирующей точкой подвеса. М.: Изд-во МАИ, 2000. 84 с.

10. Холостова О.В. О движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса // Сб. научн-метод. статей. Теоретическая механика. 2003. Вып. 24. М.: Изд-во МГУ. С.157-167.

11. Петров А.Г. Об уравнениях движения сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса // ДАН. 2005. Т.405. №1. С.51-55.

12. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т.4. №3. С.26-129.

13. A. Kamel. Lie transforms and the hamiltonization of non – Hamiltonian systems // Celestial Mechanics. 1971.V.4. P.397 – 405.

14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.

15. Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, Т.6. М.: ВИНИТИ, 1983. 128 с.

16. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.

Поступила: 28.08.09.