

УДК 534.1

ЖЕСТКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

М.Е.Герц, М.М.Герц,

Институт машиноведения им.А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

Аннотация. Выполнен динамический анализ машины для вибротранспортирования, привод которой - динамический вибровозбудитель и колебательная система (лоток) - через кулоново трение передает движение сосредоточенной массе. В первом приближении метода осреднения исследованы динамические характеристики и устойчивость стационарных режимов вибротранспортирования при вынужденных колебаниях. Приведена методика анализа переходных режимов машины, представленной системой с мгновенным изменением массы. Найдены области параметров с «жестким» режимом транспортирования. Даны рекомендации для практического использования, например, в питателе для формирования структуры поверхности деталей.

Ключевые слова: система с переменной структурой, машина для вибротранспортирования, привод, жесткие режимы, динамика, устойчивость.

Случайное обнаружение эффекта «жесткого» возбуждения колебаний в экспериментах по вибротранспортированию кварцевого песка явилось основой постановки задачи. В машине рис.1 стальной лоток 1 и песок (масса m) совершали колебания как единое целое при гармоническом напряжении E на обмотке электродинамического вибровозбудителя 2. Приложенный к лотку импульс приводил к переходу на установившийся режим с большей амплитудой колебаний и с вибротранспортированием. При заданном гармоническом движении лотка такие режимы не существуют [1]. Выявление причины появления эффекта - из-за мгновенного изменения массы или из-за «ограниченного возбуждения» при «падающей» статической характеристике вибровозбудителя - является задачей настоящей работы.

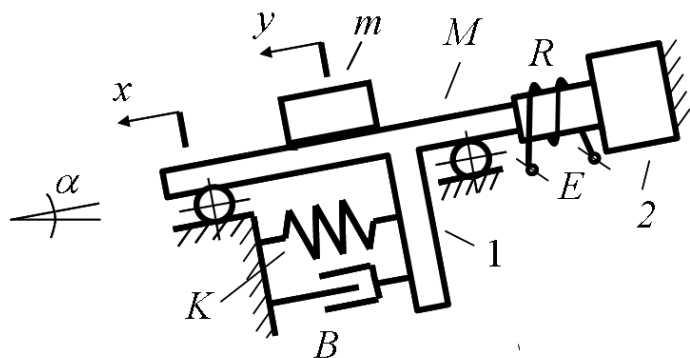


Рис. 1

Результаты работы кроме вибротранспортирования и дозирования могут быть использованы при анализе возможных срывов технологического оборудования с основания, ослабления резьбовых соединений при вибрациях и, возможно, сдвигов или разрушения зданий при землетрясениях. В ультразвуковых системах погружение волновода (излучателя) из воздушной среды в жидкость приводит к уменьшению резонансных частот, что оценивается присоединенной малой массой [2]. При развитии кавитации происходят разрывы между жидкостью и волноводом и резонансные частоты повышаются. Поэтому рассмотренная система может также служить простейшей динамической моделью взаимодействия волновод-среда.

1. Возможность использования резонанса для уменьшения энергопотребления, габаритов и материалоемкости вибромашин при рациональном выборе параметров, например [3], также определило динамическую модель рис. 1.

Суммарная масса M колебательной системы включает кроме лотка и массу катушки и обмотки с электрическим сопротивлением R . Вибролоток расположен под углом α к горизонту и связан с основанием пружинами общей жесткостью K и коэффициентом сопротивления B . Транспортируемая точечная масса m взаимодействует с массой M через силу кулонова

трения, максимальная величина которой равна $mgf \cos \alpha$, где f - коэффициент трения. Напряжение возбуждения на обмотке $E = E_0 \cos \omega t$, где E_0, ω - амплитуда и частота.

Уравнения движения масс при отсутствии остановок в относительных $x - y$ координатах в абсолютных x, y имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -\varepsilon [2b\dot{x} - (sf \cos \alpha) \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) - e \cos \mathcal{G}], \\ \dot{y} &= -\varepsilon g [(f \cos \alpha) \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) - \sin \alpha], \\ \dot{\mathcal{G}} &= \omega, \quad \max|\ddot{x}| > g(f \cos \alpha - \sin \alpha), \quad f \cos \alpha > \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega_0^2 = K/M, 2b = (H^2 + BR)/MR, s = mg/M, e = E_0 H/MR$; x, y - соответственно координаты масс M и m (рис.1), ε - малый параметр, H - коэффициент электромеханической связи.

Первое уравнение с точностью до ε^2 справедливо при малой индуктивности обмотки или использовании “статических” характеристик вибровозбудителей других типов при замене коэффициентов H, R, E_0 [4]. Первое неравенство является необходимым условием неустойчивости режима с совместным (без проскальзывания) движением масс. Второе неравенство соответствует условию равновесия массы m на неподвижной наклонной плоскости. Малость членов первого уравнения определяется условием эффективности использования резонанса для получения максимальных амплитуд колебаний [5]. Стремление к уменьшению материалоемкости машины приводит к соизмеримости масс $m \sim M$, что по первому уравнению приводит к малому параметру во втором.

При замене переменных

$$x = A \cos \psi, \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin \psi, \quad (2)$$

введении малой расстройки от резонанса $\varepsilon \Delta = \omega - \omega_0$ и медленной переменной $\varphi = \mathcal{G} - \psi$ после осреднения по быстрой переменной ψ в (1) получаем уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\varepsilon (2\omega_0)^{-1} \{2\omega_0 b A + 4sf\pi^{-1} (\cos \alpha) \cos[\arcsin(\dot{y}/\omega_0 A)] - e \sin \varphi\}, \\ \dot{\varphi} &= \omega - \omega_0 + \varepsilon e (2\omega_0 A)^{-1} \cos \varphi, \\ \ddot{y} &= \varepsilon g [\sin \alpha - 2f\pi^{-1} (\cos \alpha) \arcsin(\dot{y}/\omega_0 A)], \quad \omega_0 A > \dot{y}, \quad A > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Сначала определяем параметры стационарных режимов. Из уравнений (3) при $\dot{A} = 0, \dot{\varphi} = 0, \ddot{y} = 0$ имеем

$$A^* = \frac{-bF + \sqrt{\pi^2 e^2 [(\omega_0 - \omega)^2 + b^2] - F^2 [16(\omega_0 - \omega)^2 + 15b^2]}}{2\pi\omega_0 [(\omega_0 - \omega)^2 + b^2]}, \quad (4)$$

$$\dot{y}^* = V = \omega_0 A^* \sin \frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f}, \quad F = fmgM^{-1} (\cos \alpha) \cos \frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f},$$

где V - скорость вибротранспортирования.

Первое неравенство в (1) для стационарных режимов $\dot{\varphi} = 0, \dot{\psi} = \dot{\mathcal{G}} = \omega$,

$$\ddot{x} = -\omega^2 A^* \cos(\omega t - \mathcal{G}^*) \text{ имеет вид} \quad A^* > g\omega^{-2} (f \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (5)$$

Вибротранспортирование $V \neq 0$ (4) возможно только при превышении амплитуды возбуждения E_0 определенного порога

$e > 4fs\pi^{-1}(\cos\alpha)\cos(\pi \operatorname{tg}\alpha/2f)$, $E_0 > 4mgf\pi^{-1}RH^{-1}(\cos\alpha)\cos(\pi \operatorname{tg}\alpha/2f)$,
прямопропорционального коэффициенту трения f , что характерно для систем с кулоновым трением, например [6].

При горизонтальном лотке $\alpha = 0$ скорость виброперемещения равна нулю $V = 0$, её амплитуда колебаний порядка ε^2 . Увеличение угла наклона и скорости вибротранспортирования равносильно уменьшению влияния кулонова трения на колебания лотка и уменьшению коэффициента трения f (3,4). При достаточно больших колебаниях лотка $A^* \gg \omega_0 V$,

$\cos[\arcsin(V/\omega_0 A^*)] \approx 1$ этого уменьшения нет и амплитуда колебаний A^* такая же, как у горизонтального лотка (3,4). В этом случае влияние колебаний на массу m аналогично линейному вязкому трению, $\arcsin(\dot{y}^*/\omega_0 A^*) \approx \dot{y}^*/\omega_0 A^*$ в третьем уравнении (3).

Амплитудно-частотная характеристика машины $A(\omega)$ симметрична относительно оси $\omega = \omega_0$ (4) – кривая 1 рис.2а. Условие (5) соответствует кривой 2. Участки $A(\omega)$, не отвечающие условию (5), с граничными точками А и Б показаны пунктиром. Физический смысл режимов на этих участках выяснится в дальнейшем.

Устойчивость стационарных режимов (4) определяется по уравнениям в вариациях δ системы (3)

$(A = A^* + \delta A, \varphi = \varphi^* + \delta\varphi, \dot{y} = V + \delta\dot{y})$,
коэффициенты которых являются элементами квадратной матрицы $\|b_{ji}\|$. Величина каждого коэффициента находится из частной производной правой части j уравнения в (3)

по i переменной из A, φ, \dot{y} в стационарных точках (4)

$$b_{11} = -b - 2sf\pi^{-1}\omega_0^{-3}YV^2A^{*-3}, Y = [1 - (V/\omega_0 A^*)^2]^{-0.5} \cos\alpha, b_{12} = e \cos\varphi^*, \quad (6)$$

$$b_{13} = 2sf\pi^{-1}\omega_0^{-3}VYA^{*-2}, b_{21} = -s(2\omega_0)^{-1}A^{*-2} \cos\varphi^*, b_{22} = -e(2\omega_0)^{-1}A^{*-1} \sin\varphi^*,$$

$$b_{31} = 2gf\pi^{-1}\omega_0^{-1}VYA^{*-2}, b_{33} = -2gf\pi^{-1}\omega_0^{-1}YA^{*-1}, b_{23} = 0, b_{32} = 0.$$

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости получаются из характеристического уравнения линеаризованной системы с элементами (6) $\lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3 = 0$ и имеют по критерию Раусса-Гурвица вид

$$B_1 > 0, B_3 > 0, B_1 B_2 - B_3 > 0, \quad B_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33}), \quad (7)$$

$$B_2 = b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31},$$

$$B_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}.$$

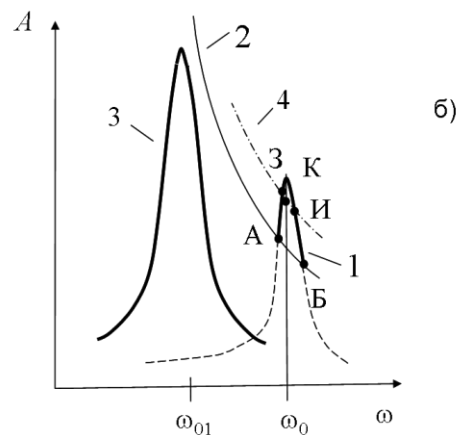
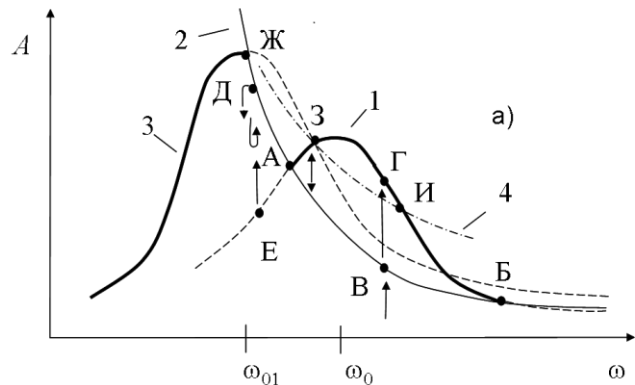


Рис.2

Условиям (7) с учетом (3) после преобразований соответствует неравенство $\cos\alpha > 0$, которое выполняется по условиям существования решений (4).

Таким образом, устойчива вся резонансная кривая 1 рис. 2а., включая участки, не отвечающие неравенству (5), которое не связано с условиями существования режимов (4). Вопрос об этих участках решается далее при рассмотрении переходных процессов с учетом и другой динамической системы.

3. При нулевых начальных условиях $x = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0, (A = 0, \psi = 0)$ при действии гармонического возбуждения E в системе рис.1 вначале обе массы движутся совместно. Параметры переходного и стационарного режимов определяются в этом случае по известным точным формулам для линейного осциллятора массы $M + m$ с демпфированием $b_1 = (H^2 + BR) / 2R(m + M)$.

На схеме рис.2 двух основных случаев амплитудно-частотных характеристик этой системы кривыми 3 показаны параметры стационарных режимов без проскальзывания, $\omega_{01} = K / (M + m)$. При этом кривые 2 определяют начало проскальзывания согласно (5).

Рассмотрим переходной процесс, изображенный тонкими стрелками с точками В и Г рис.2а. Амплитуда колебаний увеличивается до т.В, в которой можно точно определить начальные условия начала проскальзывания, то есть для системы уравнений (1). Далее процесс определяется укороченными уравнениями (3) и заканчивается устойчивой стационарной точкой Г. Этот процесс имеет вид рис. 3а, где A_1 и A_2 - соответственно амплитуды колебаний в точках В и Г.

Следует отметить, что хотя на каждом этапе движение описывается разными уравнениями с разным числом степеней свободы (система с переменной структурой), в целом получим решение задачи Коши с известной точностью. В рассмотренном случае не используются уравнения для систем с переменной массой, так как относительная скорость масс M и m в момент разделения равна нулю.

За пределами участка АБ на кривой 1 после достижения условий разделения масс, например в т.Д, амплитуда колебаний должна бы уменьшаться до стационарной точки Е, если бы не следующее.

После замены переменных (2) задача определения стационарной скорости движения массы m по второму уравнению в (1) сводится к классической задаче о вироперемещении массы на вибрирующем по гармоническому закону с амплитудой A и частотой ω основания, например [1,7]. Из этих точных решений следует, что при амплитудах колебаний основания меньших границы (5) единственным стационарным режимом является режим совместного движения массы с основанием.

Возвращаясь к переходному процессу после т.Д амплитуда колебаний падает согласно (3) и стремится к т.Е до нарушения условия (5), после чего вся система теряет одну

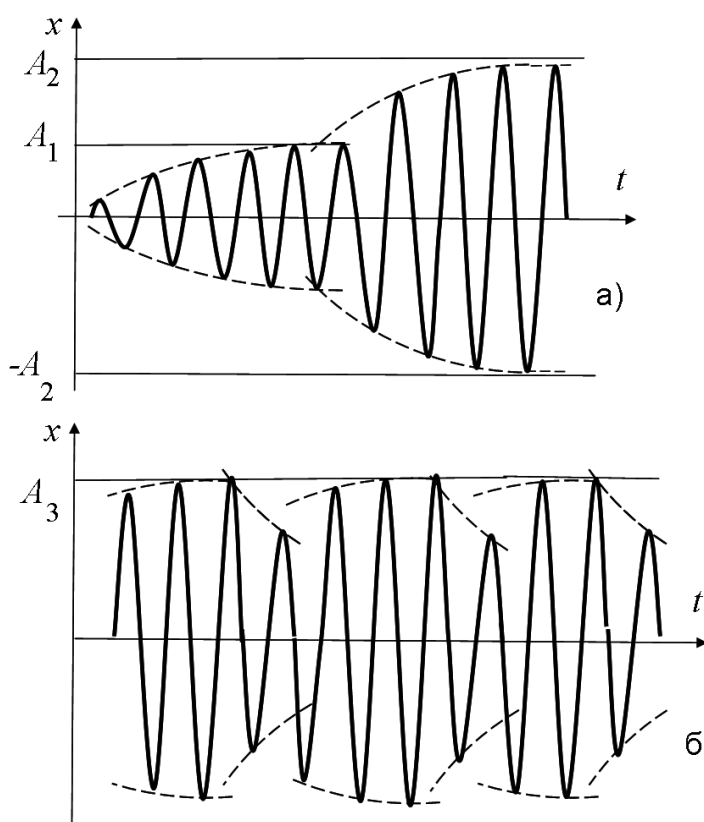


Рис.3

степень свободы и превращается в линейный осциллятор, который вновь стремится к нереализуемому стационарному режиму (пунктир на кривой 2). Данный процесс схематично изображен на рис.3б, где A_3 - амплитуда в т.Д. Аналогичные режимы существуют на частотах больших, чем в т.Б (пунктир на кривой 1 рис 2а). Описание данных режимов требует знание координат, а не их огибающих (3), поэтому в рамках настоящей работы невозможно. Тем не менее доказана возможность вибротранспортирования в более широких диапазонах амплитуд и частот, чем в классической теории. Описанные режимы характеризуются “мягким” возбуждением колебаний, то есть с “мягким” режимом вибротранспортирования. Режимы с частотами меньше τ являются колебаниями осциллятора без вибротранспортирования.

Из точного решения также известно, что выше и вблизи границы (5) возможны только режимы с остановками конечной продолжительности в относительном движении. Граница существования режимов только с мгновенными остановками легко определяется по формулам [1] или диаграмме [7]

$$A^* > k\omega^{-2}, \quad (8)$$

где $k = const$ - находится по двум параметрам f, α [1,7]. Кривая 4 рис.2 по выражению (8) всегда выше кривой 3 и изображена штрих-пунктиром.

На участках АЗ и ИБ рис. 2а резонансной кривой 1 между границами (5),(8) возможны указанные остановки. Реализуется «мягкий» режим, похожий на рис.3б, с вибротранспортированием и величинами амплитуд колебаний между резонансной кривой 1 и границей 2 (тонкая стрелка).

При уменьшении амплитуды возбуждения E_0 в системе рис. 2а возможен случай превышения амплитуд условия срыва массы (5) над амплитудами осциллятора рис.2б. Выход на режимы с вибротранспортированием возможен только на участке АБ кривой 1 путем «жесткого» возбуждения колебаний. Начальные условия для такого режима определяются соответствующим выбором $A(0), \dot{y}(0), \varphi(0) \rightarrow \psi(0)$ с обратным преобразованием по (2) к исходным координатам в (1). На участке ЗИ кривой 1 реализуются устойчивые режимы вибротранспортирования, на участках АЗ и БИ- режимы типа рис.3б.

Выход на «изолированные» АБ участки резонансной кривой 1 возможен также «затягиванием» режима колебаний увеличением с последующим медленным уменьшением амплитуды возбуждения (от случая рис.2а до - рис.2б). Резонансная кривая 3 линейного осциллятора может быть реализована полностью, как на рис. 2б, поэтому отыскать «жесткие» режимы вибротранспортирования экспериментально без расчетов достаточно сложно.

Дальнейшее уменьшение амплитуды возбуждения приведет к тому, что кривая 1 рис. 3б опустится и будет иметь только одну точку К с известной амплитудой и частотой ω_0 на кривой ЗИ. Поэтому возможность регулирования вибротранспортированием изменением амплитуды напряжения E_0 ограничено по второму выражению (4).

4. Рассмотрим особенности полученных режимов. При достаточно малой массе m , $m/M \sim \varepsilon$ член с кулоновым трением в первом уравнении (1) будет второго порядка малости и движение массы в первом приближении не оказывает влияния на колебания. В этом случае режима «жесткого» возбуждения колебаний не существует.

Таким образом, решающее значение в появлении «жестких» режимов вибротранспортирования играет соизмеримость масс, мгновенное изменение колеблющейся массы при начальном толчке. Учет «падающей» характеристики привода сводится к увеличению линейного коэффициента демпфирования, хотя и может повлиять на взаимное расположение резонансных кривых 1, 3 рис. 2а, 2б.

Только в случае с относительно малой транспортируемой массой справедливы все результаты классической теории виброперемещения [1,7], но в первом приближении.

В общем случае с помощью классической теории можно уточнить величину скорости вибротранспортирования для безостановочных режимов (4), (8) [7]

$$V = \omega A^* [\sin(\pi g \alpha / 2f)] \sqrt{1 - \left[\frac{\varepsilon \pi g (f^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2\omega^2 A^* f (\cos \alpha) \cos(\pi g / 2f)} \right]^2}. \quad (9)$$

Во второй формуле (4) без потери точности можно заменить ω_0 на ω , так как в третьем выражении (3) такая замена верна с точностью до ε^2 из-за

$$\omega_0 = \omega - \varepsilon \Delta, \quad \arcsin(\dot{y} / \omega_0 A) = \arcsin(\dot{y} / \omega A) + \varepsilon \Delta(\dots) + \varepsilon^2 \Delta^2(\dots) + \dots$$

Отсюда, точное решение (9) отличается от приближенного (4) на величину порядка ε^2 . Следует отметить, что порядок точности выражений (4) и (9) для системы (1) одинаков.

Другие режимы, чем (4),(9), при которых возможно вибротранспортирование рис. 3б, нельзя рекомендовать для практического использования из-за их вероятной стохастичности. Хотя последняя часто возникает между неустойчивыми предельными циклами, а не между устойчивыми в разных системах, как в рассмотренных случаях.

Режимы с «жестким» возбуждением являются наиболее экономичными по напряжению, току на обмотке вибровозбудителя. Их можно рекомендовать для непрерывного вибротранспортирования. Режимы с «мягким» возбуждением пригодны также для дозирования из-за их реализации при включении машины. Например, при лазерном наплавлении порошка на протяженную поверхность можно использовать вибропитатель с «жестким» режимом, на небольшую поверхность – вибродозатор с «мягким» возбуждением.

Следует отметить ограниченность диапазона скоростей вибротранспортирования в обоих случаях вследствие ограниченности частотных диапазонов рис. 2а,б, чего нет в классической теории. Вследствие этого следует учесть и невозможность реализации сколь угодно малых скоростей вибротранспортирования.

Главные результаты работы опубликованы в [8].

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект № 09-08-00941-а).

Литература

1. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю.. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
2. Ультразвук. Маленькая энциклопедия / Под ред. Голяминой И.П. М.: Советская энциклопедия, 1979. 400 с.
3. Герц М.Е., Герц М.М. Синтез авторезонансных машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 3. С. 3-9.
4. Герц М.Е. Авторезонансные колебания в системе с инерционным самовозбуждением // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 6. С. 3-9.
5. Герц М.Е. Предельные возможности и эффективность резонансных машин // Машиноведение. 1984. № 5. С. 15-22.
6. Ден-Гарток Дж.П. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1969. 580 с.
7. Вибрации в технике. Справочник. Т.4 / Вибрационные процессы. Блехман И.И. М.: Машиностроение, 1981. С. 13-36.
8. Герц М.Е., Герц М.М. Влияние привода на вибротранспортирование // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 2. С. 22-27.

Поступила: 31.08.09.