

УДК 621.01

ЖЕСТКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

М.Е.Герц, М.М.Герц

Институт машиноведения РАН, Россия, Москва

Одной из причин постановки задачи послужил обнаруженный эффект при экспериментах по вибротранспортированию сухого песка по стальному лотку 1 резонансной машины с электродинамическим вибровозбудителем 2 (рис.1). Тоненькая струйка песка при вынужденных колебаниях после переключения в режим автоколебаний превратилась в мощный поток, то есть расход и скорость вибротранспортирования возросли более чем на порядок. Варьирование частотами в обоих случаях показало, что эти характеристики близки к максимально достижимым. Автоколебания возбуждались на частоте, где при вынужденных колебаниях виброперемещения вообще не было. Причем, «затягивание» как из высших, так и из низших частот не приводило к возбуждению этого высокопроизводительного режима при вынужденных колебаниях. Приложенный к лотку импульс приводил к переходу на установившийся режим с большей амплитудой колебаний и с вибротранспортированием. При заданном гармоническом движении лотка такие режимы с «жестким» возбуждением не существуют [1]. Выявление причины появления эффектов - из-за мгновенного изменения массы или из-за «ограниченного возбуждения» при «падающей» статической характеристике вибровозбудителя - являлось задачей настоящей работы. Эффекты объясняются с помощью более простых моделей, чем сыпучая среда.

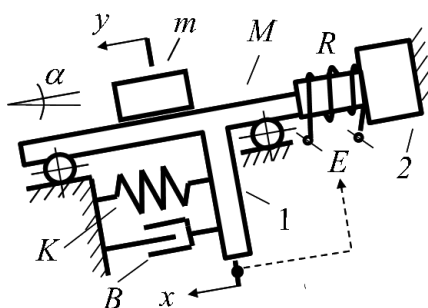


Рис. 1

Результаты работы кроме вибротранспортирования и дозирования могут быть использованы при анализе возможных срывов технологического оборудования с основания, ослабления резьбовых соединений при вибрациях и, возможно, сдвигов или разрушения зданий при землетрясениях. В ультразвуковых системах погружение волновода (излучателя) из воздушной среды в жидкость приводит к уменьшению резонансных частот, что оценивается присоединенной малой массой. При развитии кавитации происходят разрывы между жидкостью и волноводом и резонансные частоты повышаются. Поэтому рассмотренная система может также служить простейшей динамической моделью взаимодействия волновод-среда.

1. Вынужденные колебания. Возможность использования резонанса для уменьшения энергопотребления, габаритов и материалоемкости вибромашин [3] при рациональном выборе параметров также определило конструкцию машины (рис.1).

Суммарная масса M колебательной системы включает кроме лотка и массу катушки

и обмотки с электрическим сопротивлением R . Вибролоток расположен под углом α к горизонту и связан с основанием пружинами общей жесткостью K и коэффициентом сопротивления B . Транспортируемая точечная масса m взаимодействует с массой M через силу кулонова трения. Напряжение возбуждения E на обмотке задается гармоническим с частотой ω , $E = E_0 \cos \omega t$.

Уравнения движения масс при отсутствии остановок в относительных x - y координатах в абсолютных x, y имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -\varepsilon[2b\dot{x} - (sf \cos \alpha) \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) - e \cos \vartheta], \\ \dot{y} &= -\varepsilon g[(f \cos \alpha) \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) - \sin \alpha], \\ \dot{\vartheta} &= \omega, \quad \max|\dot{x}| > g(f \cos \alpha - \sin \alpha), \quad f \cos \alpha > \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega_0^2 = K/M$, $2b = (H^2 + BR)/MR$, $s = mg/M$, $e = E_0 H/MR$, x, y -соответственно координаты масс M и m (рис.1), ε - малый параметр, f - коэффициент кулонова трения, H - коэффициент электромеханической связи.

Первое уравнение с точностью до ε^2 справедливо при малой индуктивности обмотки или использовании "статических" характеристик вибровозбудителей других типов при замене коэффициентов H, R, E_0 [2]. Первое неравенство является необходимым условием неустойчивости режима с совместным (без проскальзывания) движением масс. Второе неравенство соответствует условию равновесия массы m на неподвижной наклонной плоскости. Малость членов первого уравнения определяется условием эффективности использования резонанса для получения максимальных амплитуд колебаний. Стремление к уменьшению материалоемкости машины приводит к соизмеримости масс $m \sim M$, что по первому уравнению приводит к малому параметру во втором.

При стандартной замене переменных

$$x = A \cos \psi, \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin \psi, \quad (2)$$

введении малой расстройки от резонанса $\varepsilon \Delta = \omega - \omega_0$ и медленной переменной $\varphi = \vartheta - \psi$ после осреднения по быстрой переменной ψ в (1) из уравнений первого приближения определяем параметры стационарных режимов

$$A^* = \frac{-bF + \sqrt{\pi^2 e^2 [(\omega_0 - \omega)^2 + b^2] - F^2 [16(\omega_0 - \omega)^2 + 15b^2]}}{2\pi\omega_0 [(\omega_0 - \omega)^2 + b^2]}, \quad (3)$$

$$\dot{y}^* = V = \omega_0 A^* \sin \frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f}, \quad F = fmgM^{-1}(\cos \alpha) \cos \frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f},$$

где V - скорость виброперемещения. Первое неравенство в (1) для стационарных режимов $\dot{\varphi} = 0, \dot{\psi} = \dot{\vartheta} = \omega, \ddot{x} = -\omega^2 A^* \cos(\omega t - \vartheta^*)$ имеет вид

$$A^* > g\omega^{-2}(f \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (4)$$

Виброперемещение $V \neq 0$ (4) возможно только при превышении амплитуды возбуждения E_0 определенного порога $e > 4fs\pi^{-1}(\cos \alpha) \cos(\pi \operatorname{tg} \alpha / 2f)$, $E_0 > 4mgf\pi^{-1}RH^{-1}(\cos \alpha) \cos(\pi \operatorname{tg} \alpha / 2f)$, прямопропорционального коэффициенту трения f , что характерно для систем с кулоновым трением.

При горизонтальном лотке $\alpha = 0$ скорость виброперемещения равна нулю $V = 0$, её амплитуда колебаний порядка ε^2 . Увеличение угла наклона и скорости виброперемещения равносильно уменьшению влияния кулонова трения на колебания лотка и уменьшению коэффициента трения f (3). При достаточно больших колебаниях лотка $A^* \gg \omega_0 V$, этого

уменьшения нет и амплитуда колебаний A^* такая же, как у горизонтального лотка (3). В этом случае влияние колебаний на массу m аналогично линейному вязкому трению, $\arcsin(\dot{y}^* / \omega_0 A^*) \approx \dot{y}^* / \omega_0 A^*$.

Амплитудно-частотная характеристика машины $A(\omega)$ симметрична относительно оси $\omega = \omega_0$ (3) – кривая 1 рис.2. Условие (4) соответствует кривой 2. Участки $A(\omega)$, не отвечающие условию (4), с граничными точками А и Б показаны пунктиром.

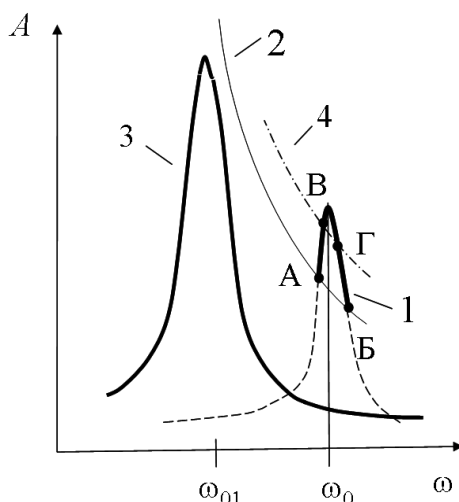


Рис. 2

Необходимым и достаточным условиям асимптотической устойчивости стационарных режимов (3) при $\cos \alpha > 0$ отвечает вся резонансная кривая 1 рис. 2, включая участки, не отвечающие неравенству, которое не связано с условиями существования режимов (3). Вопрос об этих участках решается далее при рассмотрении переходных процессов.

При нулевых начальных условиях $x = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0, (A = 0, \psi = 0)$ при действии гармонического возбуждения E в системе (рис.1,2) обе массы движутся совместно. Параметры переходного и стационарного режимов определяются в этом случае по известным точным формулам для линейного осциллятора массы $M + m$ с демпфированием b . На рис.2 кривой 3 показаны параметры стационарных режимов без проскальзывания, которые реализуются при $x = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0, (A = 0, \psi = 0), \omega_{01} = K / (M + m)$.

Режимы с «жестким» возбуждением находятся на участке АБ кривой 1 рис.2. После замены переменных (2) задача определения стационарной скорости движения массы m по второму уравнению в (1) сводится к классической задаче [1] о виброперемещении массы на вибрирующем по гармоническому закону с амплитудой A и частотой ω основании. Из точных решений следует, что при амплитудах колебаний основания меньших границы (4) единственным стационарным режимом является режим совместного движения массы с основанием, поэтому реализация режимов виброперемещения возможна только в пределах АБ кривой 1 рис.2.

Из точного решения также известно, что выше и вблизи границы (4) возможны только режимы с остановками конечной продолжительности в относительном движении. Граница существования режимов только с мгновенными остановками определяется из [1] по двум параметрам f, α

$$A^* > k\omega^{-2}, \quad (5)$$

где $k = const$. Кривая 4 рис.2 по выражению всегда выше кривой 3 и изображена штрих-

пунктиром. На участках АВ и ГБ кривой 1 реализуются режимы типа рис.3. Амплитуда колебаний возрастает, стремясь к величине A^* в соответствии с уравнениями первого приближения из (1) до остановки в относительных координатах. Затем, система теряет одну степень свободы и амплитуда по уравнениям линейного осциллятора стремится к стационарному режиму на кривой 3. После достижения амплитудой величин больших кривой 2 процесс повторяется.

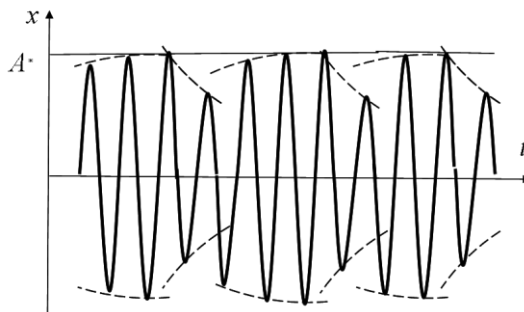


Рис. 3

На каждом этапе движение описывается разными уравнениями с разным числом степеней свободы (система с переменной структурой). Здесь не используются уравнения для систем с переменной массой, так как относительная скорость масс M и m в момент разделения равна нулю. Определены случаи, в которых возможно решение задачи Коши с заданной точностью.

С помощью классической теории [1] можно уточнить величину скорости вибротранспортирования для безостановочных режимов участка ВГ кривой 1 рис.2

$$V = \omega^{-1} A^{*-1} [\sin(\pi g \alpha / 2f)] \sqrt{1 - \left[\frac{\varepsilon \pi g (f^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2\omega^2 A^* f (\cos \alpha) \cos(\pi g / 2f)} \right]^2}. \quad (6)$$

Точное решение (6) отличается от приближенного (3) на величину порядка ε^2 . Другие режимы, при которых возможно вибротранспортирование рис.3, нельзя рекомендовать для практического использования из-за их вероятной стохастичности. Хотя последняя часто возникает между неустойчивыми предельными циклами, а не между устойчивыми в разных системах, как в рассмотренных случаях.

Показано, что «жесткие» режимы вибротранспортирования появляются при соизмеримости масс $m/M \sim 1$, из-за мгновенного изменения колеблющейся массы при начальном толчке. Для системы рис.1 только в случае с относительно малой транспортируемой массой справедливы все результаты классической теории виброперемещения [1], но в первом приближении.

Режимы с «жестким» возбуждением являются наиболее экономичными по напряжению, току на обмотке вибровозбудителя. Их можно рекомендовать для непрерывного вибротранспортирования. Следует отметить ограниченность диапазона скоростей вибротранспортирования вследствие ограниченности частотных диапазонов, чего нет в классической теории.

2. Автоколебания. Напряжение E на обмотке формируется на выходе обратной связи по координате x лотка рис.1. В (1) вместо первого уравнения добавляются

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon [D \operatorname{sgn} u + sf (\cos \alpha) \operatorname{sgn}(\dot{y} - \dot{x}) - 2bx], \\ Q\dot{u} + u &= Q\dot{x} - x, \end{aligned} \quad (7)$$

где $D = E_0 H / MR$, $E = E_0 \operatorname{sgn} u$ - напряжение на обмотке вибровозбудителя в функции переменной u , $E_0 = \operatorname{const} > 0$, $Q = \operatorname{const} > 0$.

Уравнения (7) с точностью до ε^2 справедливы при малой индуктивности обмотки или

использовании “статических” характеристик вибровозбудителей других типов [2]. Второе уравнение относится к линейной части обратной связи, формирующей переменную u в функции координаты x , например, с помощью фазовращателя – электрического моста с попарно равными величинами сопротивлений R_1 и емкостей C , $Q = R_1 C$ [2]. Предложенная модель относится к синхронным авторезонансным машинам [3], в которых частота сигнала на входе вибровозбудителя (E) в первом приближении равна частоте автоколебаний.

После подстановки в (2) $\psi = \omega_0 t + \varphi$ используется метод [4] осреднения для систем с быстрыми u , t и медленными \ddot{y} , A , φ переменными. В этом случае перед осреднением по времени t в первое уравнение (7) достаточно подставить стационарное значение $u = u^* = A \cos(\psi + \gamma)$, $\sin \gamma = 2\omega_0 Q / (\omega_0^2 Q^2 + 1)$, $\cos \gamma = (\omega_0^2 Q^2 - 1) / (\omega_0^2 Q^2 + 1)$ из второго уравнения (7) с учетом (2) [3]. Здесь γ имеет смысл фазы обратной связи.

После осреднения (7) с учетом (1) из уравнений первого приближения при $\dot{A} = 0$, $\ddot{y} = 0$, $\psi^* = \omega_0 + \dot{\varphi}^*$ найдены параметры стационарных режимов

$$A^* = 2(\omega_0 \pi b)^{-1} [D \sin \gamma - sf (\cos \alpha) \cos(\frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f})],$$

$$\omega = \dot{\psi}^* = \omega_0 - 2\varepsilon D (\pi \omega_0 A^*)^{-1} \cos \gamma, \quad (8)$$

$$V = \dot{y}^* = \omega_0 A^* \sin(\frac{\pi \operatorname{tg} \alpha}{2f}),$$

где ω - частота автоколебаний. Первое неравенство в (1) для стационарных режимов (8), где $\psi_0^* = -\varphi_0^*$, $\ddot{x} = -\omega^2 A^* \cos(\omega t - \varphi_0^*)$, имеет вид (4)

Вибротранспортирование $V \neq 0$ возможно также при превышении амплитуды напряжения E_0 определенного порога $E_0 > mgfRH^{-1}(\cos \alpha) \cos(\pi \operatorname{tg} \alpha / 2f)$.

Зависимость $A(\omega)$ при различных Q совпадает с амплитудно-частотной характеристикой при вынужденных колебаниях $E = E_1 \cos \omega t$, $E_1 = 4E_0 / \pi$. При этом параметр γ равен фазе вынужденных колебаний. Из (8) следует, что максимальная скорость вибротранспортирования достигается при частоте автоколебаний равной собственной частоте лотка $\omega = \omega_0$, $\cos \gamma = 0$, $\gamma = \pi / 2$, $Q = \omega_0^{-1}$.

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости стационарных режимов (8) сводятся к неравенству $\cos(\pi \operatorname{tg} \alpha / 2f) > 0$, которое выполняется по условиям существования решений (8), причем каждое значение параметра Q однозначно определяет частоту и амплитуду автоколебаний. Поэтому, объяснение экспериментальных эффектов отыскивается при исследовании переходных процессов.

В первом приближении получены аналитические выражения установления автоколебаний. Переходной процесс состоит из двух этапов. На первом до разделения масс система представляет собой линейный осциллятор с собственной частотой ω_{01} и обратной связью. Такая система исследовалась в [2]. Амплитуда стремится к стационарному значению из любых начальных условий, в том числе из нулевых, то есть условия самовозбуждения выполняются.

В примере, объясняющем экспериментальные эффекты (рис.4), обозначения кривых рис.2. Если условия проскальзывания масс (4) не выполняется, то вибротранспортирования не происходит и только за один этап устанавливается стационарный режим с параметрами (8) при замене в них M на $m + M$ и $s = 0$, $F = 0$, $V = 0$ (сплошные линии кривой 3). Как показано в [2], этот режим устойчив. Зависимость амплитуды от частоты автоколебаний совпадает с амплитудно-частотной характеристикой линейного осциллятора при вынужденных колебаниях и показана кривой 3. Нереализуемый участок кривой 3 с амплитудами,

отвечающими (4), показан штрихами. Значения параметра Q , соответствующие этому участку, определяют частотный диапазон самовозбуждающихся режимов вибротранспортирования. Зависимость амплитуды автоколебаний от частоты ψ в процессе установления показана тонкими стрелками.

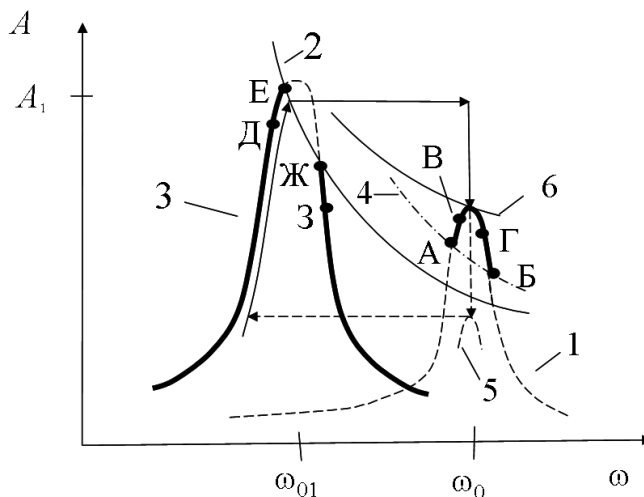


Рис. 4

На втором этапе после выполнения условия разделения масс (4) система приобретает еще одну степень свободы и её переходной процесс описывается уравнениями первого приближения из (7) с начальными условиями конца предыдущего этапа. Частота автоколебаний изменяется скачком и стремится к стационарному режиму вибротранспортирования на кривой 1 рис.4. Такие режимы возможны только при отсутствии остановок в относительном движении масс, расположены выше кривой 4 (5) и показаны сплошной линией.

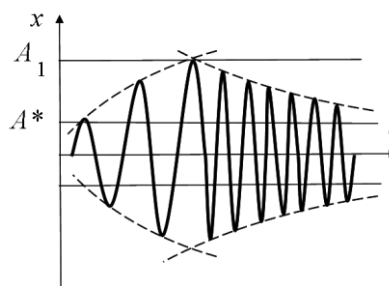


Рис. 5

Весь процесс показан на рис.5 и соответствует экспериментальному режиму «мощный поток» в преамбуле. Анализ по п.1 показал, что на участке ЕЖ кривой 3 рис.4 при вынужденных колебаниях реализуется режим типа рис.3 с малой скоростью вибротранспортирования- «тоненькая струйка», а режимы с большими скоростями – выше кривой 4 – возможны только при «жестком» возбуждении.

Таким образом, объяснены экспериментальные эффекты.

Кроме того, найдены режимы с «жестким» возбуждением автоколебаний с малыми скоростями вибротранспортирования- на участках АВ и ГБ. На них после приложения внешнего импульса переходной процесс имеет вид рис.3, но с изменением частоты на этапах.

Здесь имеет место эффект «затягивания» автоколебаний. При увеличении параметра Q последовательно реализуются стационарные режимы на участках кривых ДЕ, ВГБ, ниже т.З, при уменьшении Q - ЗЖ, ГВА, ниже т.Д. Отметим, что жесткие режимы автоколебаний также наблюдались в эксперименте.

Анализ переходных и стационарных самовозбуждающихся режимов позволяет кроме вибротранспортирования рекомендовать их применение в задачах дозирования. Для них можно улучшить результаты первого приближения с (6).

Заметим, что при использовании вынужденных колебаний с маломощным вибровозбудителем (случай рис.2) без введения дополнительного привода (стартера) реализация таких режимов возможна только с применением следующей системы управления. Вначале на вибровозбудитель подается напряжение низкой частоты ($\sim \omega_{01}$), которое после начала относительного движения масс заменяется напряжением высокой частоты ($\sim \omega_0$) с той же амплитудой E_0 . Обратная связь в (7) заменяет такую систему управления. Энергия, накопленная на частотах, где она близка к максимально возможной, используется для выхода на частоты жестких режимов вынужденных колебаний.

Применение авторезонансных машин для диагностики возможных срывов оборудования с основания или ослабления резьбовых соединений, особенно при наличии изолированных участков резонансных кривых, также понизит номинальную мощность вибровозбудителей. Здесь, интересным является случай взаимного расположения кривых 1, 5 (вместо 3). Автоколебания типа рис.3 показаны на рис. 4 сплошной и штриховой стрелками. По-видимому, такой режим также был замечен в эксперименте. Наблюдались редкие неперiodические удары со звоном, как у обрывающейся струны. «Опасные» характеристики типа 5 в режиме вынужденных колебаний экспериментально не определяются.

Основным недостатком резонансных машин является большая чувствительность к изменению параметров: собственной частоты, жесткости пружин, массы рабочего органа и др. При вибротранспортировании и дозировании масса сыпучего материала на лотке переменна. Авторезонансные машины обладают адаптивными свойствами поддержания резонансного режима [2,3]. В соответствии с (8) при $Q = const$ частота и амплитуда автоколебаний машины (7) при изменении жесткости будут соответствовать кривой 6 рис.4. При изменении других параметров скорость вибротранспортирования также будет близка к максимально достижимой, соответствующей резонансу.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проект 09.08.00941).

Литература

- 1.Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М: Наука, 1964. 410 с.
2. Герц М.Е. Авторезонансные колебания в системе с инерционным самовозбуждением // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 6. С. 3-9.
3. Герц М.Е., Герц М.М. Синтез авторезонансных машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 2. С. 22-27.
4. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Наука, 1981. 400 с.

Поступила: 14.05.09.