**УДК 534**

# К АНАЛИЗУ ДИНАМИКИ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКИ

**В.Л. КРУПЕНИН**

1. Рассмотрим прямоугольную решетку [1], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих одинаковых линейных струн, защемленных на концах и имеющих соответственно длины L1 и L2 (рисунок). Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0,1,2,., N_1$ и $q = 0,1,2.. N_2$. В вершинах решетки помещены точечные абсолютно твердые тела с одинаковыми массами m.

Предполагается, что прямоугольные ячейки решетки одинаковы, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка (дискретный аналог мембраны) - анизотропная. Струнные элементы предполагаются безынерционными. Крепления струн в узлах считаются абсолютно жесткими, а их натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину $\Delta L_1$; «вертикальная» - $\Delta L_2$ .(рис1). Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение $T_1$ , а «вертикальные участки» - соответственно $T_2$.

Таким образом, динамика решетчатой конструкции может быть описана посредством функций смещения узлов решетки $u_{kq}(t)$, где индексы $k=0,1,2,.. N_1$; $q=0,1,2,.. N_2$. При этом каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Будем считать, что первый по счету индекс (в данном случае k – нумерует струну, расположенную «слева направо» или наоборот), а второй индекс (в данном случае q – «снизу вверх» или наоборот).

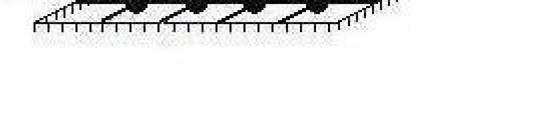


Рис.1

Пусть силы диссипации, вынуждающие силы, а также любые другие неконсервативные силы, действующие в решетке на каждое из массивных точечных тел – малы. Обозначив их $\varepsilon g_{kq}(t,\ u_{kq},\ \dot{u}_{kq},\ldots)$, где многоточие обозначает прочие неучитывыемые сейчас переменные, ε - малый параметр, модель системы построим следующим образом. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то для всех значений индексов имеем N уравнений:

$$m\ddot{u}_{kq}+c_1(2u_{kq}-u_{(k-1,q)}-u_{(k+1,q)})+c_2(2u_{kq}-u_{(k,q-1)}-u_{(k,q+1)})=\varepsilon g_{kq}(t,\ u_{kq},\ \dot{u}_{kq},\ldots). \quad (1)$$

Здесь соответственно обозначено: $c_{1,2} = T_{1,2}/\Delta L_{1,2}$ – коэффициенты упругости. Граничные условия защемления можно записать как (ср. [1-3]) $u_{kq}=0$, при $k=0;N_1$; $q=0;N_2$. Поэтому $N= (N_1-1)(N_2-1)$.

При необходимости сюда могут быть добавлены начальные условия. Однако далее рассматриваются установившиеся режимы движения. И поэтому вид начальных условий - несущественен.

**2.** Приведем операторные уравнения движения, следующие из уравнений (1). В соответствии с общими методиками [2, 3] построим сначала оператор динамической податливости $\hat{L}(p)=\|L_{kq,nj}(p)\|$; $p\equiv d/dt$,

В данном случае выражение $L_{kq,nj}(p)$ обозначает проходной оператор динамической податливости [2], ставящей в соответствие силе, приложенной в узле (n, j) перемещение узла (k, q). И, соответственно, при n=k, j=q – имеем локальные операторы динамической податливости [2], отвечающие перемещению узла, вследствие силы, приложенной в нем самом. Для рассматриваемой системы принцип взаимности записывается как $L_{kq,nj}(p) =$
$= L_{nj,kq}(p)$.

Отметим, что четырехиндексная нумерация компонент системы операторов динамической податливости $L_{kq,nj}(p)$ вызвана тем обстоятельством, что каждый узел нумеруется парой индексов. В принципе имеется возможность «спрямить» нумерацию и каждому узлу присвоить единственный номер. Это, однако, породит большие формальные сложности.

Система уравнений движения (1) при этом разрешается в виде

$$\|u_{kq}\|=\varepsilon\hat{L}(p)\|g_{,nj}\|,.$$

где $\varepsilon\|g_{kq}\|$ - матрица внешних сил, приложенных в узлах решетки.. что покомпонентно записывается так:

$$u_{kq}(t)=\varepsilon\sum_{(n)}\sum_{(j)}L_{kq,nj}(p)g_{,nj}(t). \quad (2)$$

Соответствующие построения можно провести и для многокомпонентного оператора динамической жесткости $\hat{E}^{-1}$(p) [2, 3].

Отметим, что при таком выборе модели, даже линейные силы демпфирования относятся к внешним воздействиям. При выборе популярных линейных моделей диссипации, силы демпфирования могут быть учтены в самой структуре оператора $\hat{E}$(p) [2-4] (см. п.4).

Выражения для операторов динамических податливостей полностью определяются наборами собственных частот $\{\Omega_{kq}\}$ и нормированных коэффициентов собственных форм $\{\Theta_{kq}\}$ линейной системы [2,3].

Используя результаты, данные в монографии [1] для решетки рассматриваемого типа:

$$\Omega^2_{kq} = \frac{2T_1}{m\Delta L_1}[1-\cos(k\pi N_1^{-1})] + \frac{2T_2}{m\Delta L_2}[1-\cos(q\pi N_2^{-1})],$$

(3)

$$\Theta_{kq}=C\sin(kn\pi N_1^{-1})\sin(qj\pi N_2^{-1}),$$

(4)

где C=const. При этом в силу выбранных граничных условий n = 1,2,… $N_1$-1 и также j = 1,2,… $N_2$-1. В соответствии с общими методами построения операторов динамической податливости [2,3] теперь можно получить для компонентов оператора $\hat{E}$(p), определяющих (2):

$$L_{kq,nj}(p)=\zeta\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1}\sin(k\alpha\pi N_1^{-1})\sin(q\beta\pi N_2^{-1})\sin(\alpha n\pi N_1^{-1})\sin(\beta j\pi N_2^{-1})(\Omega^2_{\alpha\beta}+p^2)^{-1}.$$

(5)

Здесь введен нормировочный коэффициент $\zeta$, который, в общих случаях удобнее всего вычислять при конкретно заданных параметрах системы. В данном случае можно положить: $\zeta=2[(N_1-1)(N_2-1)]^{-2}$.

**3.** Пусть число струн в обоих семействах достаточно велико и, следовательно, величины $\Delta L_{1,2}=O(\mu)$ – достаточно малы (μ- второй малый параметр). Пусть в то же время, величины $\gamma=m/(\Delta L_1\Delta L_2)$– масса единицы площади решетки, а также $T_x=T/\Delta L_1$, $T_y=T/\Delta L_2$ - погонные натяжения – не малы и имеют порядок O(*1*).

Систему уравнений движения (1) можно континуализировать [1], рассматривая его как конечно-разностный аналог гладкой системы с распределенными параметрами. Проводя континуализацию, обычно рассматривают достаточно гладкую функцию u(x, y, t), совпадающую (в данном случае) в узлах решетки с исходными функциями $u_{kq}$(t).

Входящие в уравнение движения выражения $[2u_{kq}-u_{(k-1,q)}- u_{(k+1,q)}]$ и $[2u_{kq}-u_{(k,q-1)}- u_{(k,q+1)}]$ заменим их аналогами вида:

$$2u_{kq}-u_{(k-1,q)}- u_{(k+1,q)} =2u(x, y, t) - u(x-\Delta L_1, y, t) - u(x+\Delta L_1, y, t);$$
$$2u_{kq}-u_{(k,q-1)}- u_{(k,q+1)} = 2u(x, y, t)- u(x, y-\Delta L_2, t)- u(x, y-\Delta L_2, t) \quad (6)$$

Проводя разложения по степеням членов $O(\mu)$, приходим к уравнению в частных производных. В данном случае с точностью до малых порядка $O(\mu^2)$, в исходном континуальном приближении будем иметь уравнение анизотропной мембраны:

$$\gamma u_{tt} - T_x u_{xx} - T_y u_{yy}+\ldots=\varepsilon g(t, u, \dot{u},\ldots), \quad (7)$$

где многоточие в левой части уравнения обозначает отбрасываемые здесь члены $O(\mu^2)$.

Если рассмотреть наиболее популярную модель изотропной мембраны, когда натяжения равны: $T_x=T_y\equiv T$ при $\varepsilon=0$, приходим к хорошо известному и досконально изученному уравнению классической натянутой по контуру мембраны:

$$u_{tt} =c^2(u_{xx}+u_{yy}), \qquad c^2= T\gamma^{-1}. \quad (8)$$

В данном случае исходные граничные условия приводят к прямоугольной, защемленной по всем краям мембране. При высокой концентрации струн в исходной модели решетки можно приближенно положить в (5) $\zeta= 4(L_1L_2)^{-1}$ [5].

**4.**.Операторы динамической податливости полностью определяются линейными частями систем. При этом в случае, когда диссипация энергии, описывается посредством каких-либо «линейных гипотез», соответствующие члены могут быть внесены в представления для операторов.

Пусть, например каждый из узлов решетки снабжен вязким демпфером. Тогда, вместо (1) имеем систему уравнений движения вида:

$$m\ddot{u}_{kq}+ 2b_1(2\dot{u}_{kq}-\dot{u}_{(k-1,q)}- \dot{u}_{(k+1,q)})+2b_2(2\dot{u}_{kq}-\dot{u}_{(k,q-1)}- \dot{u}_{(k,q+1)})+c_1(2u_{kq}-u_{(k-1,q)}- u_{(k+1,q)})+c_2(2u_{kq}-u_{(k,q-1)}- u_{(k,q+1)})= \varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq},\ldots), \quad (9)$$

В этом случае представление операторов динамической податливости усложняются. В предположении относительно малых уровней диссипации [2, 3]
оказывается возможным сохранение формы записи (5) так что вместо сомножителей $(\Omega^2_{\alpha\beta}+p^2)^{-1}$ в представление для двойного бесконечного ряда, собственно и определяющего (5), здесь будут фигурировать сомножители вида $(\Omega^2_{\alpha\beta}+2\psi_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}\,p+p^2)^{-1}$, где функции $\psi_{\alpha\beta}=\psi_{\alpha\beta}(b_{1,2},c_{1,2})$ легко вычисляются.

Существуют гипотезы трения, при принятии которых представление (5), с учетом внесенных поправок оказывается точным [2].

**5.** Рассмотрим описание периодических режимов движения рассматриваемых струнных решеток. Пусть вначале в уравнении движения (1) правые части зависят только от времени, то есть анализируемая система – гамильтонова:. $g_{kq}(t,\ u_{kq},\ \dot{u}_{kq},\ldots)\equiv g_{kq}(t)$. И пусть, кроме того, эти правые части периодичны по времени с периодом T: $g_{kq}(t+T)==g_{kq}(t)$ при всех $k$ и $q$.

Подобная задача в общем случае хорошо изучена [2 –4, 6] и необходимо адаптировать теорию к случаю модели решетчатой конструкции. Отыскивая T-периодическое решение, целесообразно воспользоваться методами интегральных представлений периодических решений [2 - 4], в соответствии, с чем искомые T - периодические вибрационные процессы представимы в виде

$$u_{kq}(t)=\varepsilon\sum_{(n)}\sum_{(j)}\int_0^T \chi_{kq,nj}(t-s)g_{nj}(s)ds, \qquad (10)$$

где функции $\chi_{kq,nj}(t-s)$ называются T - периодическими функциями Грина (ПФГ) [2-4] – проходными ($k\neq n;\ q\neq j$) или локальными ($k=n;\ q=j$) – и определяются соответствующим оператором динамической податливости так:

$$\chi_{kq,nj}(t)=T^{-1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}L_{kq,nj}(i\sigma\omega)\exp(i\sigma\omega t),$$

(11)

причем, как обычно, $T=2\pi\omega^{-1}$.

Физический смысл ПФГ $\chi_{kq,nj}(t)$ – реакция узла (k,q) на силовое воздействие, приложенное в узле (n,j) и описываемое T– периодической последовательностью δ-функций Дирака – $\delta^T(t)$. По определению

$$\delta^T(t)=\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta(t-Kt).$$

Эту обобщенную периодическую функцию можно разложить в сходящийся в обобщенном смысле ряд Фурье вида [2 - 4]:

$$\delta^T(t)= T^{-1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \exp(i\sigma\omega t). \qquad (12)$$

Физический смысл обобщенной функции $\delta^T(t)$ – суть периодические последовательности мгновенных ударов с единичными импульсами, которые повторяются через времена, кратные времени t=T.

Таким образом, каждая функция $\chi_{kq,nj}$ (t-s) – это отклик узла решетки (k,q) на периодическую последовательность ударов с заданными стандартными параметрами, наносимых в узле (n,j) при условии, что все другие узлы свободны от внешних воздействий. Такой подход часто применяется как основа для определения ПФГ [2-4].

Далее внося в (12) формулу (5) и заменяя p=iσω, найдем:

$$\chi_{kq,nj}(t)= \qquad (13)$$

$$=T^{-1}\zeta\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \exp(i\sigma\omega t)\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1}\sin(k\alpha\pi N_1^{-1})\sin(q\beta\pi N_2^{-1})\sin(\alpha n\pi N_1^{-1})\sin(\beta j\pi N_2^{-1}) \Big/ (\Omega^2_{\alpha\beta}-\sigma^2\omega^2).$$

Представления (10), (11) и (13) полностью определяют искомые перемещения узлов решетки при сделанных выше ограничивающих предположениях. Нахождение указанных перемещений сводится к выполнению $N=(N_1-1)(N_2-1)$ квадратур; сами перемещения, очевидно, будут даваться, вообще говоря, бесконечными рядами. Как было отмечено в п.4, при учете моделей линейного трения, члены, стоящие в формуле ПФГ (13) вслед за косой чертой, должны быть модифицированы и иметь вид $(\Omega^2_{\alpha\beta}+2i\sigma\psi_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}-\sigma^2\omega^2)$.

Пусть внешние T - периодические силы обладают свойством симметрии, то есть для всех индексов $k$ и $q$ имеют место соотношения: $g_{kq}(t+T/2)=-\ g_{kq}(t)$. Тогда, очевидно, свойством симметрии будут обладать также и перемещения узлов решетки. Для отыскания симметричных T – периодических режимов движения в соответствии с разработанными [2-4] алгоритмами частотно-временных методов (методов периодических функций Грина) используются симметричные ПФГ

$$\chi^\circ_{kq,nj}(t)=\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} L_{kq,nj}[i(2\sigma+1\}\omega]\exp[i(2\sigma+1\}\omega t],$$

(14)

В соответствии с чем, внося сюда представление (5), получим:

$$\tilde{\chi}_{kq,nj}(t)= \qquad (15)$$

$$2T^{-1}\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}\zeta\exp[i(2\sigma+1)\omega t]\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1}\sin(k\alpha\pi/N_1)\sin(q\beta\pi/N_2)\sin(\alpha n\pi/N_1)\sin(\beta j\pi/N_2)[\Omega^2_{\alpha\beta}-(2\sigma+1)^2\omega^2]^{-1}$$

При этом вместо определяющего интегрального представления (10) будем иметь [2-4]:

$$u_{kq}(t)=\varepsilon\sum_{(n)}\sum_{(j)}\int_0^{\frac{T}{2}}\chi^{\circ}_{kq,nj}(t-s)g_{nj}(s)ds, \tag{16}$$

Симметричная ПФГ $\chi^{\circ}_{kq,nj}$ – суть реакция системы на симметричную периодическая последовательность δ-функций Дирака [2-4]:

$$\delta^{T/2}(t)=\sum_{K=-\infty}^{\infty}[\delta(t-Kt)-\delta(t-T/2-Kt)],$$

которая представима через обобщенный ряд Фурье по нечетным гармоникам:

$$\delta^{T/2}(t)=\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}\exp[i(2\sigma+1)\omega t]. \tag{17}$$

Физический смысл обобщенной функции $\delta^{T/2}(t)$ – T - периодические последовательности мгновенных ударов с единичными импульсами, которые через каждую половину периода изменяют свое направление на противоположенное по отношению к положительному первоначальному. Каждая функция $\chi^{\circ}_{kq,nj}$ (t-s) - отклик (перемещение) узла решетки (k,q) на симметричную T - периодическую последовательность ударов, наносимых в узле (n, j), при условии, что все другие узлы свободны от каких – либо внешних воздействий.

Заметим, что для «элементарных» операторов $(\Omega^2_{\alpha\beta}+p^2)^{-1}$, соответствующие ПФГ, могут быть записаны не только в виде бесконечных рядов, но и при помощи конечных формул [2-4]. В данном случае оказывается

$$\chi_{\alpha\beta}(t)=(2\Omega_{\alpha\beta})^{-1}\cos[\Omega_{\alpha\beta}(t-T/2)]\sin^{-1}(\Omega_{\alpha\beta}T/2), \tag{18}$$

причем это представление имеет место только при $0\le t<T$, а для других всех других значений t необходимо продолжить это представление по периодичности на всю числовую ось. Аналогично

$$\chi^{\circ}_{\alpha\beta}(t)=(2\Omega_{\alpha\beta})^{-1}\sin[\Omega_{\alpha\beta}(t-T/4)]\cos^{-1}(\Omega_{\alpha\beta}T/4), \tag{19}$$

причем это представление имеет место только при $0\le t<T/2$, а для других t необходимо продолжить это представление по периодичности на всю числовую ось, учитывая также и условие симметрии $\chi^{\circ}_{\alpha\beta}(t+T/2)=-\chi^{\circ}_{\alpha\beta}(t)$.

Представления (18) и (19) должны быть скорректированы при выходе значения аргумента из интервала периодичности или, соответственно, симметрии. Соответствующие формулы здесь не понадобятся и не приводятся [2-4]. Эти представления позволяют существенно упростить формулы (13) и (15). Например, вместо (13) можно записать:

$$\chi_{kq,nj}(t)=\zeta\sum_{\alpha=1}^{N_1-1}\sum_{\beta=1}^{N_2-1}\sin(k\alpha\pi N_1^{-1})\sin(q\beta\pi N_2^{-1})\sin(\alpha n\pi N_1^{-1})\sin(\beta j\pi N_2^{-1})\chi_{\alpha\beta}(t) \quad , \quad 0\le t<T,$$

(20)

где выражение $\chi_{\alpha\beta}(t)$ определяется при помощи (18). Аналогично имеем и для формулы (15).

Заметим также, что конечные выражения типа (18) и (19) могут быть выписаны и для «элементарного» оператора $(\Omega^2_{\alpha\beta}+2\psi_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}\,p\ +p^2)^{-1}$. Сложность записей соответствующих выражений определяет редкость их использования при проведении практических расчетов [2-4].

**6.** Теперь выведены все необходимые соотношения, позволяющие в линейном случае анализировать вибрационные поля решетки, а для нелинейного случая получить удобные для некоторых типов нелинейностей исходные представления. Вопросы, относящиеся к нелинейным задачам, будут рассмотрены в последующих публикациях. Здесь ограничим рассмотрения примерами линейных задач.

Рассмотрим некоторое семейство узлов решетки (для их выделения будем использовать в качестве индексов прописные буквы - {(K,Q)}) .

В качестве первого примера рассмотрим колебания решетки при условии, что к каждому узлу из указанного семейства, приложена сила из семейства $\{A_{KQ}\cos(\nu t+\varphi_{KQ})\}$. При этом прочие узлы – свободны от внешних силовых воздействий. Вязкое демпфирование учитывается (см. уравнения движения в форме (9)) посредством введением в матрицу операторов динамической податливости членов вида $(\Omega^2_{\alpha\beta}+2\psi_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}\,p + p^2)^{-1}$ (см. выше).

Учитывая линейность системы и основные свойства операторов динамической податливости, получаем функций смещения узлов решетки:

$$u_{kq}(t)=\sum_{(K,Q)}L_{kq,KQ}(p)A_{KQ}\cos(\nu t+\varphi_{KQ}),$$

где суммирование ведется только по узлам семества {(K,Q)}.Оператор динамической податливости дается при помощи (5) (с учетом сделанной оговорки об учете демпфирования). Тогда

$$u_{kq}(t)=\sum_{(K,Q)}A_{KQ}\,L_{kq,KQ}(i\nu)\cos(\nu t+\Psi_{KQ}),\quad \Psi_{KQ}=\arg\,[\,L_{kq,KQ}(i\nu)]+\varphi_{KQ}. \tag{21}$$

Методики вычисления модулей и аргументов для операторов сложной структуры типа, например, (5) – стандартны [2 - 5]. Используя формулу (21) следует иметь в виду, что рассматриваемая конструкция имеет, вообще говоря, $N=(N_1-1)(N_2-1)$ собственных частот (3).

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда по узлам, входящим в семейство $\{(K,Q)\}$ периодически наносятся удары, описываемые при помощи обобщенных функций $\{B_{KQ}\delta^{\tau}(t-\varphi_{KQ})\}$, где $B_{KQ}$ и $\varphi_{KQ}$ –заданные параметры ударов (их импульсы и фазы), а $\tau=2\pi/\nu$ - период их нанесения; $0\leq\varphi_{KQ}\leq\tau$ . Воспользовавшись интегральным представлением (10), найдем для перемещений узлов:

$$u_{kq}(t)=\int_0^T B_{KQ}\,\chi_{kq,KQ}\,(t-s)\delta^{\tau}(s-\varphi_{KQ})ds. \qquad (22)$$

Принимая во внимание свойства периодических последовательностей δ-функций [2-4] и определение ПФГ $\chi_{kq,KQ}\,(t-s)$ (п.5), из представления (22) выводим для перемещений узлов решетки:

$$u_{kq}(t) = \sum_{(K,Q)} B_{KQ}\chi_{kq,KQ}(t-\varphi_{KQ}), \qquad (23)$$

что вместе с формулами (18) и (20) (в пренебрежении трением) и определяют искомое решение. В данном случае это решение – суть некоторые линейные комбинации ПФГ (20), (18).

Учитывая, достаточно сложную структуру ПФГ $\chi_{kq,KQ}(t)$, а также возможную произвольность фаз, можно получить достаточно сложную структуру двумерного поля перемещений узлов.

Отметим, что представление (21) может быть построено и при помощи интегральной формулы (22). Однако здесь ПФГ должны учитывать затухание [2-4].

Отметим также, что решетки рассматриваемого типа обладают определенными фильтрующими свойствами [1,6]. Изучение свойств таких двумерных фильтров представляет собой самостоятельную актуальную проблему.

## Литература

1. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. - Ташкент: ФАН, 1973. – 272 с.
2. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.

3. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
4. Розенвассер Е.Н. Колебания нелинейных систем – М.: Наука, 1969. – 576 с.
5. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами
6. Крупенин В.Л. О прохождении виброударных процессов через механические фильтры // Проблемы машиностроения и надежности машин.- №6. - 1993 г. С.22-28.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-08-50183).*

*Поступила: 20 августа 2007 г.*