

УДК 534:621.01

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ МУЛЬТИМОДУЛЬНОГО ПРИВОДА ДЛЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ

И.И. Вульфсон

Санкт-Петербургский Государственный Университет Технологии и Дизайна, Россия

Аннотация. На базе теории регулярных колебательных систем разработана методика частотного анализа привода, состоящего из ряда динамически идентичных секций (модулей), связанных с общим главным валом. В каждой секции исполнительный орган шарнирно связан с выходными звеньями цикловых механизмов, осуществляющих его периодическое программное движение.

Ключевые слова: колебания, механизм, регулярные системы.

1. Введение

В современных технологических машинах и автоматических линиях для осуществления поступательного программного движения исполнительных органов применяются идентичные цикловые механизмы, работающие в параллельной схеме. Такие схематические и конструктивные решения достаточно широко распространены в текстильных, полиграфических, упаковочных машинах и в других отраслях промышленности. Наряду с одиночным приводом рассматриваемого вида нередко встречаются случаи, когда ряд исполнительных органов связан посредством цикловых механизмов с общим главным валом [1,2].

В подобных случаях структурная и динамическая идентичность повторяющихся блоков позволяет воспользоваться теорией регулярных систем, обладающих периодической структурой. Исследование регулярных цепочек позволяет осуществить аналитическое описание динамических характеристик моделей с большим числом степеней свободы, базируясь на анализе одного структурного элемента системы.

Первые результаты в этом направлении были получены ещё Ньютоном при решении задачи о распространении звука в воздухе. Дальнейшее развитие этой теории связано с исследованиями, проведёнными в начале XX века Дебаем, Борном, Карманом применительно к проблеме теплоёмкости кристаллов [3]. В последние десятилетия интерес к этой проблеме возрос в связи с близостью к теории солитонов [4,5]. Основным объектом приложения теории цепочек долгое время оставалась математическая физика. В настоящее время среди технических приложений можно выделить современные методы анализа линий электропередач. Другим важным приложением, как уже было отмечено, являются методы анализа и синтеза цикловых машин, особенно при повышенной протяжённости зоны технологической обработки.

Применительно к машинам с цикловыми механизмами теория регулярных колебательных систем нуждается в дополнительной разработке. Обычно предметом анализа в теории цепочек является система, состоящая из масс, соединённых «пружинками». Между тем динамические модели приводов машин имеют более сложную внутреннюю структуру каждого повторяющегося модуля, образующего не только односвязные цепочки, но и разветвлённые, кольцевые и разветвлённо-кольцевые колебательные системы. Специфическими

особенностями данного класса систем является также переменность параметров, обусловленная изменением геометрических характеристик цикловых механизмов, и нелинейные динамические эффекты. Данной проблеме посвящены работы [6–9], в которых был исследован ряд типовых моделей, встречающихся в инженерной практике. Ниже рассматривается регулярная модель привода, предназначенного для осуществления поступательного программного движения исполнительных органов машины.

2. Динамическая модель

В рассматриваемой модели (рис.1) главный вал отображён крутильной подсистемой, образующей цепочку инерционных и упруго-диссипативных элементов. При этом приняты следующие условные обозначения: J_0, J_1 – моменты инерции элементов главного вала; c_{01}, c_{02}, c_1, c_2 – коэффициенты крутильной жёсткости соответствующих участков главного вала; ψ – коэффициенты рассеяния. При схематизации цикловых механизмов помимо инерционных, упругих и диссипативных свойств учтены геометро-кинематические характеристики Π , соответствующие нелинейной функции положения, трансформирующей координату на «входе в координату $\Pi(\varphi_v)$ на « выходе». Рабочие органы представлены в виде абсолютно жёстких твёрдых тел с массой m и моментом инерции относительно центра масс J .

В программном движении, т.е. без учёта упругих свойств системы, исполнительный орган перемещается строго поступательно. Такой же характер движения имеет место при абсолютно жёстком закреплении рабочего органа на выходных звеньях механизмов [6]. Однако подобное закрепление может привести к повышению внутренних реакций в каждом из модулей, поэтому нередко более предпочтительным является соединение близкое к шарнирному. В этом случае движение исполнительного органа на уровне «больших» перемещений остаётся поступательным, а на уровне малых колебаний – плоскопараллельным. Эта особенность на схеме (см. рис.1) условно показана как угловое отклонение рабочего органа от горизонтального направления.

Рассматриваемый привод состоит из входного передаточного механизма ($c_{01} - J_0 - c_{02}$) и идентичных блоков (модулей) $s \in \overline{1, n}$.

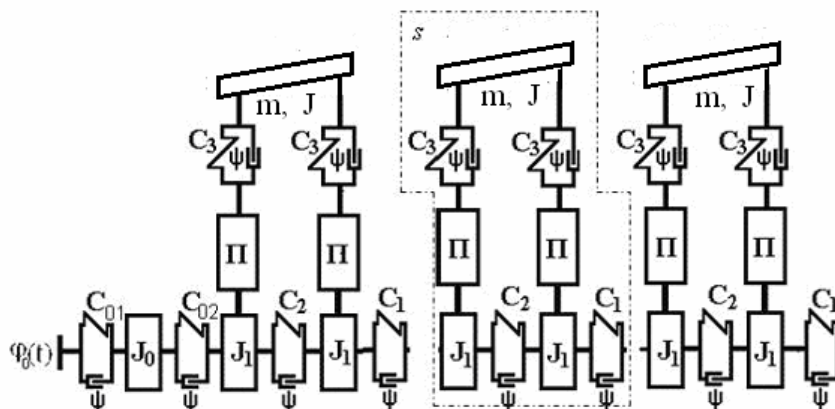


Рис. 1

3. Исследование подсистемы одиночного модуля

Повторяющийся модуль s имеет четыре степени свободы. Пусть $\varphi_{sv} = \varphi_0 + \Delta\varphi_{sv}$, $y_{sv} = y_0 + \Delta y_{sv}$, где $\varphi_0, y_0 = \Pi(\varphi_0)$ – абсолютные координаты главного вала исполнительного органа в программном движении; $\Delta\varphi_{sv}, \Delta y_{sv}$ – динамические ошибки; s, v – номер модуля и порядковый номер сечения в модуле ($v = 1, 2$). При беззаторможенном движении и малых колебаниях имеем

$$\Delta y_{sv} \approx \Pi'(\varphi_0)\Delta\varphi_{sv} + \Delta y_{sv}^*, \quad (1)$$

где $(\)' = d/d\varphi_0$, y_{sv}^* – приведённое значение деформации в цикловом механизме, равное динамической ошибке при абсолютно жёстком главном вале.

В качестве обобщённых координат примем $\Delta\varphi_1 = q_1, \Delta\varphi_2 = q_2, \Delta y = q_3, \alpha = q_4$ (повторяющийся индекс s временно опущен). Здесь $\Delta y, \alpha$ – динамическая ошибка перемещения центра масс исполнительного органа и его угловое отклонение. В дальнейшем, не сужая общности, для определённости примем, что центр масс располагается в среднем сечении. Тогда, $\Delta y_1 = \Delta y - 0,5\ell\alpha; \Delta y_2 = \Delta y + 0,5\ell\alpha$, где ℓ – длина одной секции исполнительного органа.

При учёте (1) и $\varphi_0 = \omega t$ запишем систему дифференциальных уравнений одного модуля:

$$\left. \begin{aligned} J_1\ddot{q}_1 + (c_2 + c_3\Pi_*'^2)q_1 - c_2q_2 - c_3\Pi_*'q_3 + 0,5c_3\ell\Pi_*'q_4 &= -M_1; \\ J_1\ddot{q}_2 - c_2q_1 + (c_2 + c_3\Pi_*'^2)q_2 - c_3\Pi_*'q_3 - 0,5c_3\ell\Pi_*'q_4 &= M_2; \\ m\ddot{q}_3 - c_3\Pi_*'q_1 - c_3\Pi_*'q_2 + 2c_3q_3 &= 0; \\ J\ddot{q}_4 + 0,5c_3\ell\Pi_*'q_1 - 0,5c_3\ell\Pi_*'q_2 + 0,5c_3\ell^2q_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $\Pi_*' = \Pi'(\varphi_0)$; M_v – реактивные моменты в граничных сечениях модуля.

В системе уравнений (2) опущены диссипативные составляющие, мало влияющие на спектр «собственных» частот, а также вынуждающие силы. (Здесь и ниже слово «собственные» выделено кавычками, что подчёркивает нестрогость этого термина применительно к частотам свободных колебаний при переменных параметрах системы). Решение системы уравнений согласно методу условного осциллятора [1, 2] будем искать в виде

$$q_{1,2} = A_v \sin \int p(\varphi_0) d\varphi_0; \quad q_{3,4} = B_v \sin \int p(\varphi_0) d\varphi_0 \quad (3)$$

После подстановки (3) в (2) получаем

$$\left. \begin{aligned} (c_2 + c_3 \Pi_*'^2 - J_1 p^2) A_1 - c_2 A_2 - c_3 \Pi_*' B_1 + 0,5 c_3 \ell \Pi_*' B_2 &= -\bar{M}_1(p); \\ -c_2 A_1 + (c_2 + c_3 \Pi_*'^2 - J_1 p^2) A_2 - c_3 \Pi_*' B_1 - 0,5 c_3 \ell \Pi_*' B_2 &= \bar{M}_2(p); \\ -c_3 \Pi_*' A_1 - c_3 \Pi_*' A_2 + (2c_3 - m p^2) B_1 &= 0; \\ 0,5 c_2 \ell \Pi_*' A_1 - 0,5 c_3 \ell \Pi_*' A_2 + (0,5 c_3 \ell^2 - J p^2) B_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь \bar{M}_1, \bar{M}_2 – амплитудные значения реактивных моментов.

При одиночном модуле для определения частотного спектра достаточно задаться в системе (4) граничными условиями, после чего приравнять определитель системы нулю. Если динамическая жёсткость на «входе» равна

$R_0(p)$, а конец на «выходе» – свободен, то $\bar{M}_1 = R_0(p) A_1, \bar{M}_2 = 0$. В частном случае, (см. рис.1) $R_0 = c_{02}(c_{01} - J_0 p^2)/(c_{01} + c_{02} - J_0 p^2)$. При $c_{01} \rightarrow \infty$, имеем $R_0 \rightarrow c_{02}$; и $R_0 \rightarrow c_{01} c_{02}/(c_{01} + c_{02})$ при $c_{01} \ll J_0 p^2$. В этих обоих предельных случаях динамическая жёсткость не зависит от «собственной» частоты p . Следует подчеркнуть, что из-за переменности функции Π_*' , «собственные» частоты изменяются в зависимости от $\varphi_0 = \omega t$. В большинстве случаев $p(t)$ – медленно меняющиеся функции.

Имея в виду дальнейший анализ системы мультимодульной структуры, определим на основании (4) матрицу перехода для произвольного модуля s .

Из последних двух уравнений системы (4) получаем

$$B_1 = \beta_1(A_1 + A_2); \quad B_2 = \beta_2(A_2 - A_1), \quad (5)$$

где $\beta_1 = 0,5 \Pi_*' / (1 - p^2/k_2^2)$; $\beta_2 = \Pi_*' \ell^{-1} / (1 - p^2/k_3^2)$; $k_2^2 = 2c_3/m$; $k_3^2 = 0,5 c_3 \ell^2 / J$. Далее из первых двух уравнений (4) исключаем B_1 и B_2 :

$$\left. \begin{aligned} u_{11} A_1 + u_{21} A_2 &= -\bar{M}_1; \\ u_{21} A_1 + u_{22} A_2 &= \bar{M}_2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $u_{11} = u_{22} = c_2 + c_3 \Pi_*'^2 [1 - 0,5(1 - p^2/k_2^2)^{-1} - 0,5(1 - p^2/k_3^2)^{-1}] - J_1 p^2$;
 $u_{12} = u_{21} = -c_2 - c_3 \Pi_*'^2 [0,5(1 - p^2/k_2^2)^{-1} + 0,5(1 - p^2/k_3^2)^{-1}]$.

Согласно (4), (5)

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ \bar{M}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(p) & g_{12}(p) \\ g_{21}(p) & g_{22}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{M}_1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $g_{11} = -u_{11}/u_{12}$; $g_{12} = g_{21} = -u_{12}^{-1}$; $g_{22} = -u_{22}/u_{12}$.

Тогда, для модуля s имеем

$$\begin{pmatrix} A_{s,1} \\ \bar{M}_{s,1} \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_s \begin{pmatrix} A_{s-1,1} \\ \bar{M}_{s-1,1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Матрица перехода модуля s определяется как

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2, \quad (9)$$

где $\mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & c_1^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Z}_2 = \|\|g_{ij}\|\|$.

При $c_{01} \rightarrow \infty$, $\bar{M}_{s1} = 0$ (свободный конец) формальное частотное уравнение для системы, состоящей из одного модуля и приводного механизма, приводится к виду

$$u_{22}(p, \varphi) / u_{21}(p, \varphi) + c_{02}^{-1} = 0 \quad (10)$$

На рис.2 в качестве примера приведены графики $p_r(\varphi)$, полученные на основании (10) при следующих исходных данных: $J_1 = 0,08$; $J = 0,75 \text{ кгм}^2$; $c_{02} = c_1 = 10^3 \text{ Нм}$; $c = 10^5 \text{ Н/м}$; $\Pi'_* = r_0 \sin \varphi_0$; $r_0 = 0,1 \text{ м}$. Из графиков следует, что низшая «собственная» частота ($r=1$) изменяется в интервале $p_1 = (98 \div 108) \text{ с}^{-1}$; вторая – $p_2 = (215 \div 227) \text{ с}^{-1}$; третья – $p_3 = (261 \div 276) \text{ с}^{-1}$.

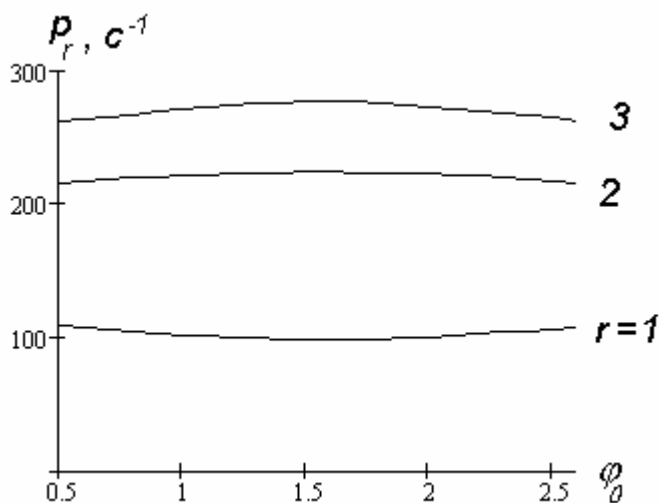


Рис.2

Для определения нестационарных форм колебаний главного вала достаточно в зависимость (7) подставить $A_1 = 1$; $p = p_r(\varphi_0)$; $\bar{M}_1 = R_0(p_r)$. (В нашем примере $R_0 = c_{01}$). Для исполнительного органа согласно (5) находим

$$B_1 = B_1(p_r, \varphi_0), \quad B_2 = B_2(p_r, \varphi_0).$$

4. Частотный анализ на базе теории регулярных систем

На рис. 3 в обобщённом виде представлена колебательная система регулярной структуры, выделенная штрих пунктирной линией.

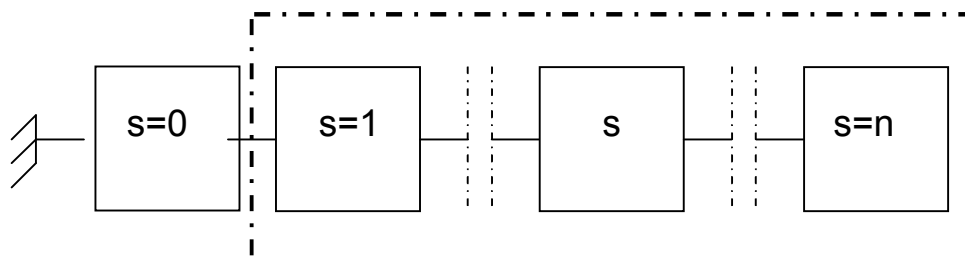


Рис. 3

От классической цепочки масс, соединённых пружинками, она отличается тем, что каждый модуль образован подсистемой с конечным числом степеней свободы v_{\max} . (В частности, в модели, показанной на рис. 1, $v_{\max} = 4$). Пусть $s = \overline{1, n}$, а $s = 0$ отвечает приводному механизму, динамическая жёсткость которого равна R_0 (см выше).

В дальнейшем для удобства анализа приведём реактивные моменты к безразмерной форме, отнеся их к коэффициенту жёсткости c_1 . Тогда матричная зависимость (9) в раскрытом виде соответствует следующим рекуррентным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} A_s &= z_{11}A_{s-1} + z_{12}N_{s-1} \\ N_s &= z_{21}A_{s-1} + z_{22}N_{s-1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $z_{11} = g_{11} + g_{21}/c_1$; $z_{12} = g_{12} + g_{22}/c_1$; $z_{21} = g_{21}$; $z_{22} = g_{22}$; $N_s = M_s/c_1$; z_{ij} – элементы матрицы Z .

Решение однородной системы разностных уравнений (11) ищем в виде $A_s = \lambda A_{s-1}$; $N_s = \lambda N_{s-1}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} (z_{11} - \lambda)A_{s-1} + z_{12}N_{s-1} &= 0; \\ z_{21}A_{s-1} + (z_{22} - \lambda)N_{s-1} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Исключая тривиальное нулевое решение, обратим детерминант этой системы в нуль. Корни полученного таким образом характеристического уравнения равны $\lambda = \kappa \pm i\sqrt{1 - \kappa^2}$, где $i = \sqrt{-1}$. Можно показать, что

$$\kappa = 0,5(z_{11} + z_{22}) = 0,5\text{Sp}\mathbf{Z}. \quad (12)$$

Здесь $\text{Sp}\mathbf{Z}$ – след матрицы перехода \mathbf{Z} .

При $\kappa \leq 1$, принимая $\kappa = \cos \theta$, имеем

$$A_s = h_1 \cos s\theta + h_2 \sin s\theta;$$
$$N_s = h_1[\cos(s+1)\theta - \cos s\theta] + h_2[\sin(s+1)\theta - \sin s\theta], \quad (s = \overline{0, n}) \quad (13)$$

На основании (13) при принятых граничных условиях получаем следующее трансцендентное уравнение относительно θ :

$$(1 + \zeta(p))\cos[(n+0,5)\theta] - \zeta(p)\cos[(n-0,5)\theta] = 0, \quad (14)$$

где $\zeta(p) = c_1 / R_0(p)$.

Если динамическая жёсткость на « входе » не зависит от p (см выше), имеем $\zeta = \text{const}$, а следовательно, решение уравнения (14) может быть получено не зависимо от динамических характеристик модуля s . В частности, при $\zeta \rightarrow \infty$ $\theta_j = j\pi/n$, где $j = \overline{1, n}$ – номер формы колебаний главного вала (по сечениям s). В другом предельном случае, когда $\zeta \rightarrow 0$, $\theta_j = \pi(2j-1)/(n+1)$.

Для получения формального частотного уравнения следует совместно рассмотреть уравнение (14) и матрицу перехода одного модуля (9). Тогда

$$\text{Sp}\mathbf{Z}(p) = \kappa(p) = \cos \theta(p). \quad (15)$$

Подчеркнём, что номер формы j , соответствующий сечениям s главного вала, может не совпадать с номером частоты r . Дело в том, что каждой форме j отвечает несколько значений r , число которых равно числу «парциальных» частот подсистемы одного модуля. (Л.И. Мандельштам при описании аналогичного эффекта заметил, что «...это замечательное обстоятельство» [5]).

Ещё одна интересная особенность. Уравнение вида (14) «обслуживает» любую колебательную систему, имеющую структуру цепочки, не зависимо от степени сложности каждого повторяющегося модуля. Это ещё раз подтверждает «могущество» аппарата регулярных систем для решения динамических задач рассматриваемого класса.

Выше был рассмотрен наиболее распространённый случай, когда $\kappa \leq 1$. Такая ситуация обычно имеет место почти на всём частотном диапазоне и лишь при некоторых значениях ζ нарушается в узких зонах в окрестности «парциальных» частот модуля. При $\kappa > 1$ ($\text{Im} \lambda = 0$), принимая $\kappa = \text{ch} \theta$ и проведя аналогичные выкладки, получаем выражения, отличающиеся от приведённых лишь тем, что тригонометрические функции заменены одноимёнными гиперболическими. При $\kappa < -1$ условие $\kappa = \text{ch} \theta$ удовлетворяется лишь при $\theta = \theta^0 + i\pi$. Тогда

$$\cos(\theta^0 + i\pi) = \text{ch} \theta^0 \text{ch} i\pi + \text{sh} \theta^0 \text{sh} i\pi = -\text{ch} \theta^0 \leq -1.$$

Таким образом, в этом случае следует принять $\text{ch}\theta^0 = -\kappa$. Тогда $\text{ch } j\theta = (-1)^j \text{ch } j\theta^0$ и $\text{sh } j\theta = (-1)^j \text{sh } j\theta^0$. С учётом этих корректив справедливы зависимости для случая $\kappa > 1$.

Для принятых выше параметров модуля на рис.4 приведены графики $\kappa(h_r)$ (см формулу (12)), образующие при изменении φ_0 заштрихованные области. Кроме того, при числе модулей $n = 5$ и $\zeta = 2$ приведены графики $\Delta = \cos \theta(p)$ для четырёх форм колебаний главного вала (по сечениям s), представляющие собой при $\zeta = \text{const}$ семейство прямых. Точки пересечения этих двух семейств кривых соответствуют нескольким диапазонам изменения «собственных» частот.

Для большей наглядности характера изменения частотного спектра в зависимости от номера формы главного вала j и порядкового номера частоты r в таблице приведены результаты расчётов при фиксированном j и усреднённом по φ_0 значении $\Pi'^2(\varphi_0)$. Из анализа приведённых данных следует, что переход к более высокому номеру j может не сопровождаться

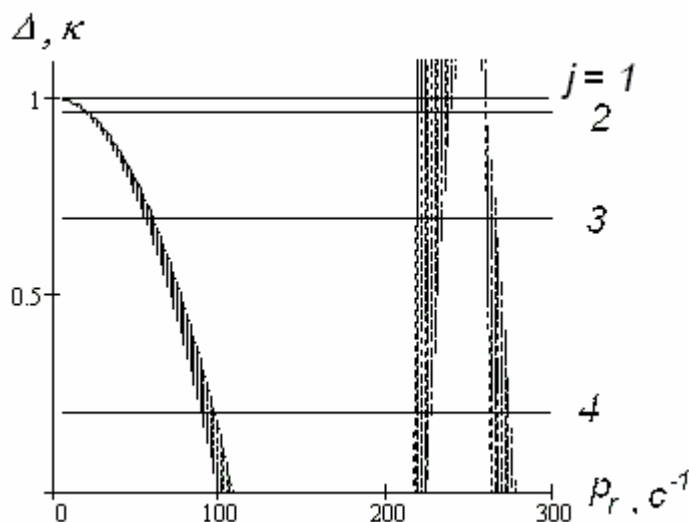


Рис.4

ростом значения частоты. Так например, при $r = 2$ с увеличением j частота убывает. Кроме того, на некоторых диапазонах ($r=2, 3$) возникает очень плотный спектр «собственных» частот.

Таблица

$j \backslash r$	1	2	3	4
1	10	22	58	94
2	232	230	228	222

3	258	260	262	272
---	-----	-----	-----	-----

Нестационарные формы в сечениях главного вала (на границах модуля s) A_{s1} , определяются зависимостями (8), (9). Для определения A_{s2} воспользуемся рекуррентными зависимостями, связывающими сечения $\nu = 2$ модуля s и $\nu = 1$ модуля $s + 1$. При этом $A_{s2} = K_{s+1} - N_{s1}$. На рис.5 для принятых выше исходных данных приведены первые три формы колебаний по главному валу при усреднённых значениях Π_*^2 . Жирные кривые на рисунке отвечают A_{s1} , а тонкие – A_{s2} ; на графиках приведён соответствующий номер формы ($j = 1, 2, 3$).

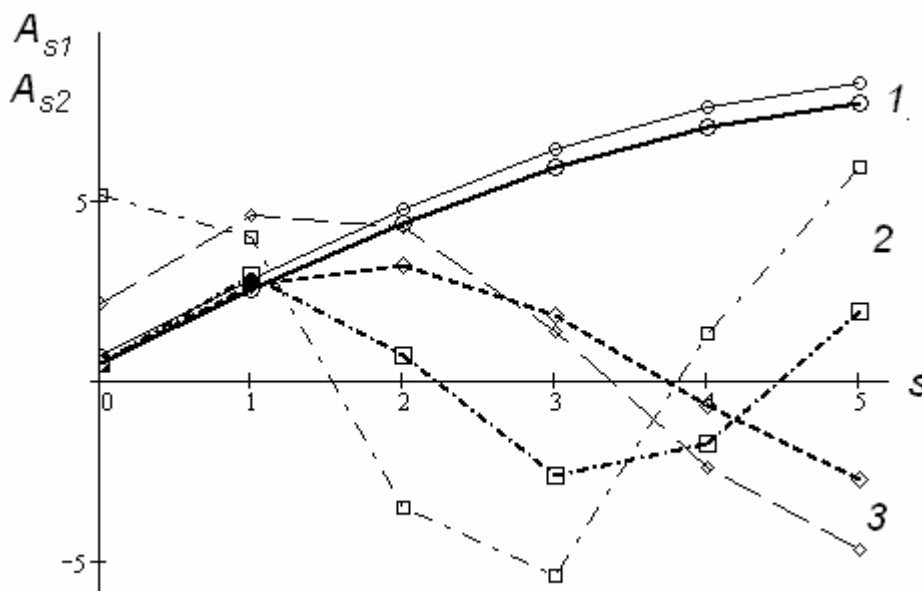


Рис.5

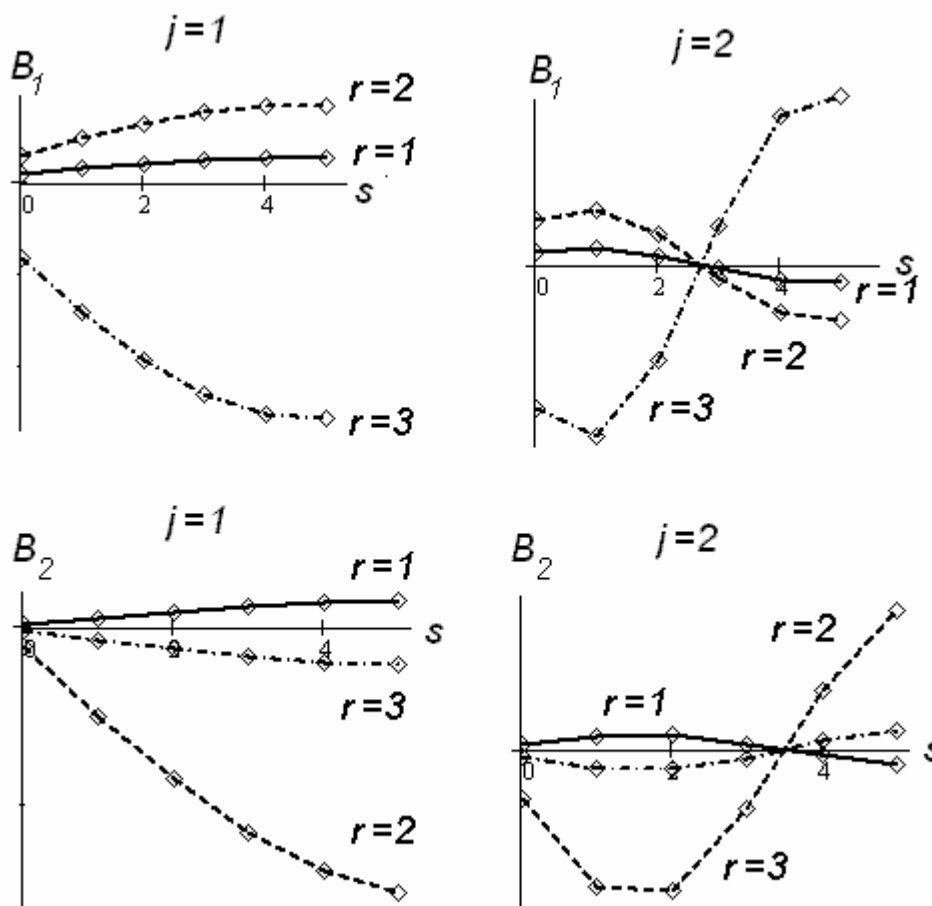


Рис.6

На рис.6 приведены графики $B_1(s)$ и $B_2(s)$, характеризующие формы колебаний в сечениях центра масс исполнительных органов и их поворотные колебания. Графики получены на основании зависимостей (5) для трёх частот ($r = 1, 2, 3$) при двух фиксированных формах главного вала ($j = 1, 2$). Анализ форм ещё раз подтверждает отмеченную выше особенность рассмотренных систем, состоящую в том, что каждой фиксированной форме главного вала соответствует несколько форм колебаний в каждом модуле. В частности, при первой форме колебаний главного вала ($j = 1$) форма колебаний центров масс исполнительного органа $B_1 > 0$ при $r = 1$, что свидетельствует о синфазных колебаниях главного вала и исполнительного органа. При $r = 2, 3$ имеем $B_1 < 0$, т.е. эти колебания находятся в противофазах. Аналогичную картину мы наблюдаем и при $j = 2$.

В заключение отметим, что рассмотренная выше модель является распространённым частным случаем крутильно-изгибной системы, рассмотренной в работе [10]. Необходимость её отдельного рассмотрения связана с тем, что предельные переходы или близкие к ним ситуации в рамках анализа модели общего вида, как это нередко бывает, приводят к плохо обусловленной вычислительной процедуре.

Литература

1. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 306 с.
2. Vulfson I. Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives. Hemisphere Publ. Corpor.: New York, Washington, London, 1989. – 99 p.
3. Манделъштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972. – 470 с.
4. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. – М.: Наука, 1997. – 496 с.
5. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. – 216 с.
6. Vulfson I.I., Dyatlova P.A. Analyses of vibrations of multimodule structured drives with cyclic mechanisms. //Proceedings of IX International Conference on the theory of machines and mechanisms. Liberec, 2004. Pp. 823–828.
7. Вульфсон И.И. Динамическое исследование многосекционных технологических машин, образующих колебательные системы квазирегулярной структуры. //Сб. докладов Международного симпозиума «Образование через науку». – М.: МГТУ им. Н.Е. Баумана, 2006. – С. 172–179.
8. Вульфсон И.И., Преображенская М.В. Исследование колебательных режимов, возбуждаемых при переключке в зазорах цикловых механизмов, соединенных с общим исполнительным органом. //Проблемы машиностроения и надежности машин. №1, 2008. С.33–39.
9. Вульфсон И.И. Исследование колебаний многосекционных приводов цикловых машин разветвленно-кольцевой структуры.//Проблемы машиностроения и надежности машин. №2, 2009. С. 23–29.
10. Вульфсон И.И. Методика частотного анализа многосекционных приводов цикловых машин, образующих крутильно-изгибные системы разветвленно-кольцевой структуры. // Теория механизмов и машин. Т.7. №1(13). 2009. С. 32–41.

Поступила: 04.08.09.