

УДК 534.141

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЫВНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА С МАЛЫМ ТРЕНИЕМ

А.П. Иванов¹⁾, Т.И. Наджафов²⁾

1) Московский физико-технический институт (госунiversитет), Россия, Москва

2) Нахичеванский государственный университет, Азербайджан, Нахичевань

Аннотация

Проведенный анализ известной модели фрикционных автоколебаний выявил наличие периодической орбиты при сколь угодно малом значении статического коэффициента трения. Такая орбита рождается из однопараметрического семейства периодических движений консервативной системы, причем источником энергии служит движущееся основание. В зависимости от параметров, определяющих характер зависимости силы трения от скорости скольжения, орбита может быть непрерывной либо разрывной. Орбита первого типа устойчива, а устойчивость орбиты второго типа при некоторых значениях параметров может нарушаться.

Ключевые слова: фрикционные автоколебания, статический коэффициент трения, скорость скольжения.

1. Описание системы. Известно [1], что тела, испытывающие большое трение, но обладающие малой массой, могут при известных условиях совершать разрывные механические колебания. Пример, рассмотренный в [2], стал впоследствии базовой моделью таких колебаний и своеобразным полигоном для отработки различных аналитических и численных подходов.

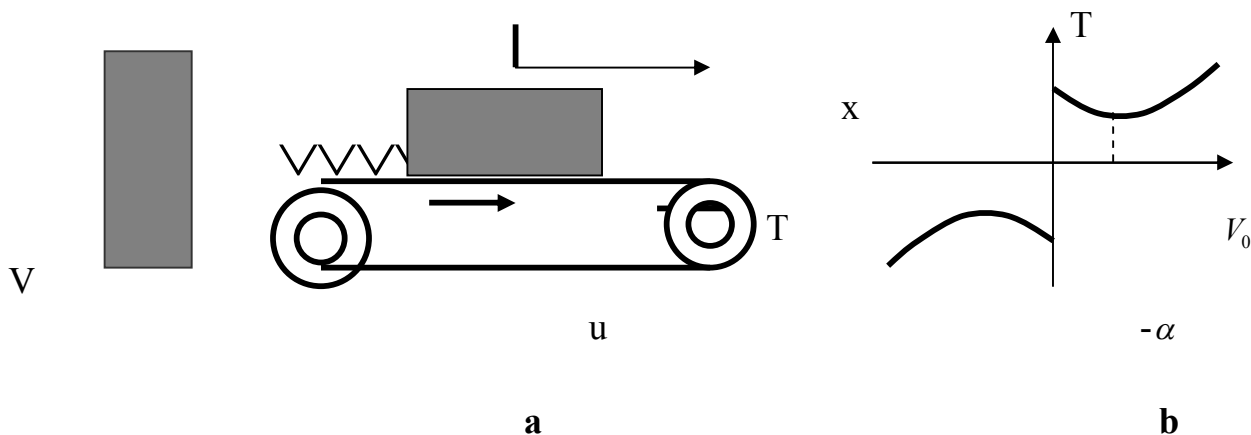


Рис. 1. Осциллятор с сухим трением: а) схема устройства; б) зависимость силы трения от скорости скольжения

Устройство на рис.1,а состоит из твердого тела массы m , располагающегося на ленте,

движущейся с постоянной скоростью u . Тело связано с неподвижной стенкой пружиной жесткости c и может перемещаться под действием силы трения T совместно с лентой либо скользить по ней. Координата x равна смещению тела от положения, в котором пружина не напряжена. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = T \quad (1)$$

Величина T зависит от относительной скорости ленты и тела $V = u - \dot{x}$ по закону, график которого представлен на рис.1,б. Функция $T(V)$ нечетна, имеет разрыв в нуле и точку минимума $V = V_0$, что согласуется с реальными характеристиками сухого трения (так называемый Штрибек – эффект). Для определенности, воспользуемся следующей формулой [3]:

$$T(V) = \alpha (\operatorname{sgn} V - \beta V + \gamma V^3) \quad (2)$$

Приравнивая производную от функции (2) к нулю, найдем точку минимума $V_0 = \sqrt{\beta/3\gamma}$. Условие $T(V_0) > 0$ ограничивает допустимые значения параметров неравенством $\gamma > 4\beta^3/27$.

Система (1) имеет единственное положение равновесия в такой точке $x = x_0$, где упругая сила пружины уравнивает силу трения $T(u)$; следовательно, $x_0 = T(u)/c$. Условие устойчивости этого равновесия выражается соотношением

$$\left. \frac{dT(u - \dot{x})}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=0} < 0 \quad (3)$$

которое равносильно неравенству $u > V_0$. Отсюда следует, что для достаточно больших скоростей движения ленты имеется устойчивое положение равновесия тела, однако при падении скорости ниже критического значения происходит потеря устойчивости равновесия с одновременным рождением предельного цикла по сценарию бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа. Возникающие при этом фрикционные автоколебания могут на практике обнаруживать себя звуком (скрежет или визг тормозов). При значениях u , близких к V_0 (но меньших этой величины), амплитуда колебаний остается малой, а относительная скорость V – положительной. Такие колебания описываются гладкими функциями времени и могут быть исследованы регулярными методами [2]. Разрывные релаксационные колебания имеют большую амплитуду и сопровождаются изменением знака скорости скольжения V . Такие колебания возникают, если коэффициент статического трения α достаточно большой, а начальные условия далеки от равновесных [2].

В данной работе рассматривается другой сценарий возникновения разрывных колебаний, реализующийся при сколь угодно малом трении (2). Такие движения рождаются из семейства периодических движений, существующих в системе в отсутствие трения. В тех случаях, когда порождающая орбита имеет малую амплитуду, так что $V > 0$, для построения периодических решений в системе с трением можно воспользоваться методами малого параметра [4]. Если же для порождающего решения относительная скорость V знакопеременна, будем использовать итерационный метод, разработанный авторами [5], не требующий гладкости.

2. Построение периодических орбит малой амплитуды. Выберем единицы измерения таким образом, чтобы масса m и жесткость c были единичными. Считая в системе (1), (2) параметр α малым, найдем ее периодические орбиты. В случае $\alpha = 0$ здесь имеется семейство периодических орбит вида

$$x = A \sin t \quad (4)$$

(общее решение автономной системы (1) можно свести к виду (4) за счет выбора начала отсчета времени). Для величины относительной скорости для движения (4) имеем такое выражение:

$$V = u - \dot{x} = u - A \cos t \quad (5)$$

Допустим сначала, что $A < u$, тогда во всех точках орбиты $V > 0$. Амплитуду порождающего решения найдем из амплитудного уравнения

$$f(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(u - A \cos t) \cos t dt = \frac{\alpha}{2} A (\beta - 3\gamma u^2) - \frac{3\alpha}{8} \gamma A^3 = 0 \quad (6)$$

причем функция $T(V)$ определяется формулой (2), где $V > 0$. Расчет интеграла (6) приводит к такому результату:

$$A = 2 \sqrt{\frac{\beta}{3\gamma} - u^2}, \quad \frac{\beta}{3\gamma u^2} \in \left(1; \frac{5}{4}\right) \quad (7)$$

Ограничение значений параметров в формулах (7) обусловлено принятием допущения $A < u$.

Орбиту (4), (7) примем за начальное приближение к периодическому решению системы (1). Последующие приближения будем строить при помощи итерационного процесса, описанного в [5]. Вначале перейдем к локальным координатам по формулам

$$x = R \sin \varphi, \quad \dot{x} = R \cos \varphi \quad (8)$$

Подстановка формул (8) в систему (1) приводит к такому уравнению для определения зависимости $R(\varphi)$:

$$\frac{dR}{d\varphi} = F(R, \varphi), \quad F(R, \varphi) = \frac{T(V)R \cos \varphi}{R - T(V) \sin \varphi}, \quad V = u - R \cos \varphi \quad (9)$$

Итерационный процесс определяется соотношениями

$$R_{j+1}(\varphi) = P(R_j) - \frac{1}{f'(A)} \langle F(P(R_j), \varphi) \rangle, \quad P(R_j) = R_j(\varphi) + \int^* \bar{F}(R_j, \varphi) d\varphi \quad (10)$$

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\varphi, \quad \bar{F} = F - \langle F \rangle, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

где символом $\int^* \bar{F} d\varphi$ обозначена та первообразная функции \bar{F} , которая имеет нулевое среднее. В частности,

$$R_0(\varphi) = A, \quad R_1(A) = A + \alpha \left((1 - \beta u + \gamma u^3) \sin \varphi + \frac{1}{4} (\beta A - 3\gamma u^2 A) \sin 2\varphi \right) + \alpha u A^2 (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) - \frac{\alpha \gamma A^3}{32} (8 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi) + O(\alpha^2) \quad (11)$$

Определив величину первой коррекции $\|R_1 - R_0\|$ (проще всего это сделать в метрике $L_2[0, 2\pi]$, можно затем оценить скорость сходимости последовательности (10), а также

допустимый диапазон параметра α (см. [5]).

3. Построение орбит с переменной направления скольжения. В случае, если в формуле (4) $A > u$, относительная скорость (5) знакопеременна. С учетом этого обстоятельства амплитудное уравнение (6) принимает вид

$$f(A) = \frac{\alpha}{2} A (\beta - 3\gamma u^2) - \frac{3\alpha}{8} \gamma A^3 - \frac{2\alpha}{\pi} \sqrt{1 - \frac{u^2}{A^2}} = 0 \quad (12)$$

Как показывает графический анализ, уравнение (12) имеет изолированный корень $A > u$ при условии

$$\frac{\beta}{3\gamma u^2} > \frac{5}{4} \quad (13)$$

причем вследствие неравенства $f'(A) < 0$ такой корень единственен. Для построения периодической орбиты можно воспользоваться алгоритмом (10).

4. Исследование устойчивости. Рассмотрим сначала периодические орбиты малой амплитуды (без перемены направления скольжения). В этом случае правая часть уравнения (9) непрерывно дифференцируема, что позволяет применить для исследования устойчивости обычный метод линеаризации. Для частной производной $\partial F / \partial R$ в уравнении (9) в окрестности корня амплитудного уравнения имеем с точностью до членов второго порядка относительно α такое выражение:

$$\frac{\partial F}{\partial R} = -\alpha A \cos^2 \varphi (3\gamma(u - A \cos \varphi)^2 - \beta) \quad (14)$$

Для вычисления характеристического показателя c_0 необходимо проинтегрировать правую часть формулы (14) на отрезке $[0, 2\pi]$. В результате получаем

$$c_0 = pa(b - 3\gamma u^2) - \frac{9}{4} pagA^2 < 0 \quad (15)$$

причем вывод о знаке неравенства (15) основан на формуле (6). Следовательно, периодические движения малой амплитуды при наличии малого сухого трения асимптотически устойчивы.

Для движений второго типа, рассмотренных в п.3, правая часть формулы (9) терпит разрыв в те моменты, когда скорость скольжения V меняет свой знак. В этом случае при вычислении характеристического показателя к интегралу от функции (14) следует добавить дискретные члены, соответствующие скачкам функции F [7]. Для тех значений j , для которых величина V меняет знак, изменение фундаментального решения $Y(j)$ описывается формулой [7]

$$Y(j + 0) = (1 + D)Y(j - 0), \quad Y(j) = \int_0^j \frac{F}{R} dj, \quad D = \frac{F^+ - F^-}{V_j + V_R F^-} \quad (16)$$

На каждом периоде имеется две перемены знака скорости скольжения, причем в обоих случаях величина D имеет вид

$$D = \frac{2au}{A^2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{A^2}} \quad (17)$$

При расчете характеристического показателя c_1 по формулам (16) можно заменить $\ln(1+D)$ на D , в итоге получим

$$c_1 = c_0 + 2D \quad (18)$$

Подставляя выражения (12), (17) в формулу (18), имеем

$$\frac{A}{\pi} \chi_1 = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{u}{A}\right) \sqrt{1 - \frac{u^2}{A^2}} - \frac{3}{2} \gamma A^3 \quad (19)$$

Как следует из формулы (19), в зависимости от параметров задачи характеристический показатель c_1 может быть как положительным, так и отрицательным. Периодические орбиты, обладающие достаточной кратковременной фазой обратного направления скольжения ($V < 0$) устойчивы, с ростом амплитуды A возможно появление области неустойчивости, если параметр γ менее некоторого критического значения. Орбиты с достаточно большой амплитудой устойчивы.

5. Выводы. Анализ известной модели фрикционных автоколебаний выявил наличие периодической орбиты при сколь угодно малом значении статического коэффициента трения. Такая орбита рождается из однопараметрического семейства периодических движений консервативной системы, причем источником энергии служит движущееся основание. В зависимости от параметров, определяющих характер зависимости силы трения от скорости скольжения, орбита может быть непрерывной (т.е. скорость скольжения сохраняет знак) либо разрывной (с переменной направления скольжения). Орбита первого типа устойчива, а устойчивость орбиты второго типа при некоторых значениях параметров может нарушаться.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00718).

Литература

1. Кайдановский Н.Л., Хайкин С.Э. Механические релаксационные колебания – ЖТФ т.3, вып.1. 1933.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний – М.: Физматгиз, 1959.
3. Di Bernardo M. et al. Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems – SIAM Review, V.50, Is.4, p.629—701, 2008.
4. Проскураков А.П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний – М.: Наука, 1977.
5. Иванов А.П., Наджафов Т.И. Итерационный метод построения периодических решений систем с малым параметром – в сб.статей Проблемы механики, М.: Физматлит, 2007. С. 406-417.

6. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations – Wiley, 1979.
7. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнение с разрывной правой частью – М.: Наука, 1985.

Поступила: 01.07.09.